

## Лекция 7

# РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

# 1. Понятие о статически неопределимых системах

**Статически неопределимой** называется система, внутренние усилия которой нельзя определить только из уравнений статики.

Статически неопределимые системы (СНС) отличаются от статически определимых рядом свойств:

- они надежнее;
- выдерживают бо́льшую нагрузку;
- у них деформации меньше;
- изменение температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов вызывают дополнительные усилия;
- внутренние усилия зависят от физических и геометрических характеристик элементов.

У СНС есть «лишние» связи. Число лишних связей называется **степенью статической неопределимости**.

Степень статической неопределимости  $n$  простой системы определяется из дискового аналога по формуле

$$n = -W = 2n_{Ш} + n_C + n_{C_0} - 3n_D.$$

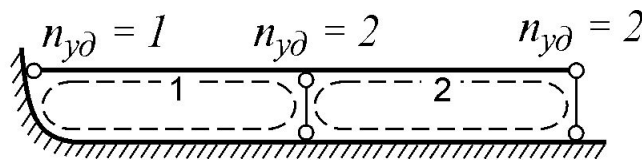
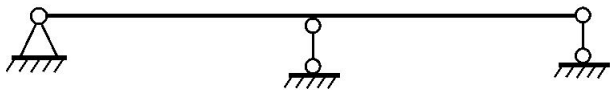
Степень статической неопределимости фермы определяется по формуле  $n = -W = n_C + n_{C_0} - 2n_Y.$

Получим другую формулу. Для этого введем два понятия:

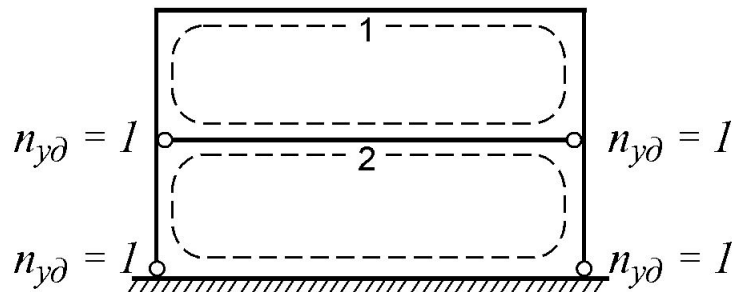
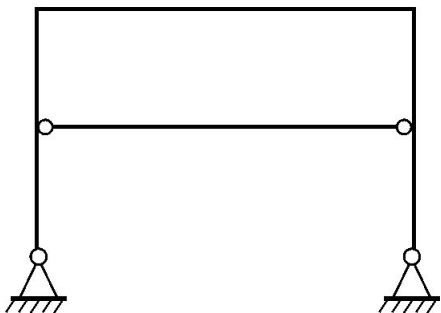
- **замкнутый контур** – замкнутая цепь из элементов и связей;
- **удалённая связь** – связь замкнутого контура, исключенная из жесткого соединения элементов.

Степень статической неопределимости сплошного замкнутого контура равна трем. Поэтому степень статической неопределимости системы из  $n_k$  замкнутых контуров, из которых удалены  $n_{уд}$  связей, будет

$$n = 3n_k - n_{уд}.$$



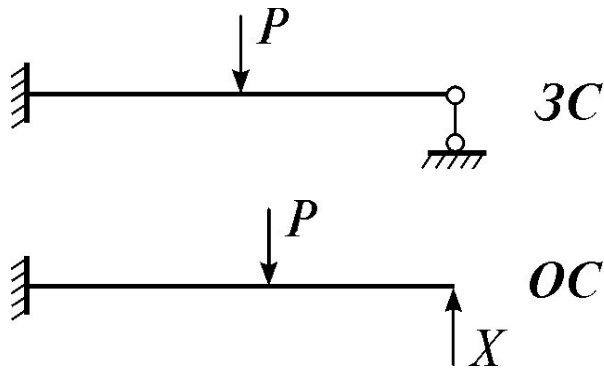
Для балки:  
 $n = 3 \cdot 2 - 5 = 1$



Для рамы:  
 $n = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ .

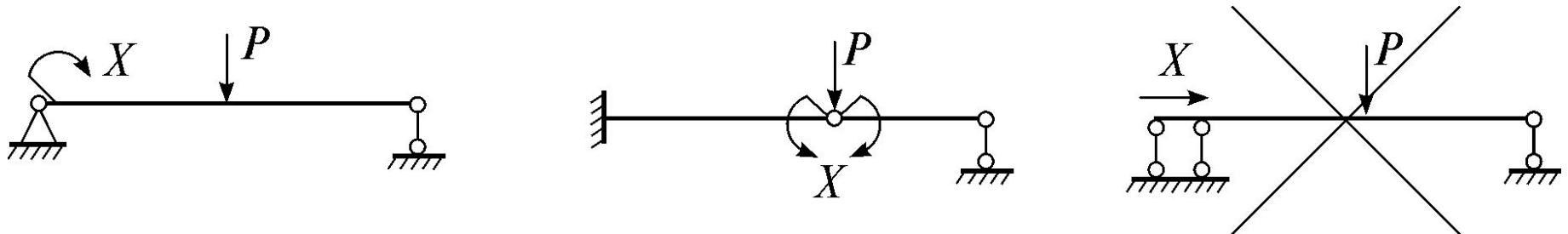
## 2. Выбор основной системы

Расчет статически неопределимой системы начинается с превращения ее в статически определимую. Для этого необходимо исключить лишние связи и заменить их реакции неизвестными силами. Полученная система называется **основной системой (ОС)**.



У этой балки, которую будем называть заданной системой (**ЗС**), степень статической неопределимости  $n=1$ . Если исключить лишнюю связь (правую опору) и обозначить неизвестную реакцию через  $X$ , получим ее ОС.

Способов исключения лишних связей очень много (теоретически – бесконечное число). Например, лишнюю связь можно исключать как на следующих рисунках. Одна из этих схем ГНС и для дальнейшего расчета непригодна. Все остальные схемы могут быть приняты за ОС.



В расчетах линейно-упругих систем используется гипотеза о том, что внешняя нагрузка в элементах заданной системы распределяется единственным образом.

Следовательно, результаты расчетов по различным ОС должны быть одинаковыми.

Однако объем вычислений в разных ОС может быть разным. Поэтому из многих вариантов ОС нужно выбирать наиболее оптимальную.

Например, в нашем примере первый вариант ОС предпочтительнее остальных, т.к. в ней эпюры строятся легче.

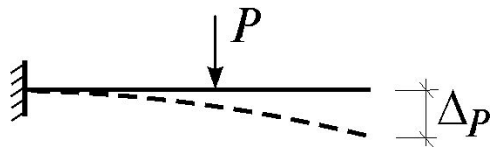
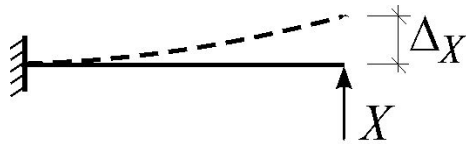
### **Основная система должна быть:**

- обязательно геометрически неизменяемой;
- простой для расчета;
- учитывать характерные особенности сооружения и нагрузки.

### 3. Сущность метода сил

В этом методе за основные неизвестные принимаются силы (внутренние усилия). Поэтому его называют **методом сил**.

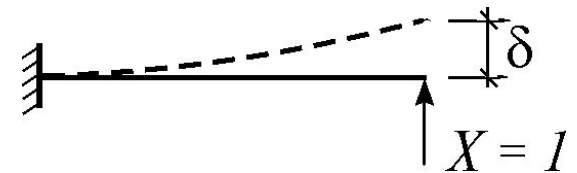
Рассмотрим предыдущую балку и потребуем, чтобы ЗС и ее ОС были эквивалентными. Для этого перемещение в направлении исключенной связи в ОС должно равняться нулю:  $\Delta=0$ .



По принципу суперпозиции, перемещение  $\Delta$  равно сумме перемещения  $\Delta_X$  от реакции  $X$  и перемещения  $\Delta_P$  от заданной силы  $P$ :

$$\Delta = \Delta_X + \Delta_P = 0.$$

Т.к. сила  $X$  неизвестна,  $\Delta_X$  определить нельзя. Поэтому рассмотрим единичное состояние (ЕС) основной системы, где действует только единичная сила  $P=1$ .



Перемещение  $\delta$  от единичной силы называется **податливостью**.

В линейно-упругой системе выполняется условие  $\Delta_X = \delta X$ .

Тогда получаем **каноническое уравнение метода сил**:

$$\delta X + \Delta_P = 0.$$

Из него определяется неизвестная сила:  $X = -\Delta_P / \delta$ .

Если в системе имеется  $n$  лишних связей, то они исключаются и выбирается ОС с  $n$  неизвестными  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Из условий эквивалентности ЗС и ее ОС составляются  $n$  уравнений совместности деформаций. При рассмотрении  $n$  единичных состояний основной системы эти уравнения приводятся к системе уравнений:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0,$$

.....

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0.$$

**– система  
канонических  
уравнений  
метода сил**

Здесь  $\delta_{ii}$  – главные коэффициенты  $\delta_{ij}$  – боковые коэффициенты,  $\Delta_{iP}$  – грузовые коэффициенты. Введем матричные обозначения:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \dots & \boxtimes \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \boxtimes & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \boxtimes \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \Delta_P = \begin{bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \boxtimes \\ \Delta_{nP} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxtimes \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**матр. податливости**

**вект. неизв.**

**вект. нагр.**

**нуль-вект.**

Тогда система канонических уравнений примет вид

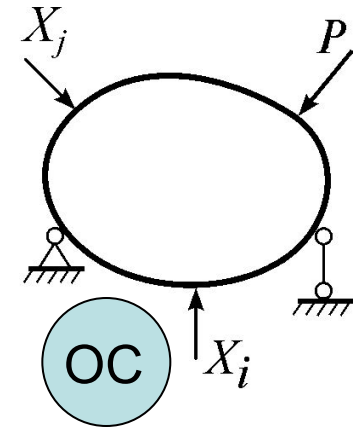
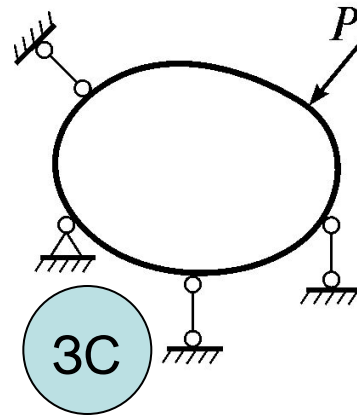
$$\delta \mathbf{X} + \Delta_P = \mathbf{0}.$$

Из нее  $\mathbf{X} = -\delta^{-1} \Delta_P$ , где  $\delta^{-1}$  – обратная матрица податливости.

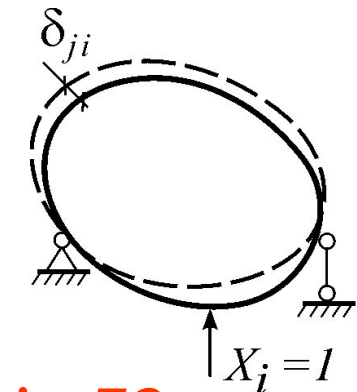
## 4. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты при неизвестных  $\delta_{ij}$  и грузовые коэффициенты  $\Delta_{iP}$  системы канонических уравнений – возможные перемещения от единичных сил и нагрузки. У них есть два индекса. Первый индекс  $i$  указывает на направление, а второй индекс  $j$  (или  $P$ ) – на причину.

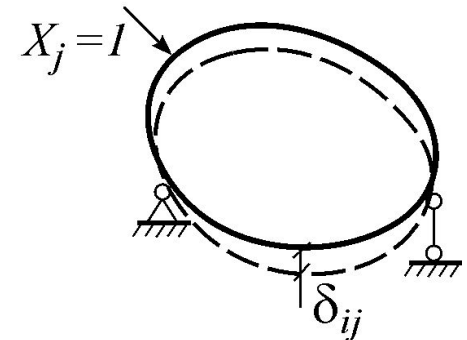
Рассмотрим условную статически неопределимую систему (ЗС) и ее основную систему (ОС):



Затем рассмотрим два единичных состояния ОС, в которых действуют только единичные силы:



***i-е ЕС***



***j-е ЕС***



Если в этих состояниях возникают внутренние усилия  $\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$  и  $\overline{M}_j, \overline{Q}_j, \overline{N}_j$ , то возможная работа сил  $i$ -го состояния на деформациях  $j$ -го состояния будет

$$-V_{ij} = \sum \int \left( \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} + \mu \frac{\overline{Q}_i \overline{Q}_j}{GF} + \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EF} \right) dx.$$

С другой стороны, возможная работа внешних сил  $i$ -го состояния на перемещениях  $j$ -го состояния равна

$$W_{ij} = 1 \cdot \delta_{ij} = \delta_{ij}.$$

По принципу возможных перемещений  $W_{ij} = -V_{ij}$ . Из их равенства получаем

$$\delta_{ij} = \sum \int \left( \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} + \mu \frac{\overline{Q}_i \overline{Q}_j}{GF} + \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EF} \right) dx. \quad \text{— формула вычисления коэффициентов при неизвестных}$$

**Теорема Максвелла.** Перемещение в  $i$ -ом направлении от единичной силы в  $j$ -ом направлении равно перемещению в  $j$ -ом направлении от единичной силы в  $i$ -ом направлении, т.е.  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

**Доказательство.** Возможную работу сил  $i$ -го единичного состояния на перемещениях  $j$ -го состояния мы уже определили:

$$W_{ij} = \delta_{ij}$$

А возможная работа сил  $j$ -ого состояния на перемещениях  $i$ -го состояния равна (см. рис.):

$$W_{ji} = 1 \cdot \delta_{ji} = \delta_{ji}$$

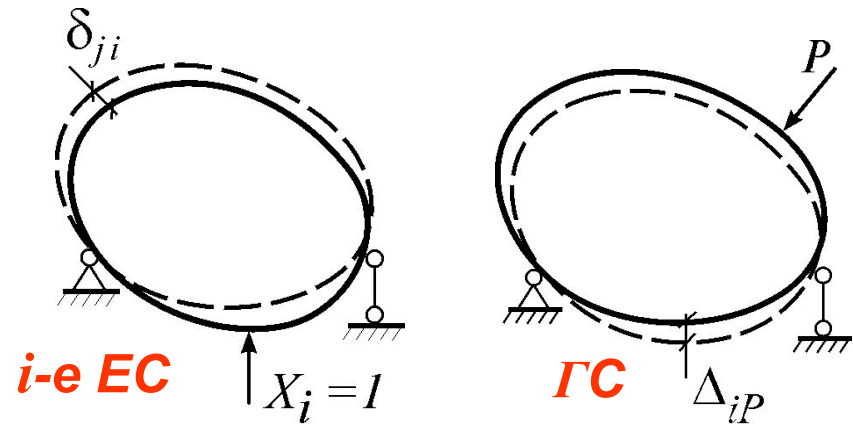
По теореме Бетти  $W_{ij} = W_{ji}$ . Следовательно,

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

Эта теорема позволяет уменьшать объем вычислений при вычислении боковых коэффициентов системы канонических уравнений.

Выведем формулу вычисления грузовых коэффициентов.

Для этого рассмотрим  $i$ -е единичное состояние и грузовое состояние (ГС) основной системы:



Возможная работа сил ЕС на перемещениях ГС равна:

$$W_{iP} = 1 \cdot \Delta_{iP} = \Delta_{iP}.$$

С другой стороны, возможная работа внутренних сил  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $\bar{N}_i$   $i$ -го единичного состояния на деформациях грузового состояния равна:

$$-V_{iP} = \sum \int \left( \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} \right) dx.$$

По принципу возможных перемещений  $W_{iP} = -V_{iP}$ . Отсюда

$$\Delta_{iP} = \sum \int \left( \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} \right) dx. \quad \text{— формула вычисления грузовых коэффициентов}$$

В рамах и балках перемещения определяются в основном изгибными деформациями. Поэтому коэффициенты канонических уравнений можно вычислять по сокращенным формулам:

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_j ,$$

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} dx = \overline{M}_i \otimes M_P .$$

Здесь знак  $\otimes$  использован для сокращения записи формулы вычисления интеграла Мора и означает условное «произведение» двух эпюр.