Лекция 7

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

1. Понятие о статически неопределимых системах

Статически неопределимой называется система, внутренние усилия которой нельзя определить только из уравнений статики.

Статически неопределимые системы (СНС) отличаются от статически определимых рядом свойств:

− они надежнее;

− выдерживают бо́льшую нагрузку;

− у них деформации меньше;

− изменение температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов вызывают дополнительные усилия;

− внутренние усилия зависят от физических и геометрических характеристик элементов.

У СНС есть «лишние» связи. Число лишних связей называется ***степенью статической неопределимости***.

Степень статической неопределимости *n* простой системы определяется из дискового аналога по формуле

$$n = -W = 2n_{Ш} + n_{C} + n_{C_0} - 3n_{Д}.$$

Степень статической неопределимости фермы определяется по формуле

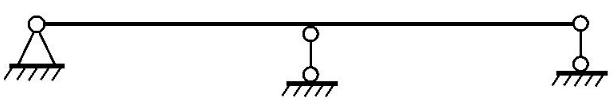
$$n = -W = n_{C} + n_{C_0} - 2n_{У}.$$

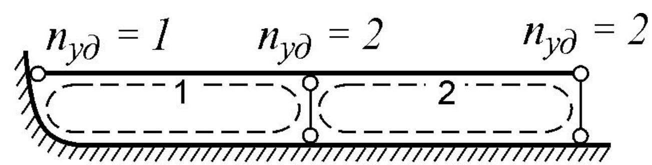
Получим другую формулу. Для этого введем два понятия:

- ***замкнутый контур*** – замкнутая цепь из элементов и связей;
- ***удалённая связь*** – связь замкнутого контура, исключенная из жесткого соединения элементов.

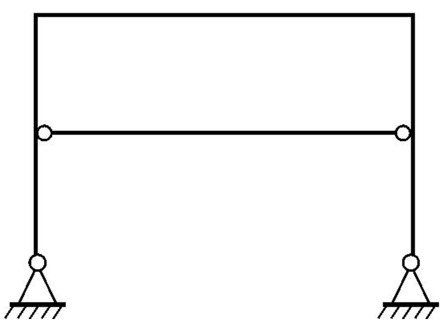
Степень статической неопределимости сплошного замкнутого контура равна трем. Поэтому степень статической неопределимости системы из $n_к$ замкнутых контуров, из которых удалены $n_{уд}$ связей, будет

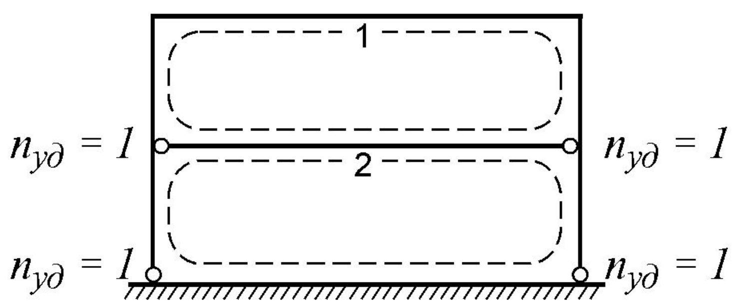
$$n = 3n_к - n_{уд}.$$





Для балки:
$n = 3 \cdot 2 – 5 = 1$

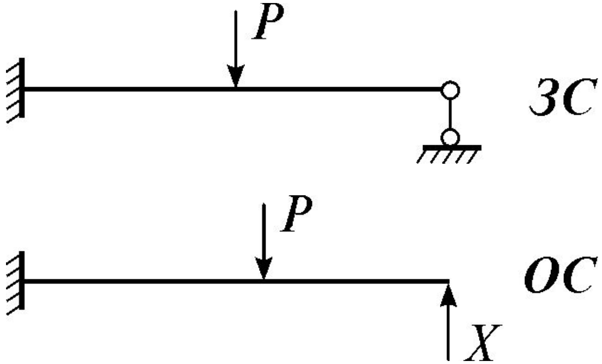




Для рамы:
$n = 3 \cdot 2 – 4 = 2.$

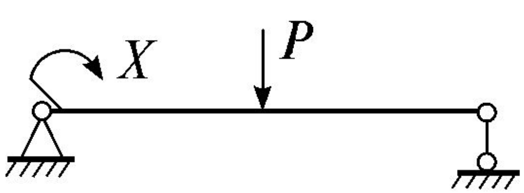
2. Выбор основной системы

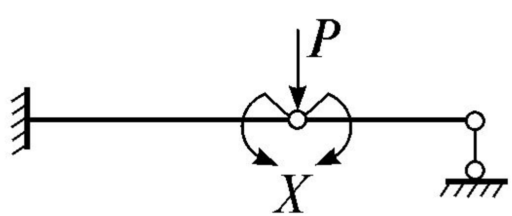
Расчет статически неопределимой системы начинается с превращения ее в статически определимую. Для этого необходимо исключить лишние связи и заменить их реакции неизвестными силами. Полученная система называется ***основной системой (ОС)***.

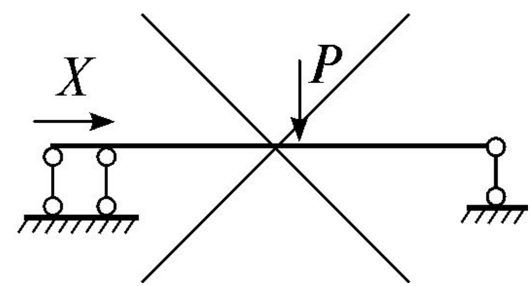


У этой балки, которую будем называть заданной системой ***(ЗС)***, степень статической неопределимости *n=1*. Если исключить лишнюю связь (правую опору) и обозначить неизвестную реакцию через *X*, получим ее *ОС*.

Способов исключения лишних связей очень много (теоретически – бесконечное число). Например, лишнюю связь можно исключать как на следующих рисунках. Одна из этих схем ГНС и для дальнейшего расчета непригодна. Все остальные схемы могут быть приняты за *ОС*.







В расчетах линейно-упругих систем используется гипотеза о том, что внешняя нагрузка в элементах заданной системы распределяется единственным образом.

Следовательно, результаты расчетов по различным *ОС* должны быть одинаковыми.

Однако объем вычислений в разных *ОС* может быть разным. Поэтому из многих вариантов *ОС* нужно выбирать наиболее оптимальную.

Например, в нашем примере первый вариант *ОС* предпочтительнее остальных, т.к. в ней эпюры строятся легче.

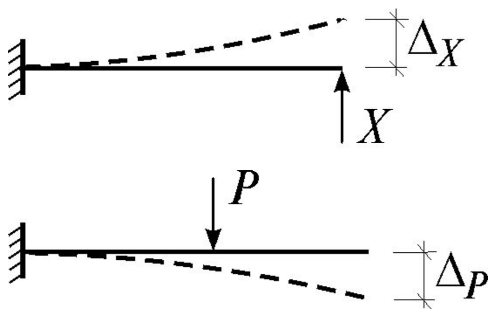
Основная система должна быть:

- обязательно геометрически неизменяемой;
- простой для расчета;
- учитывать характерные особенности сооружения и нагрузки.

3. Сущность метода сил

В этом методе за основные неизвестные принимаются силы (внутренние усилия). Поэтому его называют ***методом сил***.

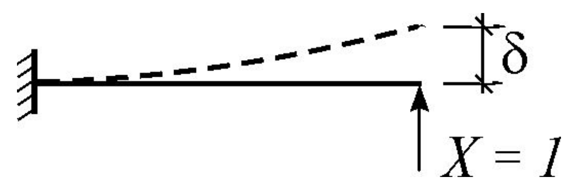
Рассмотрим предыдущую балку и потребуем, чтобы *ЗС* и ее *ОС* были эквивалентными. Для этого перемещение в направлении исключенной связи в *ОС* должно равняться нулю: $\Delta=0$.



По принципу суперпозиции, перемещение Δ равно сумме перемещения Δ_X от реакции X и перемещения Δ_P от заданной силы *P* :

$$\Delta=\Delta_X+\Delta_P=0.$$

Т.к. сила *X* неизвестна, Δ_X определить нельзя. Поэтому рассмотрим единичное состояние *(ЕС)* основной системы, где действует только единичная сила $P=1$.



Перемещение δ от единичной силы называется ***податливостью***.

В линейно-упругой системе выполняется условие $\Delta_X=\delta X$.

Тогда получаем ***каноническое уравнение метода сил:***

$$\delta X+\Delta_P=0.$$

Из него определяется неизвестная сила: $X=-\Delta_P/\delta$.

Если в системе имеется n лишних связей, то они исключаются и выбирается *ОС* с *n* неизвестными X_1, X_2, ..., X_n. Из условий эквивалентности *ЗС* и ее *ОС* составляются n уравнений совместности деформаций. При рассмотрении n единичных состояний основной системы эти уравнения приводятся к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1P}=0,\\
&\delta_{12}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2P}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nP}=0.
\end{aligned}$$

– система канонических уравнений метода сил

Здесь δ_{ii} – главные коэффициенты δ_{ij} – боковые коэффициенты, Δ_{iP} – грузовые коэффициенты. Введем матричные обозначения:

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \cdots & \delta_{nn}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix}\Delta_{1P}\\ \Delta_{2P}\\ \vdots\\ \Delta_{nP}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

матр. податливости ***вект. неизв.*** ***вект. нагр.*** ***нуль-вект.***

Тогда система канонических уравнений примет вид

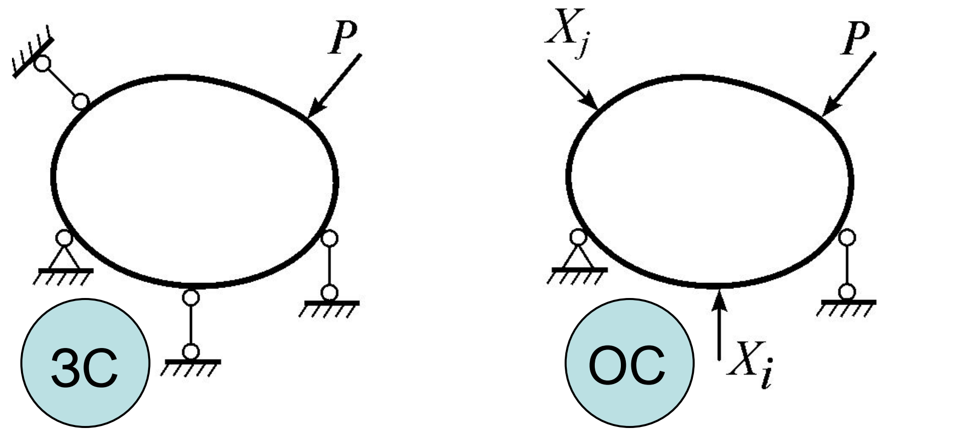
$$\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}}=\mathbf{0}.$$

Из нее $\mathbf{X} = -\boldsymbol{\delta}^{-1}\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}}$, где $\boldsymbol{\delta}^{-1}$ – обратная матрица податливости.

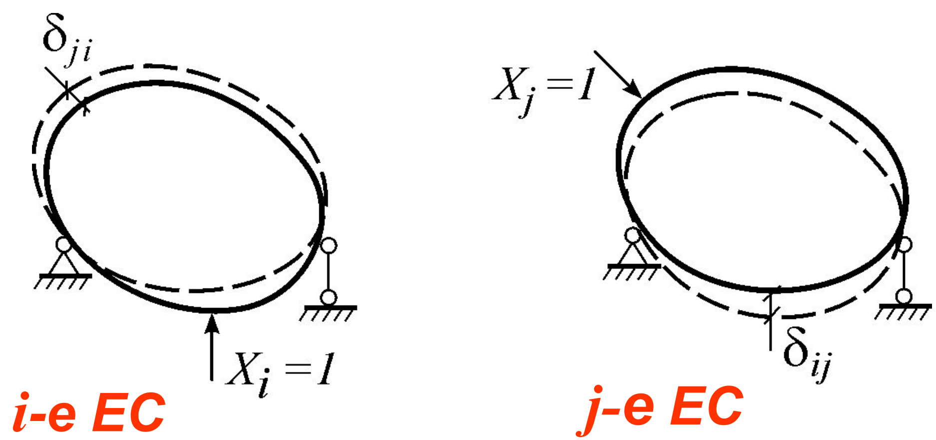
4. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты при неизвестных δ_{ij} и грузовые коэффициенты Δ_{iP} системы канонических уравнений – возможные перемещения от единичных сил и нагрузки. У них есть два индекса. Первый индекс i указывает на направление, а второй индекс j (или P) – на причину.

Рассмотрим условную статически неопределимую систему (ЗС) и ее основную систему (ОС):



Затем рассмотрим два единичных состояния ОС, в которых действуют только единичные силы:



Если в этих состояниях возникают внутренние усилия $\overline{M}_i$, $\overline{Q}_i$, $\overline{N}_i$ и $\overline{M}_j$, $\overline{Q}_j$, , $\overline{N}_j$ то возможная работа сил i-го состояния на дефор-мациях j-го состояния будет

$$-V_{ij}=\sum\int\left(\frac{\overline{M}_i\overline{M}_j}{EI}+\mu\frac{\overline{Q}_i\overline{Q}_j}{GF}+\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j}{EF}\right)dx.$$

С другой стороны, возможная работа внешних сил i-го состояния на перемещениях j-го состояния равна

$$W_{ij}=1\cdot\delta_{ij}=\delta_{ij}.$$

По принципу возможных перемещений $W_{ij}=-V_{ij}$. Из их равенства получаем

$$\delta_{ij}=\sum\int\left(\frac{\overline{M}_i\overline{M}_j}{EI}+\mu\frac{\overline{Q}_i\overline{Q}_j}{GF}+\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j}{EF}\right)dx.$$

– формула вычисления коэффициентов при неизвестных

Теорема Максвелла. *Перемещение в i-ом направлении от единичной силы в j-ом направлении равна перемещению в j-ом направлении от единичной силы в i-ом направлении, т.е.* $\boldsymbol{\delta_{ij}=\delta_{ji}}$.

Доказательство. Возможную работу сил i-го единичного состояния на перемещениях j-го состояния мы уже определили:

$$W_{ij}=\delta_{ij}.$$

А возможная работа сил j-ого состояния на перемещениях i-го состояния равна (см. рис.):

$$W_{ji}=1\cdot\delta_{ji}=\delta_{ji}.$$

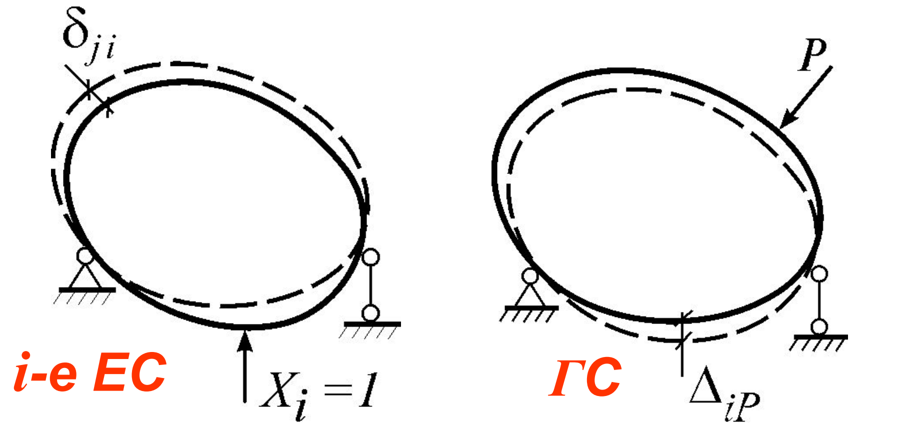
По теореме Бетти $W_{ij}=W_{ji}$. Следовательно,

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}\ .$$

Эта теорема позволяет уменьшать объем вычислений при вычислении боковых коэффициентов системы канонических уравнений.

Выведем формулу вычисления грузовых коэффициентов.

Для этого рассмотрим i-е единичное состояние и грузовое состояние (ГС) основной системы:



Возможная работа сил ЕС на перемещениях ГС равна:

$W_{iP} = 1 \cdot \Delta_{iP} = \Delta_{iP}$.

С другой стороны, возможная работа внутренних сил $\overline{M}_i$, $\overline{Q}_i$, $\overline{N}_i$ i-го единичного состояния на деформациях грузового состояния равна:

$$-V_{iP} = \sum\int\left(\frac{\overline{M}_i M_P}{EI} + \mu\frac{\overline{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\overline{N}_i N_P}{EF}\right)dx\,.$$

По принципу возможных перемещений $W_{iP} = -V_{iP}$. Отсюда

$$\Delta_{iP} = \sum\int\left(\frac{\overline{M}_i M_P}{EI} + \mu\frac{\overline{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\overline{N}_i N_P}{EF}\right)dx\,.$$

– формула вычисления грузовых коэффициентов

В рамах и балках перемещения определяются в основном изгибными деформациями. Поэтому коэффициенты канонических уравнений можно вычислять по сокращенным формулам:

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_j \ ,$$

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} dx = \overline{M}_i \otimes M_P \ .$$

Здесь знак $\otimes$ использован для сокращения записи формулы вычисления интеграла Мора и означает условное «произведение» двух эпюр.