

Последовательности.
Способы задания
и свойства



Теоретическая часть



Числовые последовательности

Определение 1.

Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью, и обозначают: $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \dots$ или (y_n) .

Способы задания числовой последовательности:

Словесный

(последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...)

Аналитический ;

Рекуррентный .



Примеры последовательностей.

Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6...

Ответ: Ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9...; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7

Продолжите ряд 77, 49, 36, 18...

Ответ: Перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число



Способы задания числовой последовательности

1. Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

*Пример 1. Последовательность простых чисел:
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,....*

*Пример 2. Произвольный набор чисел:
1,4,12,25,26,33,39,....*

*Пример 3. Последовательность четных чисел:
2,4,6,8,10,12,14,16,....*



Способы задания числовой последовательности

2. Аналитический способ.

Любой n -й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.

Пример 1. Последовательность четных чисел: $y = 2n$.

*Пример 2. Последовательность квадратов натуральных чисел:
 $y = n^2$.*

*Пример 3. Стационарная последовательность: $y = C$
 $C, C, C, C, \dots, C, \dots$*

*Пример 4. Последовательность $y = n^2 - 3n$
 $- 2, -2, 0, 4, 10, \dots$*

*Пример 5. Последовательность $y = 2^n$
 $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$*



Способы задания числовой последовательности

3. Рекуррентный способ.

Указывается правило, позволяющее вычислить n -й элемент последовательности, если известен ее предыдущий элемент.

Пример 1. $a_1 = 3$ $a_{n+1} = a_n^2$
 $a_2 = 3^2 = 9$ $a_3 = 9^2 = 81$
 $a_4 = 81^2 = 6561$

Пример 2. Арифметическая прогрессия $a_{n+1} = a_n + d$,
 d - разность арифметической прогрессии.

Пример 3. Геометрическая прогрессия $b_{n+1} = b_n q$,
 q - знаменатель геометрической прогрессии.



Определение 2.

Последовательность (y_n) , называют **ограниченной сверху**, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность (y_n) **ограничена сверху**, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leq M$. Число M называют **верхней границей последовательности**.

Например: $-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$

Верхняя граница - -1



Определение 3.

Последовательность (y_n) , называют **ограниченной снизу**, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность (y_n) **ограничена снизу**, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geq m$. Число m называют **верхней границей последовательности**.

Например: $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$

Нижняя граница - 1



Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее **называют ограниченной последовательностью**.

Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку.



$$y_n = \frac{1}{n} - \text{ограниченная последовательность}$$

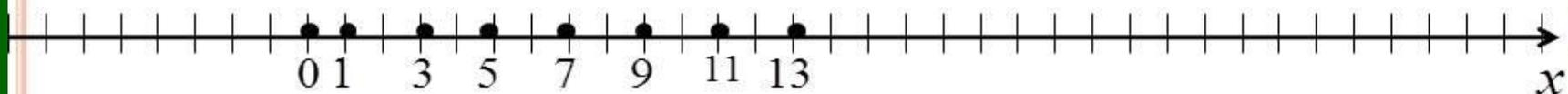
$$y_n \in [0; 1]$$





Члены последовательности (y_n) как бы «сгущаются» около точки 0. Говорят последовательность (y_n) *сходится*.

$$y_n = 2n - 1$$



У последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. Говорят последовательность (y_n) *расходится*.



Свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

Свойство 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Свойство 3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (теорема Вейерштрасса).



Монотонные последовательности

- 3) Последовательность (y_n) называется возрастающей, если каждый её член, кроме первого, больше предыдущего

$$y_1 < y_2 < y_3 \dots < y_{n-1} < y_n < y_{n+1} \dots$$

Пример: 1; 4; 9; 16; ... n^2 ...- **возрастающая**

- 4) Последовательность (y_n) называется убывающей, если каждый её член, кроме первого, меньше предыдущего

$$y_1 > y_2 > y_3 \dots > y_{n-1} > y_n > y_{n+1} \dots$$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ - **убывающая**

Проверочная работа

1. Последовательность задана формулой $a_n = 5n + 2$. Чему равен её третий член?

- а) 3 б) 17 в) 12 г) 22

2. Выпишите 5 первых членов последовательности, заданной формулой $a_n = n - 3$

- а) -3, -2, -1, 0, 1 б) -2, -1, 0, 1, 2
в) 0, -2, -4, -16, -50 г) 1, 2, 3, 4, 5

3. Найдите сумму 6-ти первых членов числовой последовательности: 2, 4, 6, 8, ...

- а) 66 б) 36 в) 32 г) 42

4. Какая из перечисленных последовательностей является бесконечно убывающей:

- а) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$ б) 2, 4, 6, 8, ...
в) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \dots$ г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

Практическая часть



Задача 2 Найдите закономерности и покажите их с помощью стрелки:

1 **1; 4; 7; 10; 13; ...**

2 В порядке возрастания
положительные нечетные
числа

3 **10; 19; 37; 73; 145; ...**

4 В порядке убывания
правильные дроби
с числителем, равным 1

5 **6; 8; 16; 18; 36; ...**

6 В порядке возрастания
положительные числа,
кратные 5

1 **$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6};$**

2 **Увеличение
на 3**

3 **Чередовать увеличение
на 2 и увеличение в 2 раза**

4 **1; 3; 5; 7; 9; ...**

5 **5; 10; 15; 20; 25; ...**

6 **Увеличение в 2 раза
и уменьшение на 1**

15.10. Назовите член последовательности (y_n) , который:

а) следует за членом $y_{31}, y_n, y_{n+9}, y_{2n}$;

б) предшествует члену $y_{91}, y_{639}, y_{n-1}, y_{3n}$.

15.11. Назовите все члены последовательности (a_n) , которые расположены между членами:

а) a_{638} и a_{645} ;

в) a_{n+3} и a_{n+10} ;

б) a_{1002} и a_{1008} ;

г) a_{n-2} и a_{n+2} .

По заданной формуле n -го члена последовательности вычислите первые пять членов последовательности:

15.12. а) $a_n = 4n + 1$;

в) $b_n = 5n + 2$;

б) $c_n = -7n + 3$;

г) $a_n = -3n - 7$.

По заданной формуле n -го члена последовательности вычислите первые пять членов последовательности:

15.12. а) $a_n = 4n + 1$;

в) $b_n = 5n + 2$;

б) $c_n = -7n + 3$;

г) $a_n = -3n - 7$.

○15.13. а) $a_n = \frac{1}{n+5}$;

в) $c_n = \frac{3}{2n+4}$;

б) $d_n = \frac{-2}{3-4n}$;

г) $a_n = \frac{-3}{4n-1}$.

○15.14. а) $x_n = n^2 + 1$;

в) $z_n = -n^3 + 5$;

б) $y_n = -n^3 - 10$;

г) $w_n = n^2 - 15$.

598. Определите значения нескольких первых членов последовательности и составьте формулу ее n -го члена, если график последовательности представлен:

а) на рис 18;

в) на рис. 20;

б) на рис. 19;

г) на рис. 21.

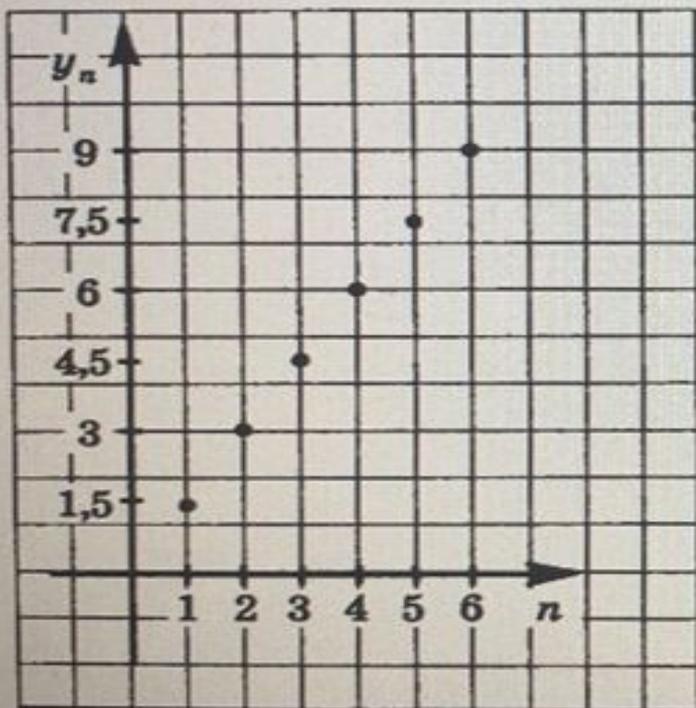


Рис. 18

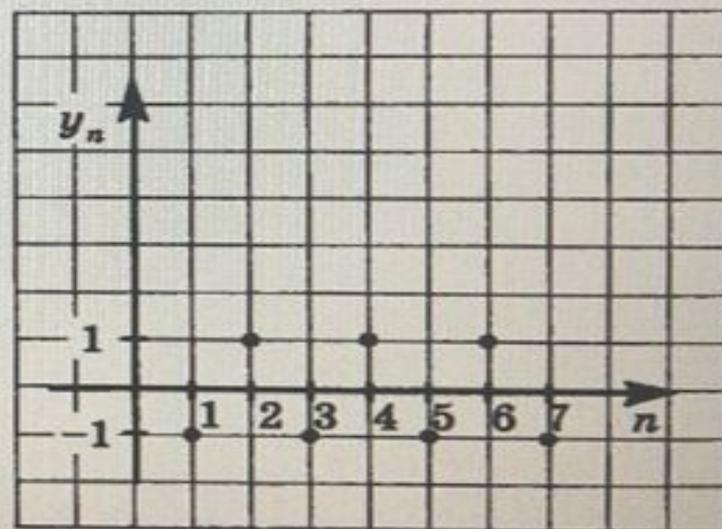


Рис. 19

Выпишите первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:

613. а) $x_1 = 2, x_n = 5 - x_{n-1};$

в) $x_1 = -1, x_n = 2 + x_{n-1};$

б) $x_1 = 2, x_n = x_{n-1} + 10;$

г) $x_1 = 4, x_n = x_{n-1} - 3.$

614. а) $x_1 = 2, x_n = nx_{n-1};$

в) $x_1 = -2, x_n = -x_{n-1};$

б) $x_1 = -5, x_n = -0,5 \cdot x_{n-1};$

г) $x_1 = 1, x_n = \frac{x_{n-1}}{0,1}.$