

Однородные тригонометрические уравнения

Составьте конспект. Разберите решение уравнений. Запишите в тетрадь.
Выберите свой вариант и уровень и решите уравнение

ОДНОРОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Однородным тригонометрическим уравнением первой степени называется уравнение вида:

$$A \sin x + B \cos x = 0 \quad | : \cos x, \quad \cos x \neq 0$$

где $A \neq 0$

$$A \operatorname{tg} x + B = 0$$

Однородным тригонометрическим уравнением второй степени называется уравнение вида:

$$A \sin^2 x + B \sin x \cdot \cos x + C \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x, \quad \cos x \neq 0$$

где $A \neq 0$

$$A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$$

Однородные тригонометрические уравнения

1) Однородные уравнения первой степени – это уравнения вида: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то решаются такие уравнения делением на $\cos x$ (или $\sin x$) и методом введения новой переменной.

Получим уравнение: $a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0$

Пример. Решите уравнение $\sin x + 2\cos x = 0$.

Решение: Разделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$.

Получим
$$\frac{\sin x}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

$$\operatorname{tg} x + 2 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -2$$

$$x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют
однородным тригонометрическим уравнением первой
степени.

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad | : \cos x$$

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Замечание.

Деление на $\cos x$ допустимо, поскольку решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$.



2) Однородные уравнения второй степени:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Пр и м е р . Решить уравнение: $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$.

Р е ш е н и е . $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$,

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0, \text{ откуда } y^2 + 4y + 3 = 0,$$

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, откуда

$$1) \operatorname{tg} x = -1, \quad 2) \operatorname{tg} x = -3,$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2. Однородные уравнения первой и второй степени.

Пример 4. $\sin x - 2\cos x = 0$,

Так как $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Разделим обе части уравнения на $\cos x$, получим

$$\operatorname{tg} x = 2,$$

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$, разделим на $\cos^2 x$, получим

$$3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0, \quad \operatorname{tg} x = y,$$

$$3y^2 - 4y + 1 = 0,$$

$$y = 1$$

или

$$y = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$$

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

4. Решение однородных тригонометрических уравнений

Опр. Тригонометрическое уравнение называется однородным, если показатели степени слагаемых равны.

Пример.

$$6 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$$

Используем равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$6 \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$, разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0$,

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad \operatorname{tg} x = a$$

$$5a^2 - 3a - 2 = 0, \quad D = 9 + 40 = 49, \quad a_1 = -0,4; \quad a_2 = 1$$

$$\operatorname{tg} x = -0,4; \quad \operatorname{tg} x = 1$$

$$x_1 = -\operatorname{arctg} 0,4 + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\text{Ответ: } -\operatorname{arctg} 0,4 + \pi n, \quad \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$$

Решение однородных уравнений по уровням сложности

1 вариант

«3»

$$3 \sin x + 5 \cos x = 0$$

2 вариант

$$\cos x + 3 \sin x = 0$$

«4»

$$5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$$

$$6 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

«5»

$$5 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$$

$$4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 1$$