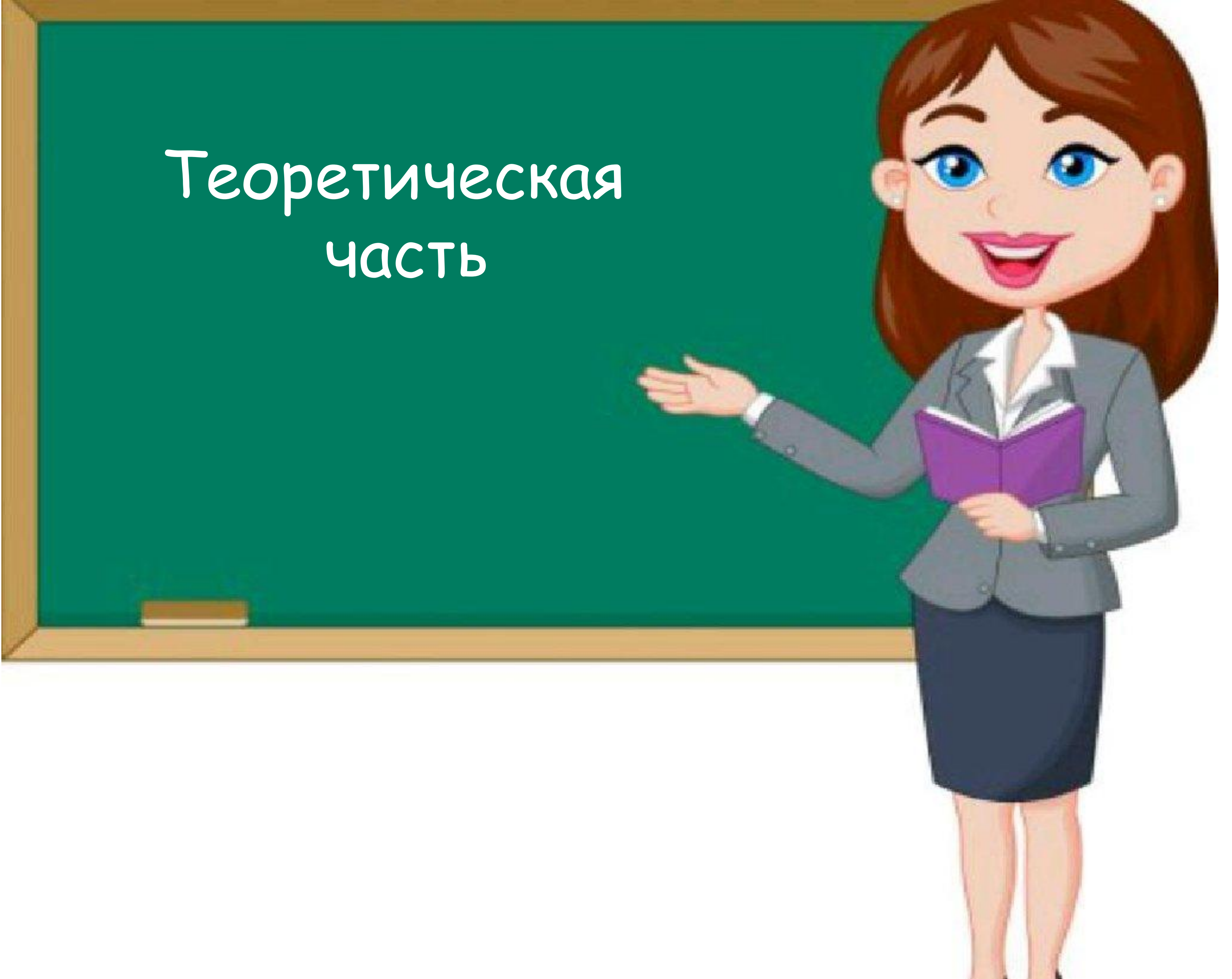
Последовательности. Способы задания и свойства


Теоретическая
часть

Числовые последовательности

Определение 1.

Функцию $y = f(x),\ x \in N$ *называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью,*

и **обозначают:** $y = f(n)$ **или** $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n \ldots$ **или** (y_n).

Способы задания числовой последовательности:

- Словесный
(последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,23, …
- Аналитический ;
- Рекуррентный .

Примеры последовательностей.

Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6…

Ответ: Ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9…; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7

Продолжите ряд 77, 49, 36, 18…

Ответ: Перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число

Способы задания числовой последовательности

1. Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

Пример 1. **Последовательность простых чисел: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,… .**

Пример 2. **Произвольный набор чисел:**

1,4,12,25,26,33,39,… .

Пример 3. **Последовательность четных чисел: 2,4,6,8,10,12,14,16,… .**

Способы задания числовой последовательности

2. *Аналитический способ.*

Любой n-й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.

Пример 1. **Последовательность четных чисел: $y = 2n$.**

Пример 2. **Последовательность квадратов натуральных чисел:**

$y = n^2$.

Пример 3. **Стационарная последовательность: $y = C$**

$C, C, C, C, \ldots, C, \ldots$

Пример 4. **Последовательность $y = n^2 - 3n$**

$-2, -2, 0, 4, 10, \ldots$

Пример 5. **Последовательность $y = 2^n$**

$2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$

Способы задания числовой последовательности

3. Рекуррентный способ.

Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известен ее предыдущий элемент.

Пример 1. $a_1 = 3$ $a_{n+1} = a_n^2$

$a_1 = 3$ $a_3 = 9^2 = 81$

$a_2 = 3^2 = 9$ $a_4 = 81^2 = 6561$

Пример 2. Арифметическая прогрессия $a_{n+1} = a_n + d$,

d - разность арифметической прогрессии.

Пример 3. Геометрическая прогрессия $b_{n+1} = b_n q$,

q – знаменатель геометрической прогрессии.

Определение 2.

Последовательность (y_n), называют ***ограниченной сверху***, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность (y_n) ***ограничена сверху***, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \le M$. Число M называют ***верхней границей последовательности***.

Например: $-1, -4, -9, -16, \ldots, -n^2, \ldots$

Верхняя граница - -1

Определение 3.

Последовательность (y_n), называют **ограниченной снизу**, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность (y_n) **ограничена снизу**, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geq m$. Число m называют **верхней границей последовательности**.

Например: 1, 4, 9, 16,…,n^2,…

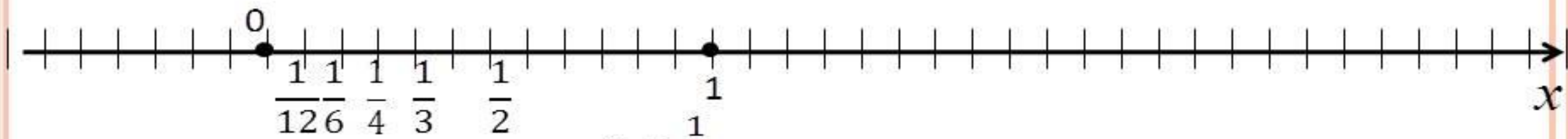
Нижняя граница - 1

Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее ***называют ограниченной последовательностью***.

Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку.

$y_n=\frac{1}{\square}$ – ограниченная последовательность

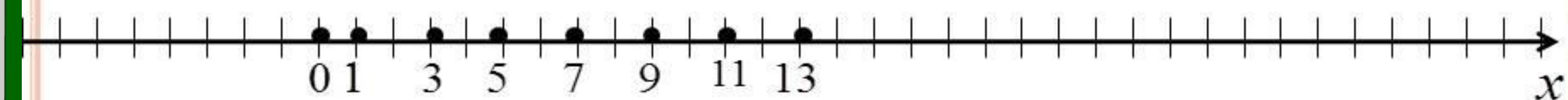
$y_n \in [0;1]$



$y_n = \frac{1}{n}$ - ограниченная последовательность

Члены последовательности (y_n) как бы «сгущаются» около точки 0. Говорят последовательность *(y_n)* сходится.

$y_n = 2n - 1$



У последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. Говорят последовательность *(y_n)* расходится.

Свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1. *Если последовательность сходится, то только к одному пределу.*

Свойство 2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Свойство 3. *Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится* (теорема Вейерштрасса).

Монотонные последовательности

- 3) Последовательность (y_n) называется возрастающей, если каждый её член, кроме первого, больше предыдущего

$$y_1 < y_2 < y_3 \ldots < y_{n-1} < y_n < y_{n+1} \ldots$$

Пример: 1; 4; 9; 16; … n^2 …- возрастающая

4) Последовательность (y_n) называется убывающей, если каждый её член, кроме первого, меньше предыдущего

$$y_1 > y_2 > y_3 \ldots > y_{n-1} > y_n > y_{n+1} \ldots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$$ - убывающая

Проверочная работа

1.Последовательность задана формулой $a_n=5n+2$. Чему равен её третий член?

а) 3 б)17 в) 12 г) 22

2 . Выпишите 5 первых членов последовательности, заданной формулой $a_n=n-3$

а) -3,-2,-1,0,1 б) -2,-1,0,1,2

в) 0,-2,-4,-16,-50 г) 1,2,3,4,5

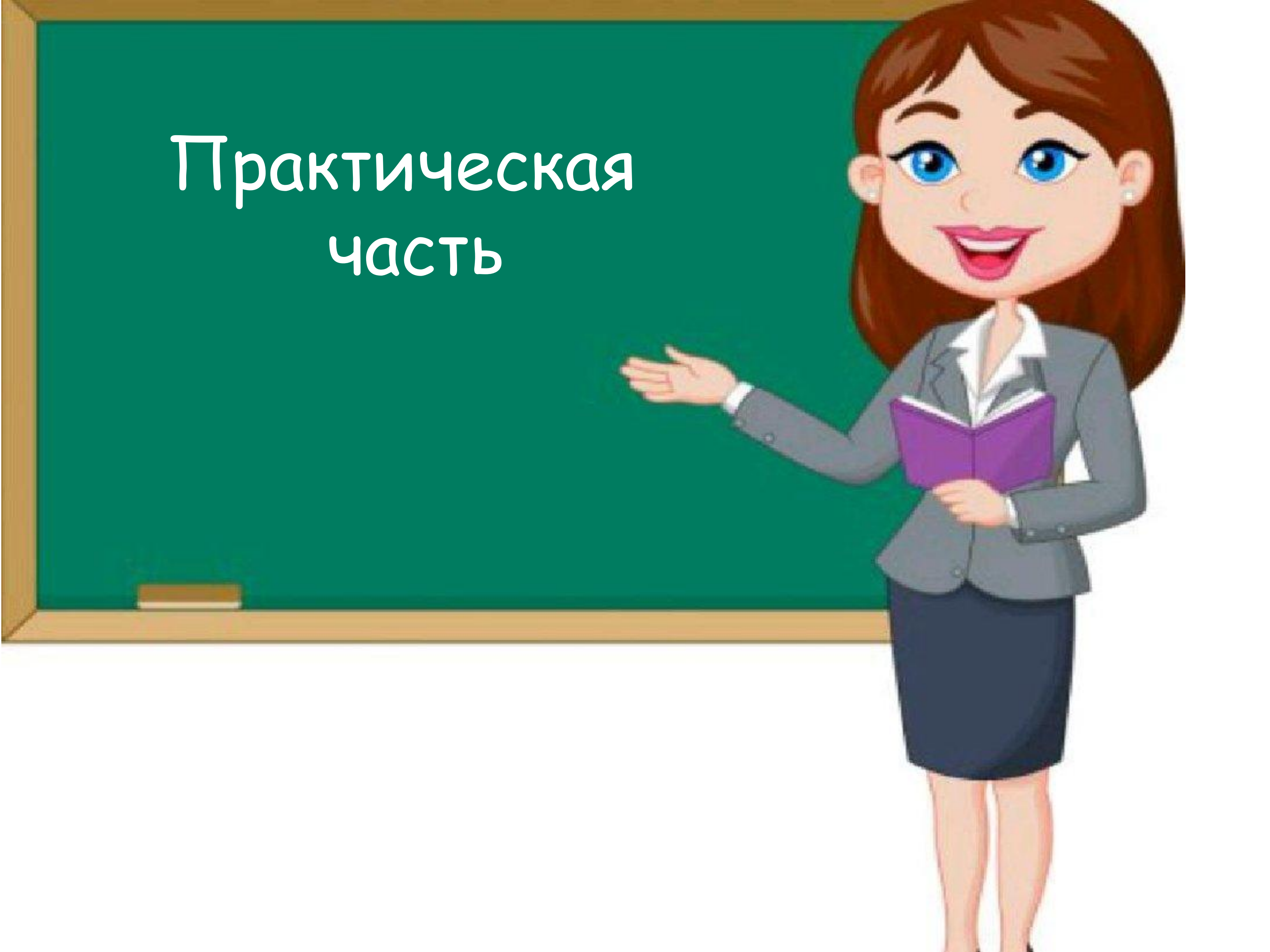
3. Найдите сумму 6-ти первых членов числовой последовательности: 2,4,6,8,…

а) 66 б) 36 в) 32 г) 42

4. Какая из перечисленных последовательностей является бесконечно убывающей:

а) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$ **б) 2,4,6,8,…**

в) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \ldots$ **г)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$


Практическая
часть

Задача 2 Найдите закономерности и покажите их с помощью стрелки:

1 1; 4; 7; 10; 13; …

2 В порядке возрастания положительные нечетные числа

3 10; 19; 37; 73; 145; …

4 В порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1

5 6; 8; 16; 18; 36; …

6 В порядке возрастания положительные числа, кратные 5

1 ½; 1/3; ¼; 1/5; 1/6;

2 Увеличение на 3

3 Чередовать увеличение на 2 и увеличение в 2 раза

4 1; 3; 5; 7; 9; …

5 5; 10; 15; 20; 25; …

6 Увеличение в 2 раза и уменьшение на 1

15.10. Назовите член последовательности (y_n), который:

а) следует за членом y_{31}, y_n, y_{n+9}, y_{2n};

б) предшествует члену y_{91}, y_{639}, y_{n-1}, y_{3n}.

15.11. Назовите все члены последовательности (a_n), которые расположены между членами:

а) a_{638} и a_{645};

б) a_{1002} и a_{1008};

в) a_{n+3} и a_{n+10};

г) a_{n-2} и a_{n+2}.

По заданной формуле n-го члена последовательности вычислите первые пять членов последовательности:

15.12. а) $a_n = 4n + 1$;

б) $c_n = -7n + 3$;

в) $b_n = 5n + 2$;

г) $a_n = -3n - 7$.

По заданной формуле n-го члена последовательности вычислите первые пять членов последовательности:

15.12. а) $a_n = 4n + 1$; в) $b_n = 5n + 2$;

б) $c_n = -7n + 3$; г) $a_n = -3n - 7$.

○**15.13.** а) $a_n = \frac{1}{n+5}$; в) $c_n = \frac{3}{2n+4}$;

б) $d_n = \frac{-2}{3-4n}$; г) $a_n = \frac{-3}{4n-1}$.

○**15.14.** а) $x_n = n^2 + 1$; в) $z_n = -n^3 + 5$;

б) $y_n = -n^3 - 10$; г) $w_n = n^2 - 15$.

598. Определите значения нескольких первых членов последовательности и составьте формулу ее n-го члена, если график последовательности представлен:

а) на рис 18;

б) на рис. 19;

в) на рис. 20;

г) на рис. 21.

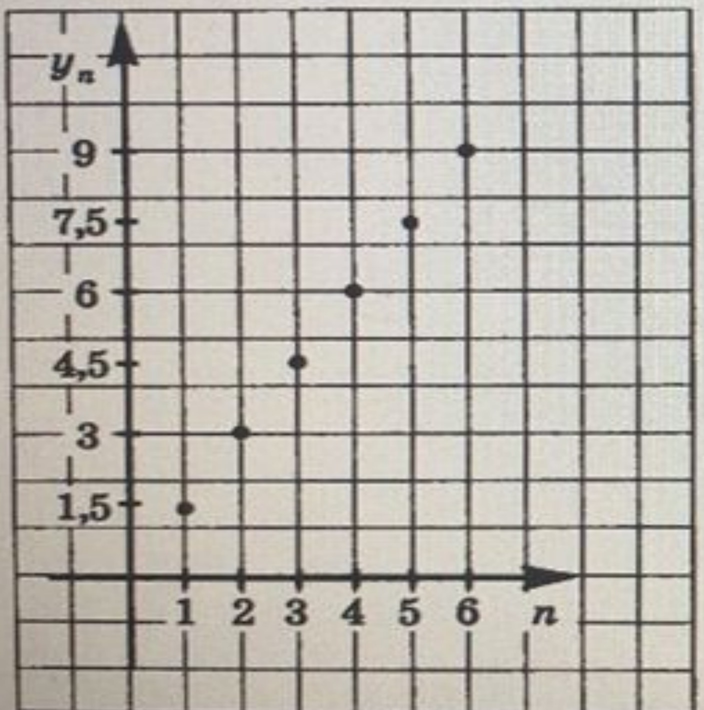


Рис. 18

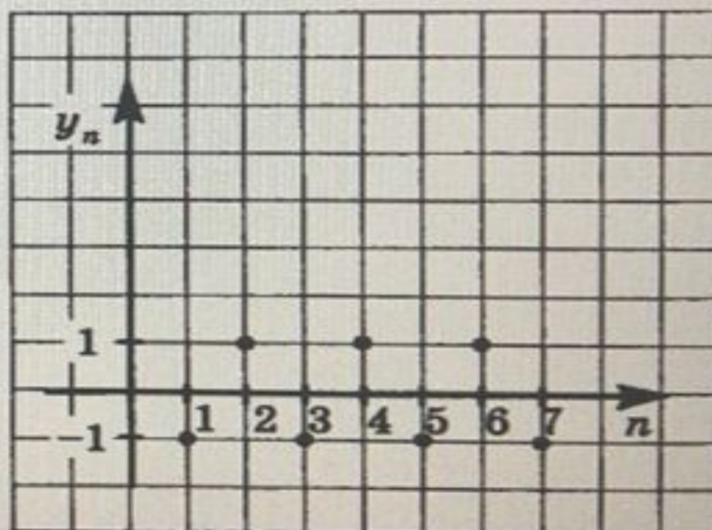


Рис. 19

Выпишите первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:

613. а) $x_1 = 2,\ x_n = 5 - x_{n-1}$;

в) $x_1 = -1,\ x_n = 2 + x_{n-1}$;

б) $x_1 = 2,\ x_n = x_{n-1} + 10$;

г) $x_1 = 4,\ x_n = x_{n-1} - 3$.

614. а) $x_1 = 2,\ x_n = nx_{n-1}$;

в) $x_1 = -2,\ x_n = -x_{n-1}$;

б) $x_1 = -5,\ x_n = -0{,}5 \cdot x_{n-1}$;

г) $x_1 = 1,\ x_n = \dfrac{x_{n-1}}{0{,}1}$.