Две дельта-функционные ямы в импульсном представлении

Записать уравнение Шрёдингера в импульсном представлении

Правило перехода в импульсное представление

$$U(p,p') = \iint dx dx' \psi_p^*(x) \cdot U(x,x') \psi_{p'}(x')$$

Найти ядро оператора потенциальной энергии в координатном представлении?

Ядро оператора потенциальной энергии в координатном представлении

$$U(x, x') = U(x)\delta(x - x')$$

Записать уравнение Шрёдингера в импульсном представлении

Ядро потенциальной энергии в импульсном представлении

$$U(p,p') = -\frac{\alpha}{2\pi\hbar}\iint dx dx'\, \mathrm{e}^{-ipx/\hbar} \cdot \left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]\delta(x-x')\cdot \mathrm{e}^{ip'x'/\hbar}$$

$$U(p,p') = -\frac{\alpha}{2\pi\hbar}\iint dx\, \mathrm{e}^{-i(p-p')x/\hbar} \cdot \left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]$$

$$U(p,p') = -\frac{\alpha}{2\pi\hbar}\cdot\left[\mathrm{e}^{i(p-p')a/\hbar}+\mathrm{e}^{-i(p-p')a/\hbar}\right]$$

Волновая функция в импульсном представлении

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \mathrm{e}^{-ipx/\hbar}$$

Уравнение Шрёдингера в импульсном представлении

$$\frac{p^2}{2m} \cdot a_p - \frac{\alpha}{2\pi\hbar} \cdot \left[\mathrm{e}^{ipa/\hbar} \cdot C_+ + \mathrm{e}^{-ipa/\hbar} \cdot C_- \right] = -|E| \cdot a_p$$

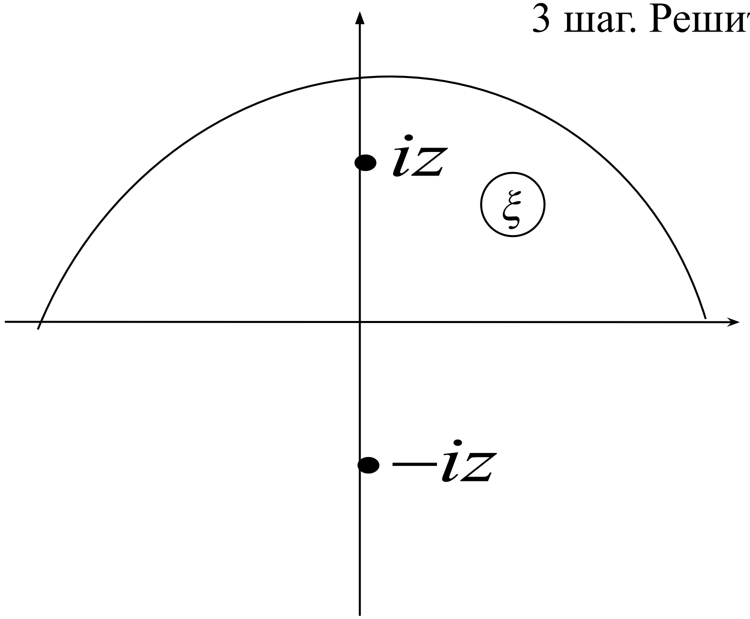
$$C_\pm = \int_{-\infty}^{\infty} dp'\, \mathrm{e}^{\mp ip'a/\hbar} \cdot a_{p'}$$

Как решать?

1 шаг. Выразить a_p

2 шаг. Подставить в интегралы для $C_\pm$

3 шаг. Решить систему уравнений для $C_\pm$



$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi \, \mathrm{e}^{ip\xi}}{(\xi + iz)(\xi - iz)} = 2\pi i \; res \, f(\pm iz) = 2\pi i \cdot (\xi \mp iz) \, f(\pm iz)$$

1 шаг. Выразить a_p

$$a_p = \frac{\alpha m}{\pi \hbar} \cdot \frac{1}{2mE + p^2} \cdot \left[\mathrm{e}^{ipa/\hbar} \cdot C_+ + \mathrm{e}^{-ipa/\hbar} \cdot C_- \right]$$

2 шаг. Подставить в интегралы для $C_{\pm}$

$$C_{\pm} = \frac{\alpha m}{\pi \hbar} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \, \frac{e^{\mp ipa/\hbar}}{2mE + p^2} \cdot \left[e^{ipa/\hbar} \cdot C_{+} + e^{-ipa/\hbar} \cdot C_{-} \right]$$

3 шаг. Решить систему уравнений для $C_\pm$

$$\begin{cases} C_+ = \dfrac{\xi}{\gamma}\left(C_+ + \mathrm{e}^{-2\gamma} \cdot C_-\right) \\ C_- = \dfrac{\xi}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{-2\gamma} \cdot C_+ + C_-\right) \end{cases}$$

$$\gamma = ka, \quad \xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Условие для энергии

$$\frac{\gamma}{\xi} = 1 \pm \mathrm{e}^{-2\gamma}$$

Волновые функции?

Волновые функции

$$C_{+} = \pm C_{-}$$

Явный вид волновых функций?

Явный вид волновых функций

$$a_p = \frac{\alpha m}{\pi \hbar} \cdot \frac{1}{2mE + p^2} \cdot \left[\mathrm{e}^{ipa/\hbar} \cdot C_+ + \mathrm{e}^{-ipa/\hbar} \cdot C_- \right]$$

Или

$$a_p^{(\pm)} = \frac{A^{(\pm)}}{2mE + p^2} \cdot \begin{cases} \cos\left(\dfrac{pa}{\hbar} \right) \\ \sin\left(\dfrac{pa}{\hbar} \right) \end{cases}$$