ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА УПРУГИХ СИСТЕМ

1. Из курса общей физики известно $W = \bar{P} \cdot \bar{f} \left(dW = \bar{P} \cdot d\bar{f};\ \delta W = \bar{P} \cdot \delta \bar{f} \right)$
2. Принцип независимости действия сил (принцип наложения)
$$f_i = \boldsymbol{\lambda}_{1i} P_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_{1n} P_n$$
3. Закон Гука для деформаций.
4. Геометрически линейные и нелинейные системы.

1.ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ

1.1 РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) СТЕРЖНЯ

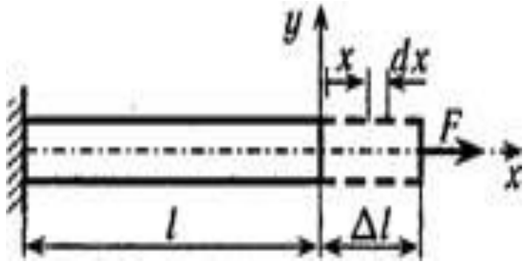


Рис.а

$$U = W \qquad \Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

$$F(x) = \frac{EA}{l} x \quad dW = F(x)dx$$

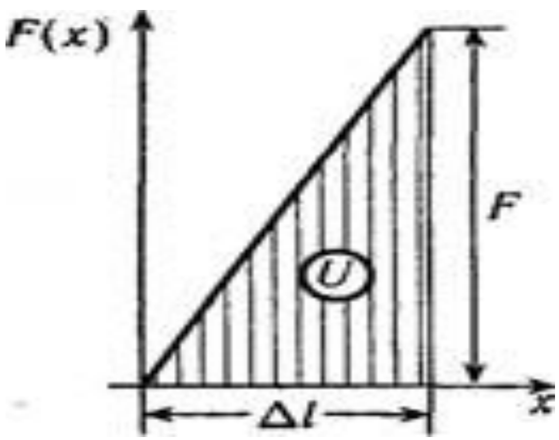
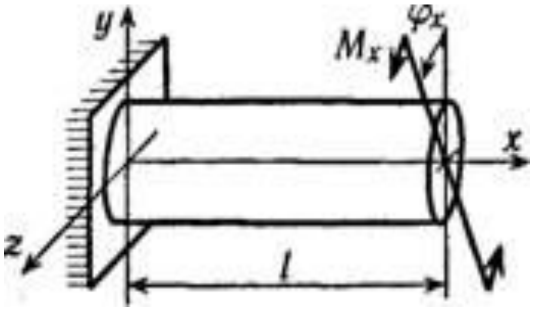


Рис. *б*.

$$W = U = \int_0^{\Delta l} F(x)dx = \frac{EA}{l}\int_0^{\Delta l} x dx = \frac{EA}{2l}(\Delta l)^2$$

$$W = U = \frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{l}\cdot(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{EA}\cdot F^2 = \frac{1}{2}F\Delta l$$

1.2 КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ



$$\varphi_x = \frac{M_x l}{G I_k}$$

Аналогично (1)

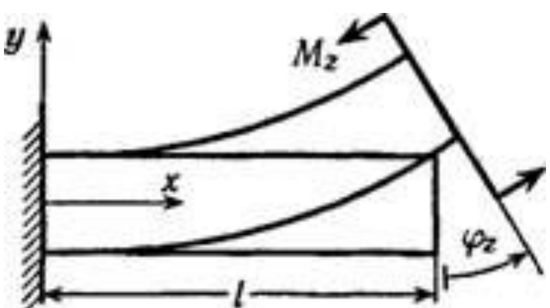
Рис. *а*.

$$U = W = \frac{1}{2} M_x \varphi_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{G I_k} \cdot M_x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G I_k}{l} \cdot \varphi_x^2 \quad (2)$$

1.3 ИЗГИБ

1.3.1 ПЛОСКИЙ ЧИСТЫЙ ИЗГИБ

б)



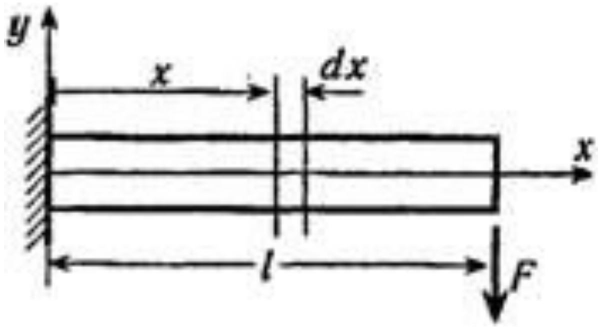
$$\varphi_z = \frac{M_z l}{E I_z}$$

Аналогично (2)

Рис. *б*.

$$U = W = \frac{1}{2} M_z \varphi_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{E I_z} \cdot M_x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{E I_z}{l} \cdot \varphi_z^2 \quad (3)$$

1.3.2 ПЛОСКИЙ ИЗГИБ



$M_z(x) \neq \text{const.}$

Соотношение (3) применимо к участку длинной dx

$$dU = dW = \frac{M_z^2}{EI_z} dx$$

$$U = W = \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z}$$

Вклад в потенциальную энергию упругой деформации вносит поперечная сила Q_y

$$U = W = \int_l \frac{k_y Q_y dx}{2GA}$$

где k_y – коэффициент формы поперечного сечения балки.

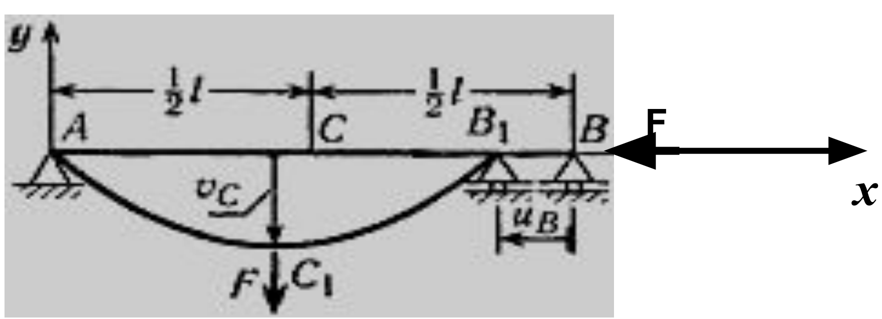
В случае сложного изгиба с кручением и растяжением-сжатием

$$U = W = \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} + \int_l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \int_l \frac{M_x^2 dx}{2GI_k} +$$

$$+ \int_l \frac{N_x^2 dx}{2EA} + \int_l \frac{k_y Q_y^2 dx}{2EA} + \int_l \frac{k_z Q_z^2 dx}{2EA}$$

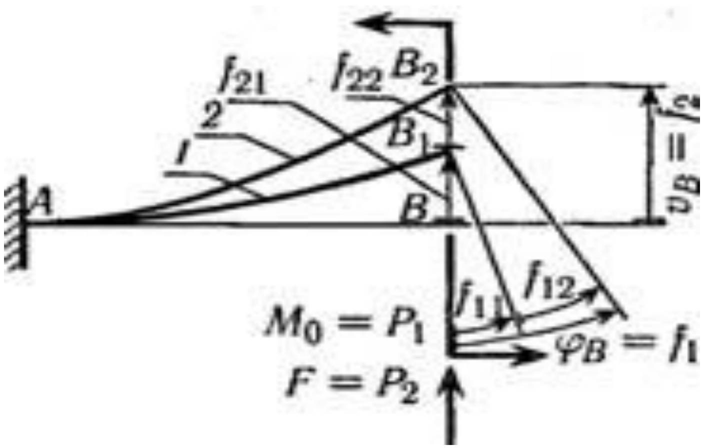
2. ЛИНЕЙНО УПРУГИЕ СИСТЕМЫ. ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ



$$EI_z y'' = M_z$$

$$M_z(x) = \cdots + Fy(x)$$



Приложен момент M_0 (положение 1).

затем – сила F (положение 2).

Обобщённые силы

$$P_1 = M_0, \quad P_2 = F,$$

Обобщённые перемещения

$$\boldsymbol{f_1 = \varphi_B \qquad f_2 = v_B}$$

$$f_1 = f_{11} + f_{12},$$

$$f_2 = f_{21} + f_{22},$$

f_{11} и f_{12} – перемещения в первом направлении (первый индекс)

под действием сил P_1 и P_2,*(второй индекс)*;

f_{21} и f_{22} – перемещения во втором направлении (первый индекс)

под действием сил P_1 и P_2.*(второй индекс)*.

Коэффициенты податливости

$$\lambda_{11} = \frac{f_{11}}{P_1}, \quad \lambda_{12} = \frac{f_{12}}{P_2}, \quad \lambda_{21} = \frac{f_{21}}{P_1}, \quad \lambda_{22} = \frac{f_{22}}{P_2}.$$

$$\begin{cases} f_1 = f_{11} + f_{12} = \lambda_{11} P_1 + \lambda_{12} P_2, \\ f_2 = f_{21} + f_{22} = \lambda_{21} P_1 + \lambda_{22} P_2. \end{cases}$$

При действии *n* обобщённых сил (закон Гука для перемещений)

$$\begin{cases} f_1 = \lambda_{11} P_1 + \ldots + \lambda_{1i} P_i + \ldots + \lambda_{1n} P_n, \\ f_2 = \lambda_{21} P_1 + \ldots + \lambda_{2i} P_i + \ldots + \lambda_{2n} P_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n = \lambda_{n1} P_1 + \ldots + \lambda_{ni} P_i + \ldots + \lambda_{nn} P_n. \end{cases}$$

Далее будет доказано: $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$

3.ТЕОРЕМА КЛАЙПЕРОНА

Работа внешних сил не зависит от порядка их приложения

(
1)

$$W_1 = \frac{1}{2}P_1 f_{11} = \frac{1}{2}P_1^2\lambda_{11}$$

$$\lambda_{11} = \frac{f_{11}}{P_1}$$ (2)

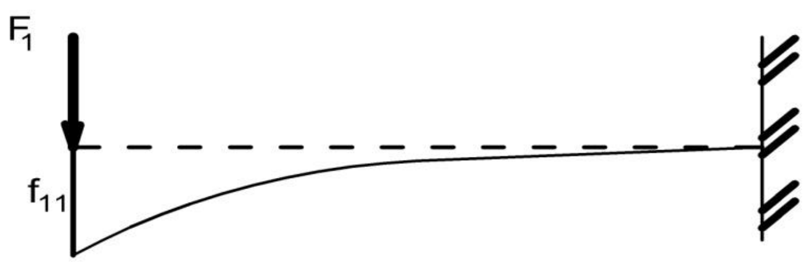
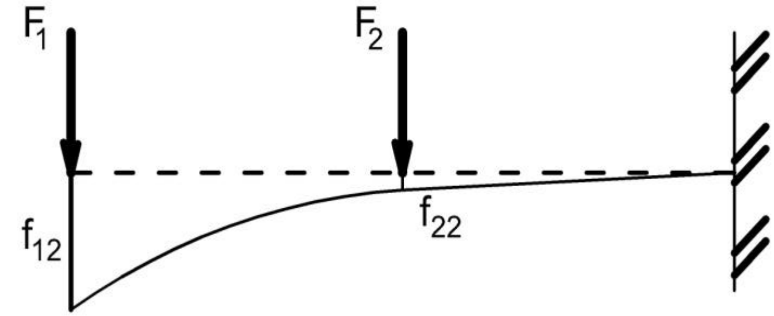


Рис. 1

$P_1 = F_1$



$P_1 = F_1$

$P_2 = F_2$

Рис.
2

$$W_2 = \frac{1}{2}P_2 f_{22} + P_1 f_{12} = \frac{1}{2}P_2^2\lambda_{22} + P_2 P_1 \lambda_{12} \tag{3}$$

$$\lambda_{12} = \frac{f_{12}}{P_2} \qquad \lambda_{22} = \frac{f_{22}}{P_2} \tag{4}$$

Рис. 3

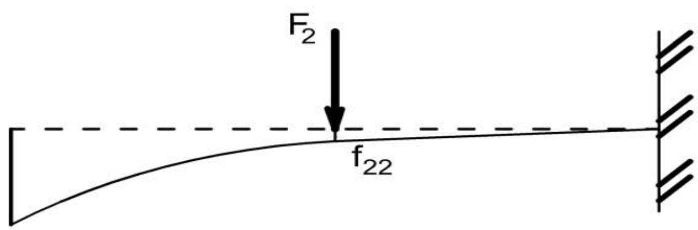
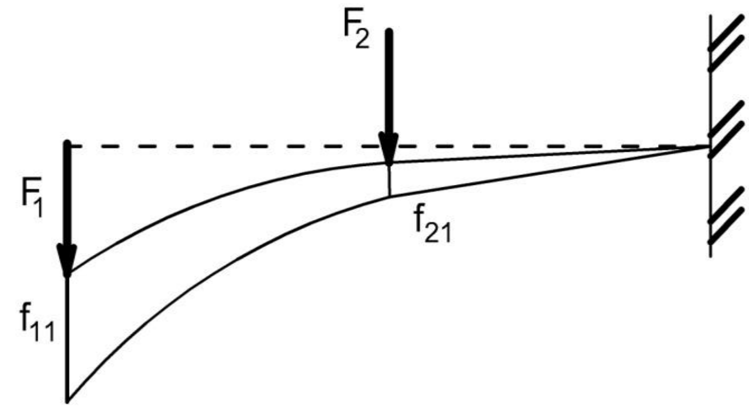


Рис. 4



$$W' = W_1 + W_2$$

$$W' = \frac{1}{2}P_1 f_{11} + P_1 f_{12} + \frac{1}{2}P_2 f_{22} = \frac{1}{2}P_1^2\lambda_{11} + P_1 P_2\lambda_{12} + \frac{1}{2}P_2^2\lambda_{22}^2 \qquad (5)$$

$$W_3 = \frac{1}{2} P_2 f_{22} = \frac{1}{2} P_2^2 \lambda_{22} \qquad (6)$$

$$W_4 = \frac{1}{2} P_1 f_{11} + P_2 f_{21} = \frac{1}{2} P_1^2 \lambda_{11} + P_2 P_1 \lambda_{21} \qquad (7)$$

$$\lambda_{21} = \frac{f_{21}}{P_1} \qquad (8)$$

$$W'' = W_3 + W_4 = \frac{1}{2} P_2^2 \lambda_{22} + P_2 P_1 \lambda_{21} + \frac{1}{2} P_1^2 \lambda_{11} \qquad (9)$$

$$W = W' = W'' \Rightarrow \frac{1}{2} P_1^2 \lambda_{11} + P_1 P_2 \lambda_{12} + \frac{1}{2} P_2^2 \lambda_{22} =$$

$$= \frac{1}{2} P_2^2 \lambda_{22} + P_2 P_1 \lambda_{21} + \frac{1}{2} P_1^2 \lambda_{11} \qquad (10)$$

$$\Rightarrow \lambda_{12} = \lambda_{21} \qquad (11)$$

Теорема взаимности перемещений: перемещение, создаваемое обобщенной силой $P_i = 1$ по направлению P_J численно равно перемещению, создаваемому обобщенной силой $P_J = 1$ по направлению P_i.

$$(11) \to (10) \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}P_1^2\lambda_{11} + \frac{1}{2}P_1P_2\lambda_{12} + \frac{1}{2}P_1P_2\lambda_{12} + \frac{1}{2}P_2^2\lambda_{22} =$$
$$= \frac{1}{2}P_1^2\frac{f_{11}}{P_1} + \frac{1}{2}P_1P_2\frac{f_{12}}{P_2} + \frac{1}{2}P_1P_2\frac{f_{12}}{P_2} + \frac{1}{2}P_2^2\frac{f_{22}}{P_2} = \qquad (12)$$
$$= \frac{1}{2}P_1(f_{11} + f_{12}) + \frac{1}{2}P_2(f_{21} + f_{22}) = \frac{1}{2}P_1f_1 + \frac{1}{2}P_2f_2$$

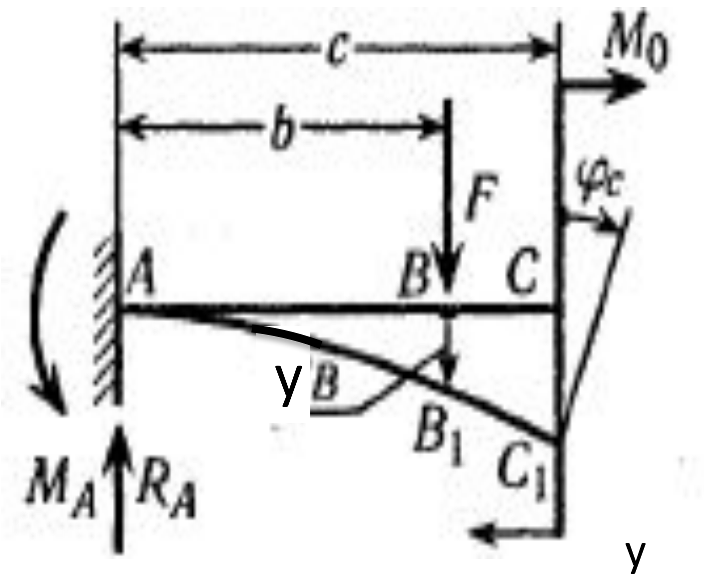
Теорема Клайперона

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i f_i \qquad (13)$$

Потенциальная энергия линейной упруго-деформируемой системы равна половине суммы произведений обобщенных сил на соответствующие обобщенные перемещения

4.Обобщенные силы и обобщенные перемещения

$$W = U = \frac{1}{2} F y_B + \frac{1}{2} M_0 \varphi_c \quad (1)$$



$$F = P, \qquad M_0 = aP \quad (2)$$

$$W = U = \frac{1}{2} P y_B + \frac{1}{2} P a \varphi_c \quad (3)$$

$$W = U = \frac{1}{2} P (y_B + a\varphi_c) \quad (4)$$

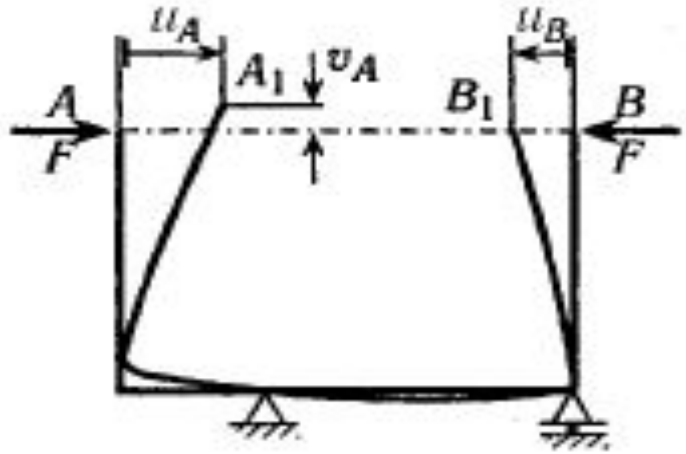
$$f = y_B + a\varphi_c \quad (5)$$

$$W = U = \frac{1}{2} P f \quad (6)$$

Пример Р характеризует систему взаимно уравновешенных сил:

$$F = P, \qquad M_0 = aP, \qquad R_A = P, \qquad M_A = bP + aP. \quad (7)$$

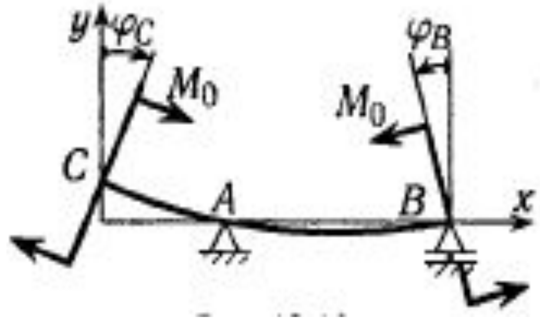
В качестве обобщенной силы может быть принят любой параметр, характеризующий уравновешенную группу сил; при этом обобщенным перемещением надлежит считать другой множитель (см. (6)), входящий в выражение для работы (потенциальной энергии)



Обобщенная сила P=F следовательно обобщенное перемещение,

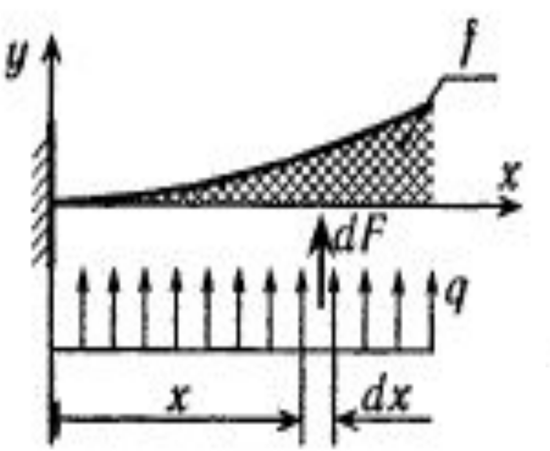
$$f = (u_A + u_B)$$

т.е. сближение точек приложения сил F.



$$U = W = \frac{1}{2}M_0\varphi_C + \frac{1}{2}M_0\varphi_B = \frac{1}{2}M_0(\varphi_C + \varphi_B). \qquad (8)$$

$$dF = q\,dx. \qquad (9)$$



$$dW = \frac{1}{2}v\,dF = \frac{1}{2}vq\,dx. \qquad (10)$$

$$W = U = \int_l \frac{1}{2}vq\,dx = \frac{1}{2}q\int_l v\,dx. \qquad (11)$$

$$f = \int_l v\,dx. \qquad (12)$$

5.ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

$$dW = F(x)\,dx. \tag{1}$$

Если $F = P \rightarrow$ $dW = P\,df.$ (2)

$$dU = P\,df \tag{3}$$

$$P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n, \tag{4}$$

$$f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots, f_n. \tag{5}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial U}{\partial f_2} df_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial f_i} df_i + \cdots + \frac{\partial U}{\partial f_n} df_n. \tag{6}$$

$$df_i \neq 0; \quad (f_j = 0; \; j = 1 \dots n_i; \; j \neq i)$$

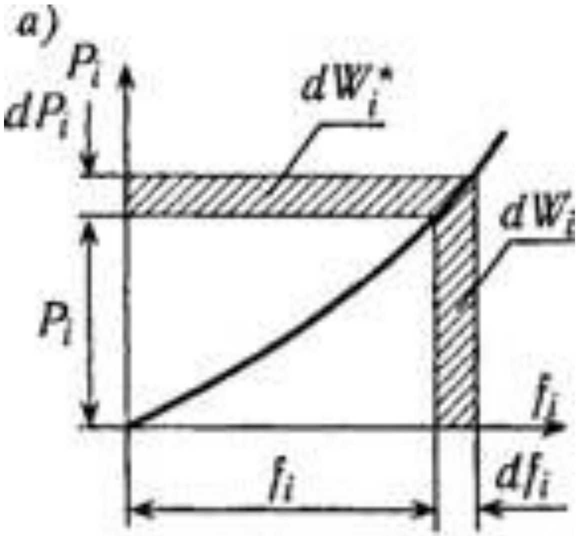
$$dU = \frac{\partial U}{\partial f_i} df_i, \qquad (7)$$

$$dU = P_i df_i. \qquad (8)$$

$$\rightarrow (3) \Rightarrow \qquad P_i = \frac{\partial U}{\partial f_i}. \qquad (9)$$

Теорема Л. Лагранжа:
Обобщенная сила равна частной производной от потенциальной энергии упругой деформации системы по соответствующему обобщенному перемещению.

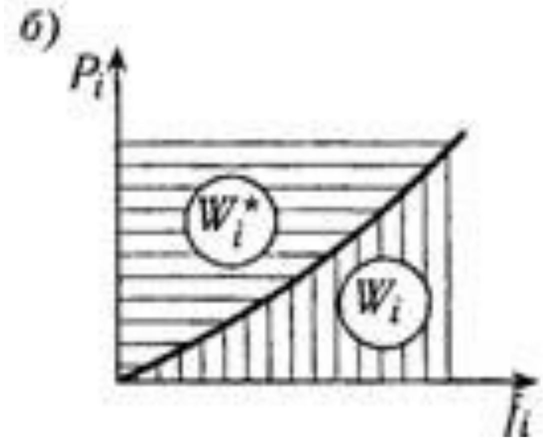
ТЕОРЕМА КАСТИЛЬЯНО



$$P_i = P_i\left(f_i\right) \qquad (1)$$

Вертикальная заштрихованная полоса иллюстрирует приращения работы (приращения потенциальной энергии)

$$dW_i = dU_i = P_i df_i \qquad (2)$$



Работа (потенциальная энергия)

$$W_i = U_i = \int_0^{f_i} P_i df_i \qquad (3)$$

Вводится понятие приращения *дополнительной работы* (*дополнительной энергии*)

$$dW_i^* = dU_i^* = f_i dP_i \qquad (4)$$

горизонтальная заштрихованная полоса (рис. *а.)* - *дополнительная работа* (*дополнительная энергия*)

$$W_i^* = U_i^* = \int_0^{P_i} f_i dP_i \qquad (5)$$

См. рисунок

$$W_i^* + W_i = P_i f_i \qquad (6)$$

Если на упругую систему действуют *n* сил, то полный дифференциал дополнительной потенциальной энергии принимает вид

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_1} dP_1 + \ldots + \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i + \ldots + \frac{\partial U^*}{\partial P_n} dP_n \tag{7}$$

Если $dP_i \neq 0$, а все остальные приращения сил равны нулю

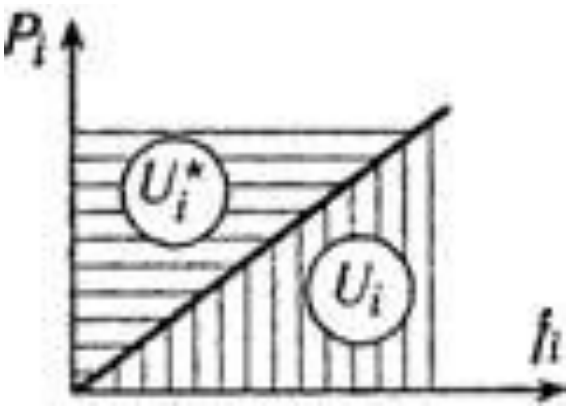
$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i \tag{8}$$

(4), (8) $\Longrightarrow$

$$f_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \tag{9}$$

частная производная от дополнительной энергии U^* по обобщённой силе P_i равна обобщённому перемещению f_i, соответствующему этой силе

Для линейных систем $$U^* = U \qquad (10)$$



$$(9),(10) \Longrightarrow \quad f_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \qquad (11)$$

Частная производная от потенциальной энергии упругой деформации *U* по обобщённой силе P_i равна соответствующему обобщённому перемещению f_i.

В случае плоского изгиба

$$f_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} \tag{12}$$

Величины P_i и x взаимно независимы, операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами

$$f_i = \int_l \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\frac{M_z^2 dx}{2EI_z} \right) \tag{13}$$

Множитель $dx/2EI_z$ не зависит от силы P_i

$$f_i = \int_l \frac{dx}{2EI_z} \frac{\partial}{\partial P_i} \left(M_z^2 \right) \tag{14}$$

Дифференцирование сложной функции

$$f_i = \int_l \frac{M_z}{EI_z} \frac{\partial M_z}{\partial P_i} dx \qquad (15)$$

$$\text{если} EI_z = const(x)$$

$$f_i = \frac{1}{EI_z} \int_l M_z \frac{dM_z}{dP_i} dx \qquad (16)$$

Для изгиба с кручением, растяжением-сжатием и сдвигом по аналогии

$$f_i = \int_l \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_i} dx + \int_l \frac{M_z}{EI_z} \frac{\partial M_z}{\partial P_i} dx + \int_l \frac{M_x}{GI_k} \frac{\partial M_x}{\partial P_i} dx +$$

$$+ \int_l \frac{N_x}{EA} \frac{\partial N_x}{\partial P_i} dx + \int_l \frac{k_y Q_y}{GA} \frac{\partial Q_y}{\partial P_i} dx + \int_l \frac{k_z Q_z}{GA} \frac{\partial Q_z}{\partial P_i} dx \qquad (17)$$

а)

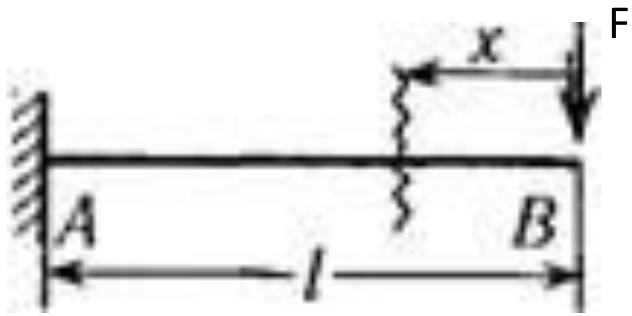


Рис. а. Определить вертикальное перемещение y_B сечения *B.*

Сила *F* и перемещение y_B образуют комбинацию *обобщённая сила – обобщённое перемещение.*

$$EI_z = const.$$

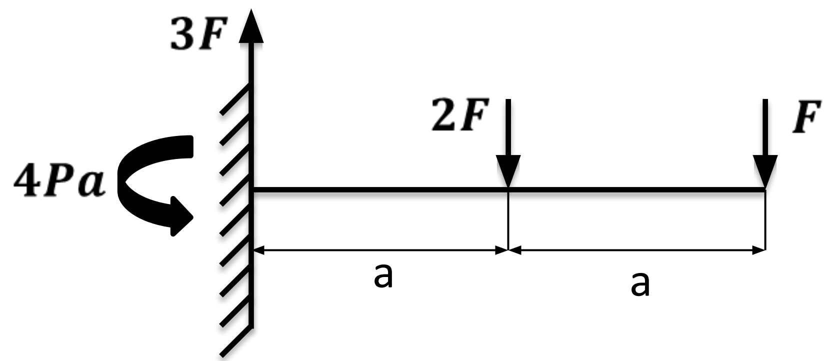
$$0 \le x \le l \qquad\qquad M_z = -Fx;$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial F} = -x;$$

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{EI_z}\int_0^l M_z \frac{\partial M_z}{\partial F}dx = \frac{1}{EI_z}\int_0^l (-Fx)(-x)dx = \frac{Fl^3}{3EI_z} \qquad (18)$$

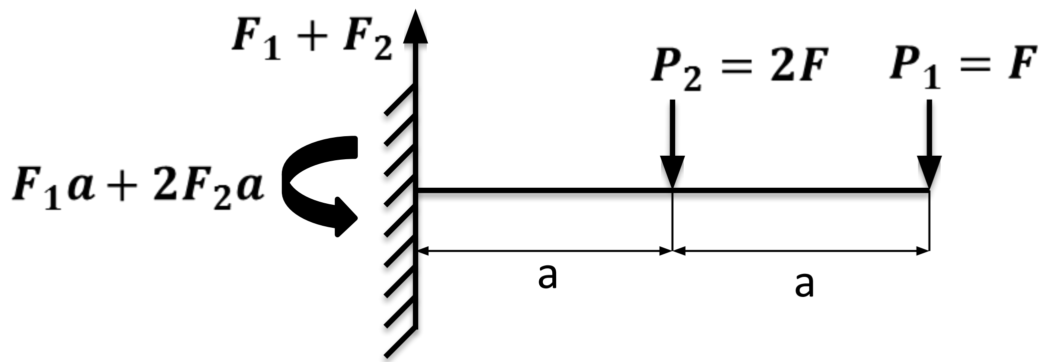
$$\mathrm{P} = F$$

$$\mathrm{d}U = 2Fdf_1 + Fdf_2 = F(2df_1 + df_2)$$



$$\mathrm{d}U = Pdf \Rightarrow \mathrm{d}f = d(2f_1 + f_2)$$

$$f = 2f_1 + f_2\,; \quad f_1\text{-?} \quad f_2\text{-?}$$



Две системы:

$$\mathbf{d}U = P_1 df_1 + P_2 df_2$$

++

Силовые факторы связаны с P_1 и P_2

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = f_1$$

$$f_1 = \frac{1}{EJ}\left[\int_0^a P_1 x \cdot x dx + \int_0^a [P_2 x + P_1(a + x)](a + x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[P_1 \frac{a^3}{3} + P_2\left(a\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}\right) + P_1\left(a^3 + 2a\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}\right)\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = f_2$$

$$f_2 = \frac{1}{EJ}\left[\int_0^a P_1 x \cdot 0 dx + \int_0^a [P_2 x + P_1(a + x)]x dx\right] = \ \dots$$

б)

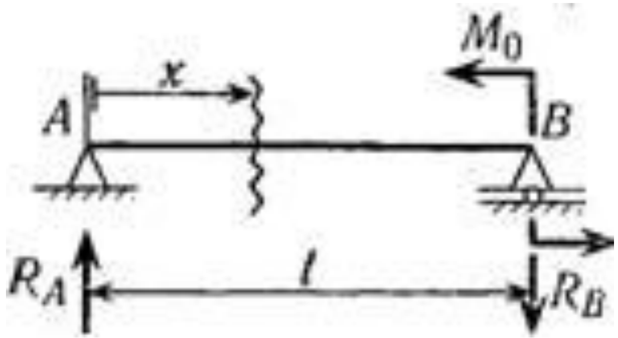


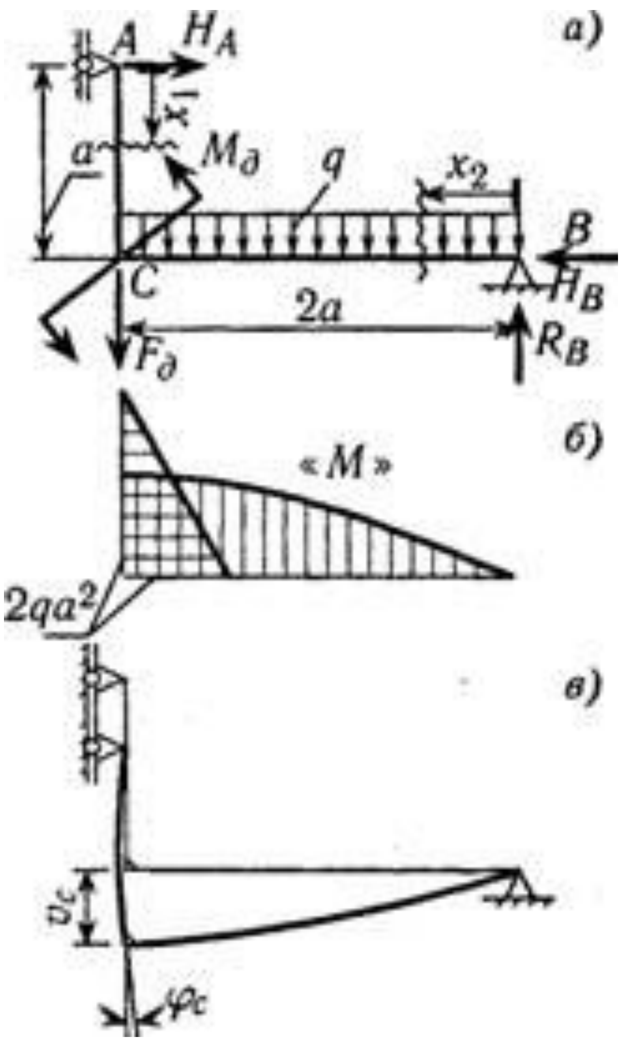
Рис. б. Определить угол поворота φ_B сечения *B*.

M_0 и φ_B представляют собой комбинацию *обобщённая сила – обобщённое перемещение.* Обобщённая сила – это параметр, характеризующий уравновешенную группу сил, следует выразить реакции через M_0 из уравнений равновесия $(M_0 - R_B l = 0; R_A - R_B = 0)$

$$R_A = R_B = \frac{M_0}{l} \tag{19}$$

$$0 \le x \le l; \qquad M_z = R_A x = \frac{M_0}{l} x; \qquad \frac{\partial M_z}{\partial M_0} = \frac{x}{l};$$

$$\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{1}{EI_z}\int_0^l M_z \frac{\partial M_z}{\partial M_0} dx = \frac{1}{EI_z}\int_0^l \left(\frac{M_0}{l} x\right)\left(\frac{x}{l}\right) dx = \frac{M_0 l}{3EI_z} \tag{20}$$



Реакции, эпюра изгибающего момента, примерный вид изогнутой оси, вертикальное смещение v_C, и угол φ_C - ?

Из уравнений равновесия:

$$H_A = 2qa \qquad R_B = 2qa \qquad H_B = 2qa$$

Рис. б. Эпюра изгибающих моментов.

Рис. в. Примерный вид изогнутой оси рамы с указанием v_C и φ_C.

Приложим в узле *C* вертикальную *добавочную силу* F_∂=0. Нулевая сила не влияет на напряжённо-деформированное состояние рамы. С v_C образует комбинацию *обобщённая сила – обобщённое перемещение.*

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_B = 0, \\ \sum F_y = R_B - F_\partial - 2qa = 0, \\ \sum M_{z(B)} = F_\partial \cdot 2a + 2qa^2 - H_A c \end{cases} \tag{21}$$

$$H_A = 2qa + 2F_\partial \qquad R_B = 2qa + F_\partial \qquad H_B = 2qa + 2F_\partial \tag{22}$$

По теореме Кастильяно:

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial F_\partial} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial F_\partial} dx + \int_0^{2a} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial F_\partial} dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^a (2qa + 2F_\partial)x \cdot (2x) \cdot dx + \int_0^{2a} \left((2qa + F_\partial)x - \frac{1}{2}qx^2\right) \cdot x \cdot dx\right\} = \frac{14qa^4}{2EI} \tag{23}$$

Приложим в узле *C* *добавочный момент* $M_\partial = 0$. Он образует с углом φ_C комбинацию *обобщённая сила – обобщённое перемещение*

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_B = 0, \\ \sum F_y = R_B - 2qa = 0, \\ \sum M_{z(B)} = M_\partial + 2qa^2 - H_A \cdot a = 0, \end{cases} \tag{24}$$

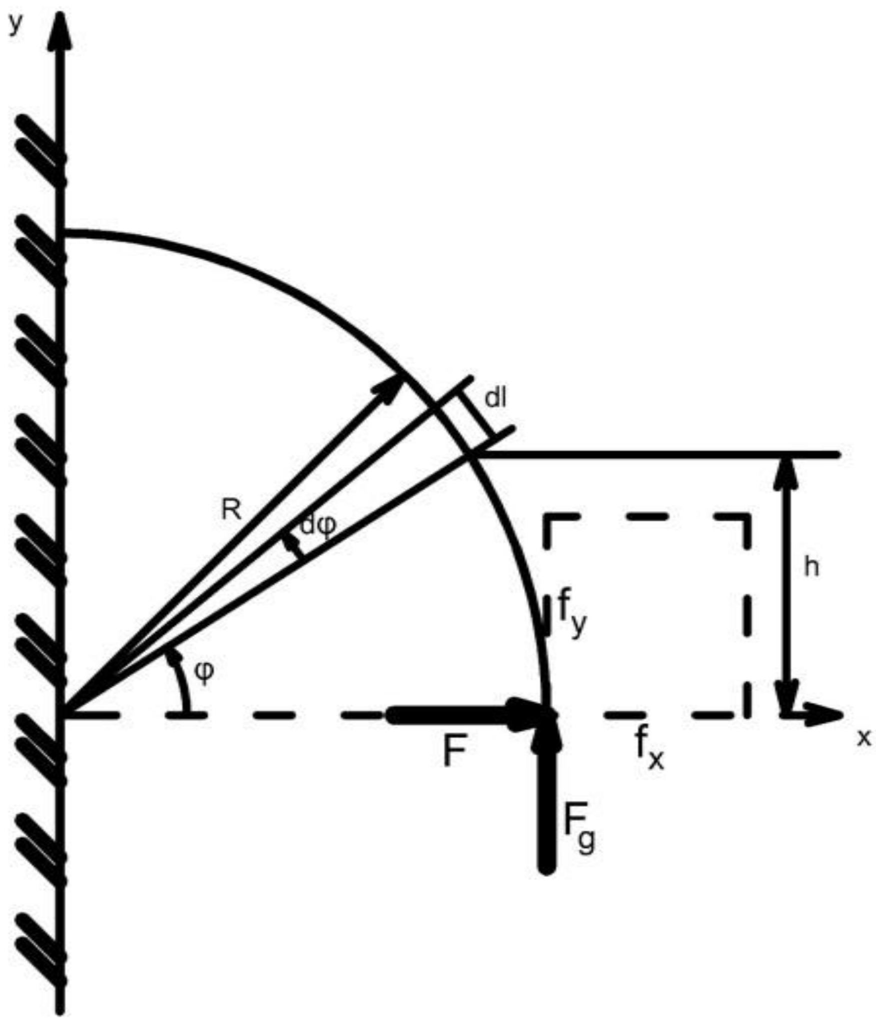
$$H_A = 2qa + \frac{M_\partial}{a} \qquad R_B = 2qa \qquad H_B = 2qa + \frac{M_\partial}{a} \tag{25}$$

По теореме Кастильяно:

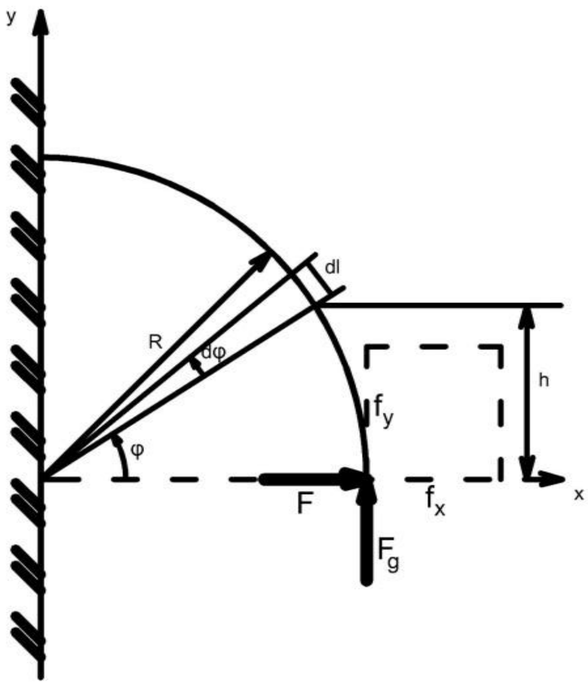
$$R_B \neq B_B(M_q) \to (16) \Rightarrow$$

$$\varphi_C = \frac{\partial U}{\partial M_\partial} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial M_\partial} dx + \int_0^{2a} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial M_\partial} dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^a \left(2qa + \frac{M_0}{a}\right) x \cdot \left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx + \int_0^{2a} \left((2qa)x - \frac{1}{2}qx^2\right) \cdot 0 \cdot dx\right\} = \frac{2qa^3}{3EI} \tag{26}$$



f - ?



$$f = \sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2} \qquad (1)$$

(2)

Правило знаков для изгибающих моментов: если силовой фактор увеличивает кривизну, то момент считается положительным, если уменьшает, то – отрицательным.

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ \mathrm{dl{=}Rd}\varphi;\ \mathrm{M{=}{-}Fh{=}{-}FRsin}\ \varphi; \qquad (3)$$

$$(3) \to (2) => f_x = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} FR^2 sin^2\varphi = \frac{FR^3}{EI}\frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

Для вычисления вертикальных перемещений приложим добавочную силу F_g , соответствующую f_y .

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_B = 0, \\ \sum F_y - F_\partial - 2qa = 0, \\ \sum M_{z(B)} = F_\partial \cdot 2a + 2qa^2 - H_A \cdot a = 0, \end{cases} \qquad (5)$$

$$\mathrm{M}=-\mathrm{FR}\sin\varphi - F_g R(1-\cos\varphi) \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial F_g} = -R(1-\cos\varphi) \qquad (7)$$

$$(6), (7) \rightarrow (5) \Rightarrow$$

π

$f_y =$

(8)

$$(4), (8) \rightarrow (1) \Rightarrow \mathrm{f} = \frac{FR^3}{EI}\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}} \qquad (9)$$

7.Формула Максвелла-Мора

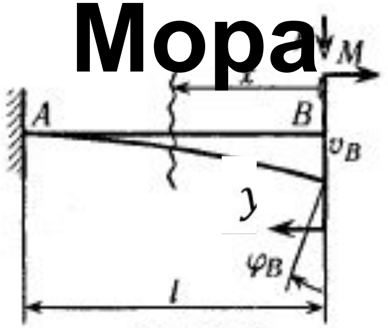


Рис. 13.17

$$y_B = ?$$
$$\varphi_B = ?$$

$$M_z = -Fx - M.$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial F} = -1 \cdot x,$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial M} = -1.$$

Эквивалентно

$$M_{1F} = -1 \cdot x,$$
$$M_{1M} = -1.$$

$$\rightarrow \quad f_i = \int_l \frac{M_z}{EI_z}\frac{\partial M_z}{\partial P_i}dx \qquad (15')$$

$$\Rightarrow \quad y_B = \int_l \frac{1}{EI_z} M M_{1F}\, dx,$$

$$\varphi_B = \int_l \frac{1}{EI_z} M M_{1M}\, dx$$

$$f = \int_l \frac{1}{EI_z} M M_1\, dx, \qquad (1)$$

$$f=\int_l \frac{M_y M_{y1}}{EI_y}dx+\int_l \frac{M_z M_{z1}}{EI_z}dx+\int_l \frac{M_x M_{x1}}{GI_k}dx+ \qquad (2)$$
$$+\int_l \frac{N_x N_{x1}}{EA}dx+\int_l \frac{k_y Q_y Q_{y1}}{GA}dx+\int_l \frac{k_z Q_z Q_{z1}}{GA}dx,$$

Дж. Максвелл и О. Мор

$$\int_a^b \psi(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left(\psi(a)+4\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)+\psi(b)\right). \qquad (3)$$

$$f=\int_0^l \frac{MM_1}{EI}dx=\frac{l}{6EI}(M^{\text{н}}M_1^{\text{н}}+4M^{\text{с}}M_1^{\text{с}}+M^{\text{к}}M_1^{\text{к}}), \qquad (4)$$

(4) верхние индексы $н$, $с$ и $к$ означают, что ординаты эпюр M и M_1 вычисляются в начале, середине и конце участка интегрирования длиной l (направление обхода произвольно).

равенство (3) является приближенным. Его применяют, если в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ функция $\psi(x)$ непрерывна и имеет непрерывную первую производную. Если функция $\psi(x)$ является полиномом степени не выше третьей, то равенство (3) является точным. Эти ограничения распространяются и на соотношение (4). В данном случае:

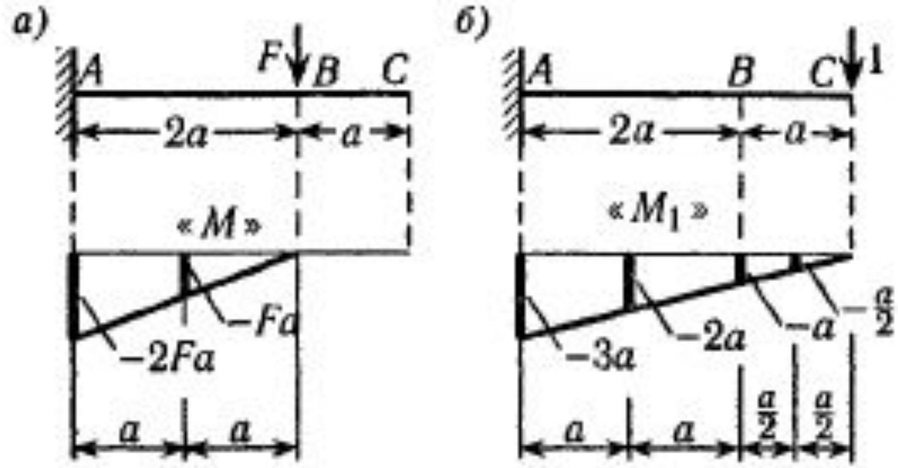
- рассматриваются лишь прямые стержни при $EI = \text{const}$;
- функция M — полином степени не выше второй;
- функция M_1 — полином степени не выше первой;
- эпюры M и M_1 не имеют скачков и изломов на рассматриваемом участке длиной l.

Три последних ограничения обеспечиваются следующими условиями:

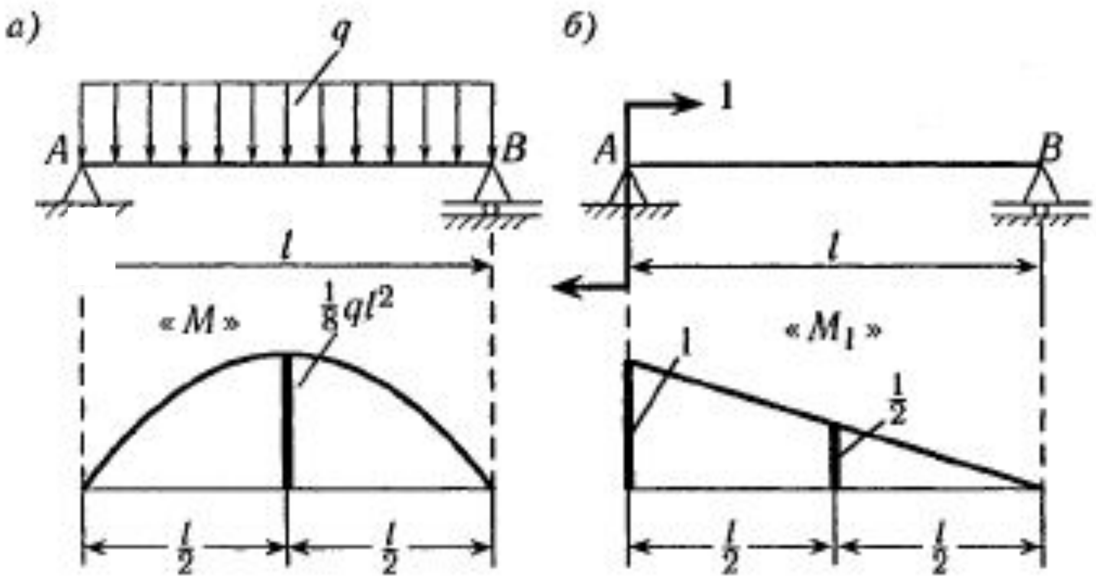
- внешняя нагрузка может быть представлена сосредоточенными силами и моментами, а также равномерно распределенной нагрузкой;
- единичная обобщенная сила является либо сосредоточенной силой, либо сосредоточенным моментом;
- границы участков интегрирования выбираются обычным в сопротивлении материалов образом: в местах, где приложены сосредоточенные силы или сосредоточенные моменты, где начинается (обрывается) распределенная нагрузка, где имеется излом оси рамы, т. е. там, где изменяется выражение для изгибающего момента.

алгоритм определения перемещения (обобщенного перемещения) по способу Максвелла–Мора:

- для балки или для рамы отыскиваются реакции в закреплениях при заданной нагрузке, после чего строится эпюра изгибающих моментов M;
- на эпюре M указываются значения моментов, соответствующие началу, середине и концу каждого из участков;
- для той же балки или для рамы находятся реакции в закреплениях при нагружении ее только единичной безразмерной силой (или единичным безразмерным моментом); эта единичная нагрузка прикладывается в том сечении и в том направлении, в котором требуется найти перемещение (обобщенное перемещение);
- после нахождения реакций строится эпюра изгибающих моментов M_1 от единичной нагрузки;
- на каждом из участков эпюры M_1 указываются значения моментов, отвечающие его началу, середине и концу;
- далее на каждом из участков «перемножаются» эпюры M и M_1 по формуле Симпсона;
- наконец, суммируются результаты «перемножения» эпюр M и M_1; такое суммирование по всем участкам балки или рамы даст искомое перемещение (обобщенное перемещение).



$$y_B = \frac{2a}{6EI}\left(0\cdot(-a) + 4(-Fa)(-2a) + (-2Fa)(-3a)\right) = \frac{14Fa^3}{3EI}. \quad (5)$$



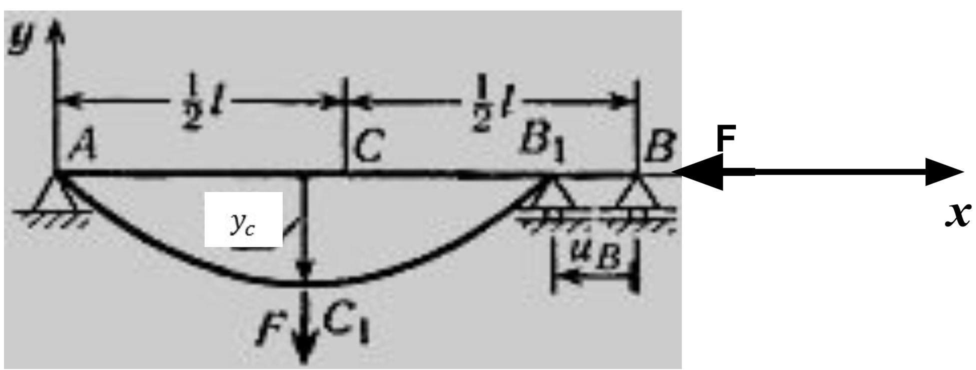
$$\varphi_A = \frac{l}{6EI}\left(0 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{8}ql^2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0\right) = \frac{ql^3}{24EI}. \qquad (6)$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

1. Из курса общей физики известно $W = \bar{P} \cdot \bar{f} \left(dW = \bar{P} \cdot d\bar{f};\ \delta W = \bar{P} \cdot \delta \bar{f} \right)$
2. Принцип независимости действия сил (принцип наложения)

$$f_i = \boldsymbol{\lambda}_{1i} P_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_{1n} P_n$$

3. Закон Гука для деформаций.
4. Геометрически линейные и нелинейные системы.



$$EI_z y'' = M_z$$
$$M_z(x) = \cdots + Fy(x)$$

2.ЛИНЕЙНО УПРУГИЕ СИСТЕМЫ.

ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

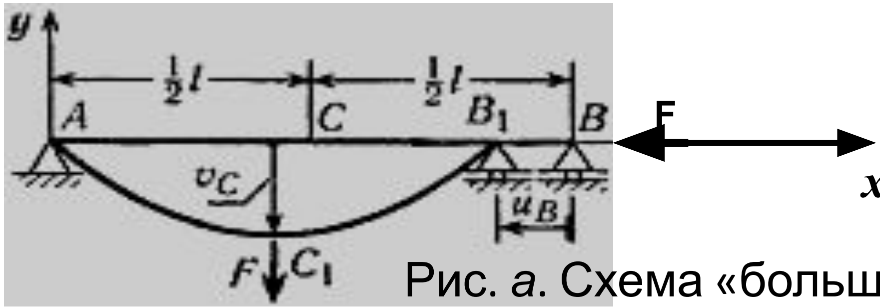
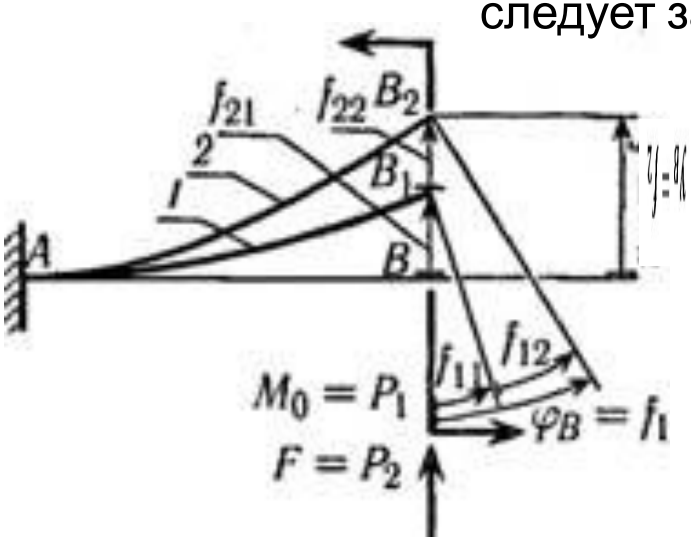


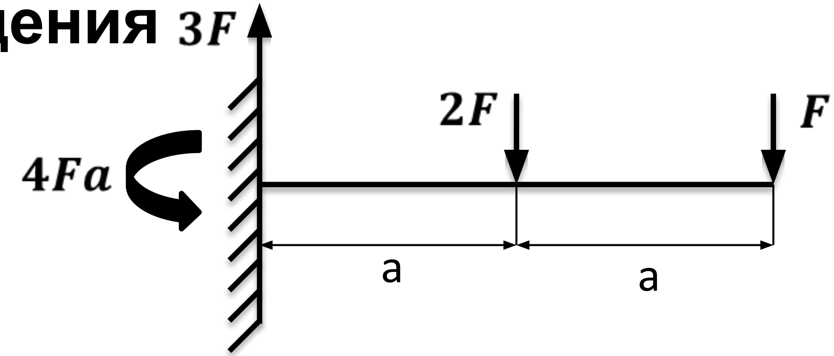
Рис. *а*. Схема «больших» перемещений при изгибе стержня, когда, во-первых, прогиб v_C соизмерим с длиной *l*, во-вторых, нельзя пренебречь укорочением проекции изогнутого стержня на его первоначальное положение. Здесь говорят о геометрической нелинейности системы, хотя материал следует закону Гука.



Такие системы в курсе не рассматриваются.

Рис. *б.* Консольная балка. Сначала прикладывается момент M_0 (положение 1), затем – сила *F* (положение 2). Введём обозначения для обобщённых сил и обобщённых перемещений

Обобщенные силы и обобщенные перемещения



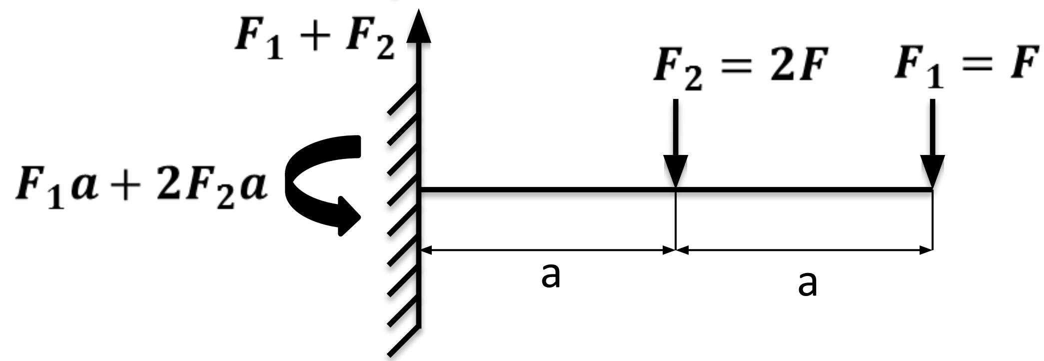
$$Q = F$$

$$\delta W = 2F\delta f_1 + F\delta f_2 = F(2\delta f_1 + \delta f_2)$$

$$\delta W = Q\delta q \quad \Rightarrow \quad \delta q = \delta(2f_1 + f_2)$$

$$q = 2f_1 + f_2$$

Приходим к двум системам:



$$\delta W = F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2$$

$$\delta W = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2$$

Силовые факторы связаны с F_1 и F_2

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = q_1$$

$$q_1 = \frac{1}{EJ}\left[\int_0^a F_1 x \cdot x dx + \int_0^a [F_2 x + F_1(a + x)](a + x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[F_1\frac{a^3}{3} + F_2\left(a\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}\right) + F_1\left(a^3 + 2a\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}\right)\right]$$

$$F_2 = 2F$$

$$F_1 = F$$