Однородные тригонометрические уравнения

Составьте конспект. Разберите решение уравнений. Запишите в тетрадь.

Выберите свой вариант и уровень и решите уравнение

ОДНОРОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Однородным тригонометрическим уравнением первой степени называется уравнение вида:

$$A\sin x + B\cos x = 0 \,\Big|\, : \cos x, \quad \cos x \neq 0$$

где $A \neq 0$

$$Atgx + B = 0$$

Однородным тригонометрическим уравнением второй степени называется уравнение вида:

$$A\sin^2 x + B\sin x \cdot \cos x + C\cos^2 x = 0 \,\Big|\, : \cos^2 x, \cos x \neq 0$$

где $A \neq 0$

$$Atg^2 x + Btgx + C = 0$$

Однородные тригонометрические уравнения

1)Однородные уравнения первой степени – это уравнения вида: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$

Т.к. sinx и cosx одновременно не равны нулю, то решаются такие уравнения делением на cos x (или sinx) и методом введения новой переменной.

Получим уравнение: $a \cdot tgx + b = 0$

Пример. Решите уравнение sinx + 2cosx = 0.

Решение: Разделим обе части уравнения на cosx $\neq$ **0.**

Получим

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 2\frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

$$tgx + 2 = 0$$

$$tgx = -2$$

$$x = -arctg\,2 + \pi k,\ \ k \in Z$$

Ответ: $-arctg\,2 + \pi k,\ \ k \in Z$

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида **a sin x + b cos x = 0** называют **однородным тригонометрическим уравнением первой степени**.

$$a\sin x + b\cos x = 0 \quad \Big| : \cos x$$

$$\frac{a\sin x}{\cos x} + \frac{b\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a\,\mathrm{tg}\,x + b = 0$$

$$\mathrm{tg}\,x = -\frac{b}{a}$$

<u>Замечание.</u>

*Деление на **cos x** допустимо, поскольку решения уравнения **cos x = 0** не являются решениями уравнения **a sin x + b cos x = 0**.*

2) Однородные уравнения второй степени:

$$a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\cos^2 x = 0$$

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a\cdot tg^2 x + b\cdot tg x + c = 0.$$

Пример. Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2$.

Решение. $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0$,

$tg^2 x + 4\,tg\,x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда

1) $tg\,x = -1$, 2) $tg\,x = -3$,

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ -arctg3 + \pi n,\ n \in Z$

2.Однородные уравнения первой и второй степени.

Пример 4. $sinx - 2cosx = 0,$

Так как sinx и cosx не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $sin^2x + cos^2x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a\sin x + b\cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Разделим обе части уравнения на cosx, получим

$\mathrm{tgx} = 2,$

$x = arctg\,2 + \pi n,\ n\epsilon Z.$

Ответ: $arctg\,2 + \pi n,\ n\epsilon Z.$

Пример 5. $3sin^2x - 4sinxcosx + cos^2x = 0,$ разделим на $cos^2x,$ получим

$3\mathrm{tg}^2x - 4\mathrm{tgx} + 1 = 0, \qquad \mathrm{tgx} = \mathrm{y},$

$3y^2 - 4y + 1 = 0,$

y = 1 или $y = \frac{1}{3},$

$\mathrm{tgx} = 1$ $\qquad tgx = \frac{1}{3}$

$\mathrm{x} = \mathrm{arctg1} + \pi n,\ n\epsilon Z$ $\qquad x = arctg\frac{1}{3} + \pi n,\ n\epsilon Z.$

x= $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\epsilon Z$; $arctg\frac{1}{3} + \pi n,\ n\epsilon Z.$

4. Решение однородных тригонометрических уравнений

Опр. ***Тригонометрическое уравнение называется однородным, если показатели степени слагаемых равны.***

Пример.

$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 1$

Используем равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$6\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0,$ разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0,$

$5tg^2 x - 3tgx - 2 = 0, \qquad tgx = a$

$5a^2 - 3a - 2 = 0, \qquad D = 9 + 40 = 49, \qquad a_1 = -0{,}4; \quad a_2 = 1$

$tgx = -0{,}4; \qquad tgx = 1$

$x_1 = -arctg\,0{,}4 + \pi n; \qquad x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \qquad n \in Z$

Ответ : $-\mathrm{arctg}0{,}4 + \pi$ n, $\quad \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Решение однородных уравнений по уровням сложности

1 вариант | **2 вариант**

«3»

1 вариант: $3 \sin x + 5 \cos x = 0$

2 вариант: $\cos x + 3 \sin x = 0$

«4»

1 вариант: $5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$

2 вариант: $6 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

«5»

1 вариант: $5 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$

2 вариант: $4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 1$