

# Лекция № 12

## Согласованный линейный фильтр

Интеграл свертки, связывающий выходной и входной сигналы линейного фильтра в момент:

$$y(T) = \int_0^T x(t) h(T-t) dt = \int_0^T x(t) h(T-t) dt \quad (1.1)$$

Характеристические функции выходного сигнала:

$$Y(T) = \int_0^T x(t) h(T-t) dt = \int_0^T x(t) S(t) dt \quad (1.3)$$

$$y(t) = \int_0^t x(t-t) S(T-t) dt \quad (1.4)$$

$$y(t) = \int_0^t x(t) S[-(t-T)] dt \quad (1.5)$$

$$Y(T) = \int_0^T x(t) S(t) dt = \int_0^T x(t) S(t) dt \quad (1.6)$$

Частотная характеристика  $K(j\omega)$  согласованного фильтра:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(T-t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega T} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{j\omega t} dt \quad (1.7)$$

Операция "чистого" запаздывания на время  $T$ :

$$K(j\omega) = e^{-j\omega T} S(j\omega) \quad (1.8)$$

Получение максимально возможного значения  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} y(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) K(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) S(j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (1.9)$$

Процесс обработки сигнала в согласованном фильтре:

$$y(t) = \sigma_{\text{ш}}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S(t - \tau) \Delta \tau \quad (1.10)$$

Характеристика выходного сигнала:

$$y(t) = S(T - \tau_1) \int S(t - \tau) \Delta \tau + S(T - \tau_2) \int S(t - \tau) \Delta \tau + \dots + \quad (1.11)$$

$$y(T) = \sigma_{\text{ш}}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S(T - \tau) S(T - \tau) \Delta \tau = \sigma_{\text{ш}}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(T - \tau) \Delta \tau \quad (1.12)$$

$$y(T) = \int_0^T S^2(T - \tau) d\tau = \sigma_{\text{ш}} \quad (1.13)$$

Действием сигнала и помехи:

$$z(t) = y(t) + n_1(t) \quad (1.14)$$

Среднеквадратическому отношению шума:

$$r = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_{n_1}^2} \quad (1.15)$$

Полезный сигнал на выходе:

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 |K(j\omega)|^2 \sigma_{\text{ш}}^2 d\omega \quad (1.16)$$

Дисперсия шума на выходе фильтра:

$$\sigma_{\text{ш}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\text{ш}}^2(\omega) d\omega = \frac{\sigma_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.17)$$

Функционал:

$$r = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\text{ш}}^2(j\omega) K(j\omega) \sigma_{\text{сиг}}^2(j\omega) d\omega}{\left( \frac{\sigma_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.77)$$

Максимум r достигается при:

$$K(j\omega) = \sigma_{\text{сиг}}^2(j\omega) \sigma_{\text{ш}}^2(j\omega) \quad (1.19)$$

Нетрудно найти максимально возможное отношение сигнал/шум:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{сиг}}^2 / \sigma_{\text{ш}}^2 &= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\text{сиг}}^2(j\omega) \sigma_{\text{ш}}^2(j\omega) \sigma_{\text{сиг}}^2(j\omega) d\omega}{\left( \frac{\sigma_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma_{\text{сиг}}^2(j\omega) \sigma_{\text{ш}}^2(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \left( \frac{1}{\sigma_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma_{\text{сиг}}^2(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{2\sigma_{\text{сиг}}}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Сигнал в виде прямоугольного видеоимпульса задается следующей функцией времени:

$$S(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{при } t < 0; t > T \end{cases} \quad (1.21)$$

импульсную переходную функцию согласованного с данным сигналом фильтра:

$$h(t) = S(T - t) = S(t) \quad (1.22)$$

Характеристика согласованного фильтра:

$$K(j\omega) = \int_0^T e^{-j\omega t} dt = \left[ \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right]_0^T = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \quad (1.23)$$

Выражение для выходного сигнала фильтра:

$$y(t) = \int_0^T \sigma_{\tau=0}^{\tau} S(t - \tau) d\tau \quad (1.24)$$

Спектр первого импульса:

$$F(j\omega) = \int_0^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \quad (1.25)$$

Свойства преобразования Фурье:

$$S(t) \div F(j\omega) \quad (1.26)$$

$$S(t - T) \div e^{-j\omega T} F(j\omega) \quad (1.27)$$

Частотная характеристика фильтра, согласованного с одиночным видеоимпульсом:

$$K(j\omega) = \prod_{k=1}^{M-1} (j\omega + \sigma_k) \prod_{k=1}^N (j\omega) \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \prod_{k=1}^{M-1} (j\omega + \sigma_k) \prod_{k=1}^N (j\omega) \left[ \prod_{k=1}^{M-1} (j\omega + \sigma_k) + \sigma_{\ell=1}^{M-1} \prod_{k=1}^{M-1} (j\omega + \sigma_k) \right] = \\ &= \prod_{k=1}^N (j\omega) \left[ \prod_{k=1}^{M-1} (j\omega + \sigma_k) + \sigma_{\ell=1}^{M-1} \prod_{k=1}^{M-1} (j\omega + \sigma_k) \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

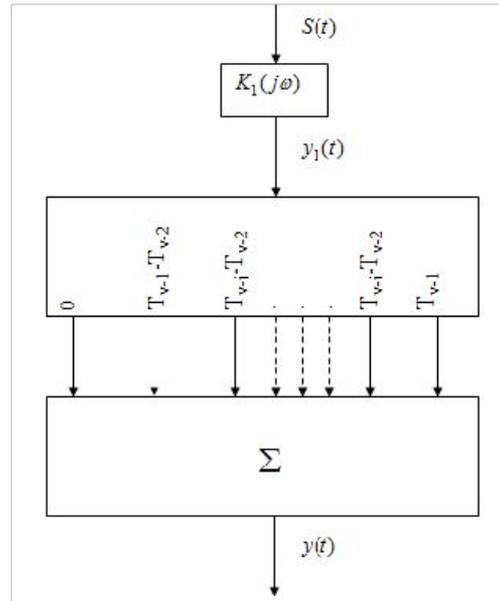


Рис. 1.1 – Задержки импульсов на выходе фильтра

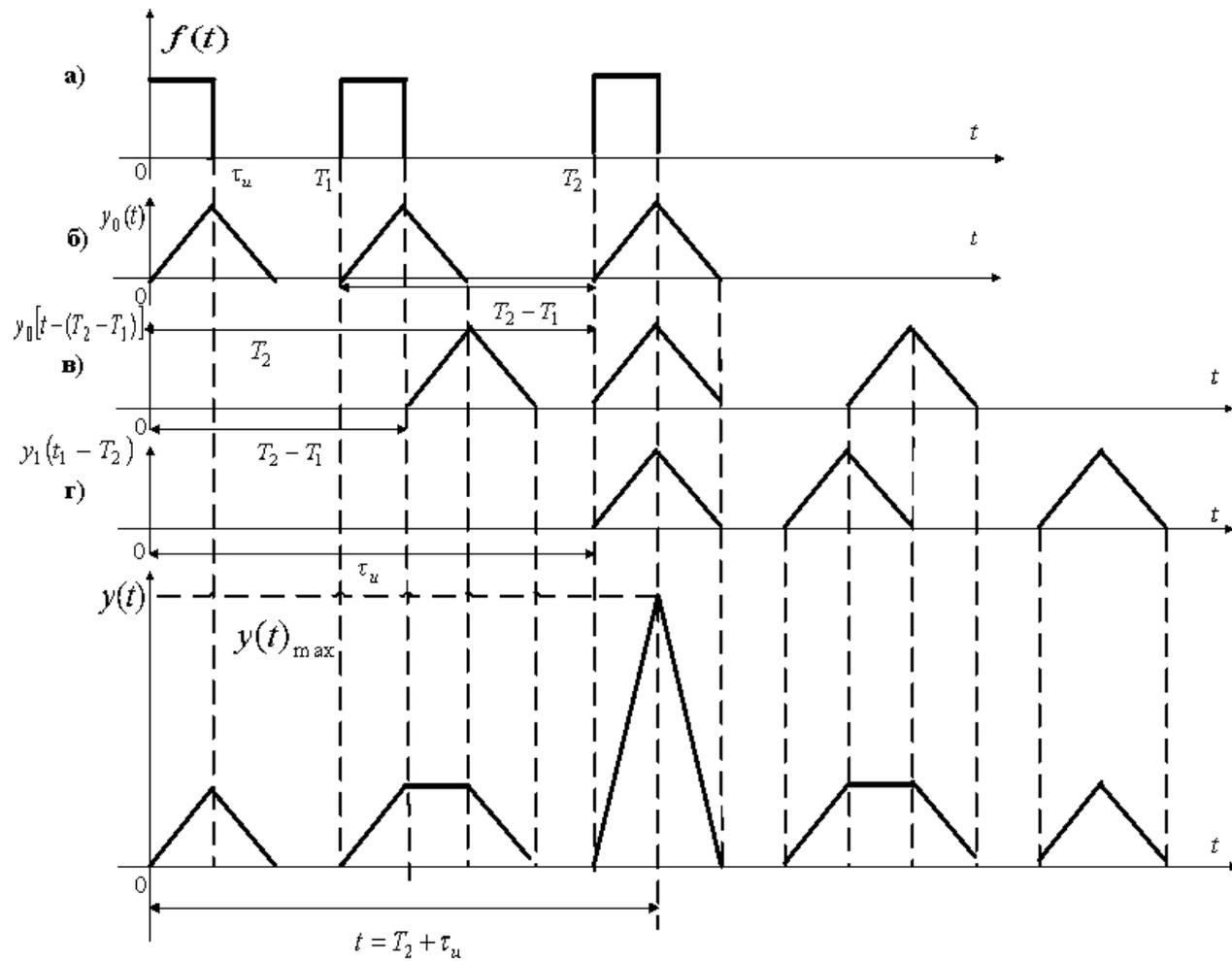


Рис. 1.2 – Формирование выходного сигнала фильтра

Прямоугольный радиоимпульс:

$$S(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + B, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0; t > T \end{cases} \quad (1.30)$$

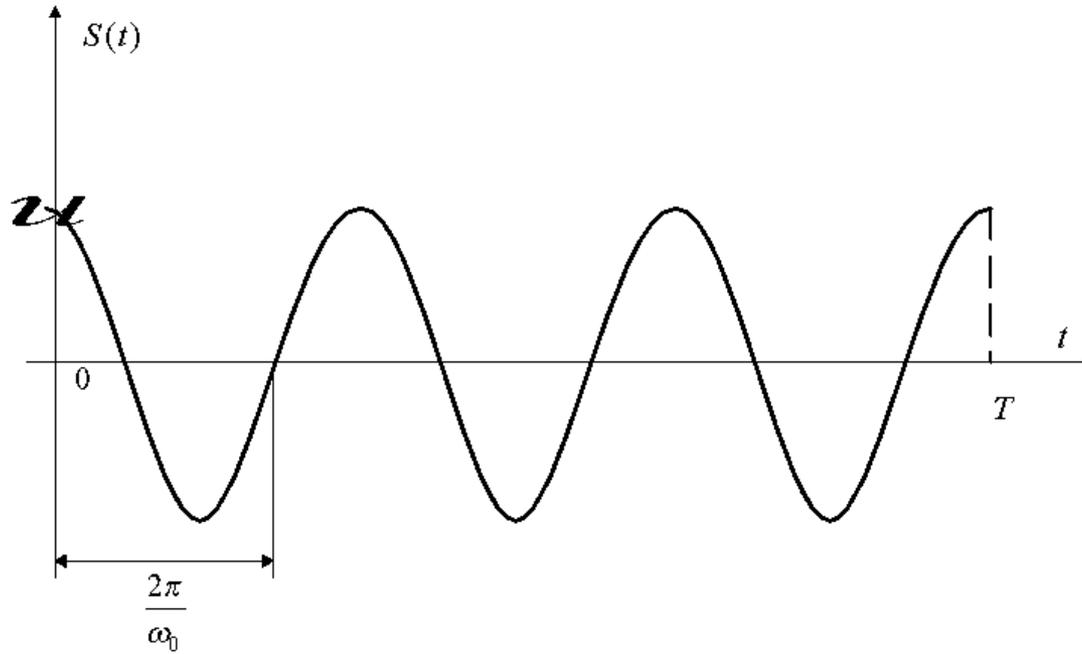


Рис. 1.3 – Гармоническое колебание

Импульсная переходная функция фильтра, согласованного с прямоугольным радиопульсом:

$$\begin{aligned} h(t) &= S(T-t) = U \cos \omega_0 (T-t) = \\ &= U \cos(\omega_0 T - \omega_0 t) = U \cos(2\pi k - \omega_0 t) = U \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (1.31)$$

Спектр прямоугольного радиопульса:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= U \int_0^T \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{U}{2} \int_0^T (e^{j(\omega_0 - \omega)t} + e^{-j(\omega_0 + \omega)t}) dt = \\ &= \frac{U}{2} \int_0^T e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt + \frac{U}{2} \int_0^T e^{-j(\omega_0 + \omega)t} dt = \\ &= \frac{U}{2} \left[ \frac{1 - e^{j(\omega_0 - \omega)T}}{j(\omega_0 - \omega)} + \frac{1 - e^{-j(\omega_0 + \omega)T}}{-j(\omega_0 + \omega)} \right] = \frac{U}{2} \left[ \frac{1 - e^{j(\omega_0 - \omega)T}}{j(\omega_0 - \omega)} + \frac{1 - e^{-j(\omega_0 + \omega)T}}{j(\omega_0 + \omega)} \right] = \\ &= U (1 - e^{-j\omega T}) \left( \frac{e^{j\omega_0 T}}{j(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Сопряженный спектр:

$$F^*(j\omega) = U (1 - e^{-j\omega T}) \left( \frac{-e^{-j\omega_0 T}}{j(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \quad (1.33)$$

Частотная характеристика согласованного фильтра:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= U e^{-j\omega T} (1 - e^{j\omega_0 T}) \left( \frac{-e^{-j\omega_0 T}}{j(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) = \\ &= U (e^{-j\omega T} - 1) \left( -\frac{e^{-j\omega_0 T}}{j(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) = U (1 - e^{-j\omega T}) \frac{e^{-j\omega_0 T}}{j(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned} \quad (1.34)$$

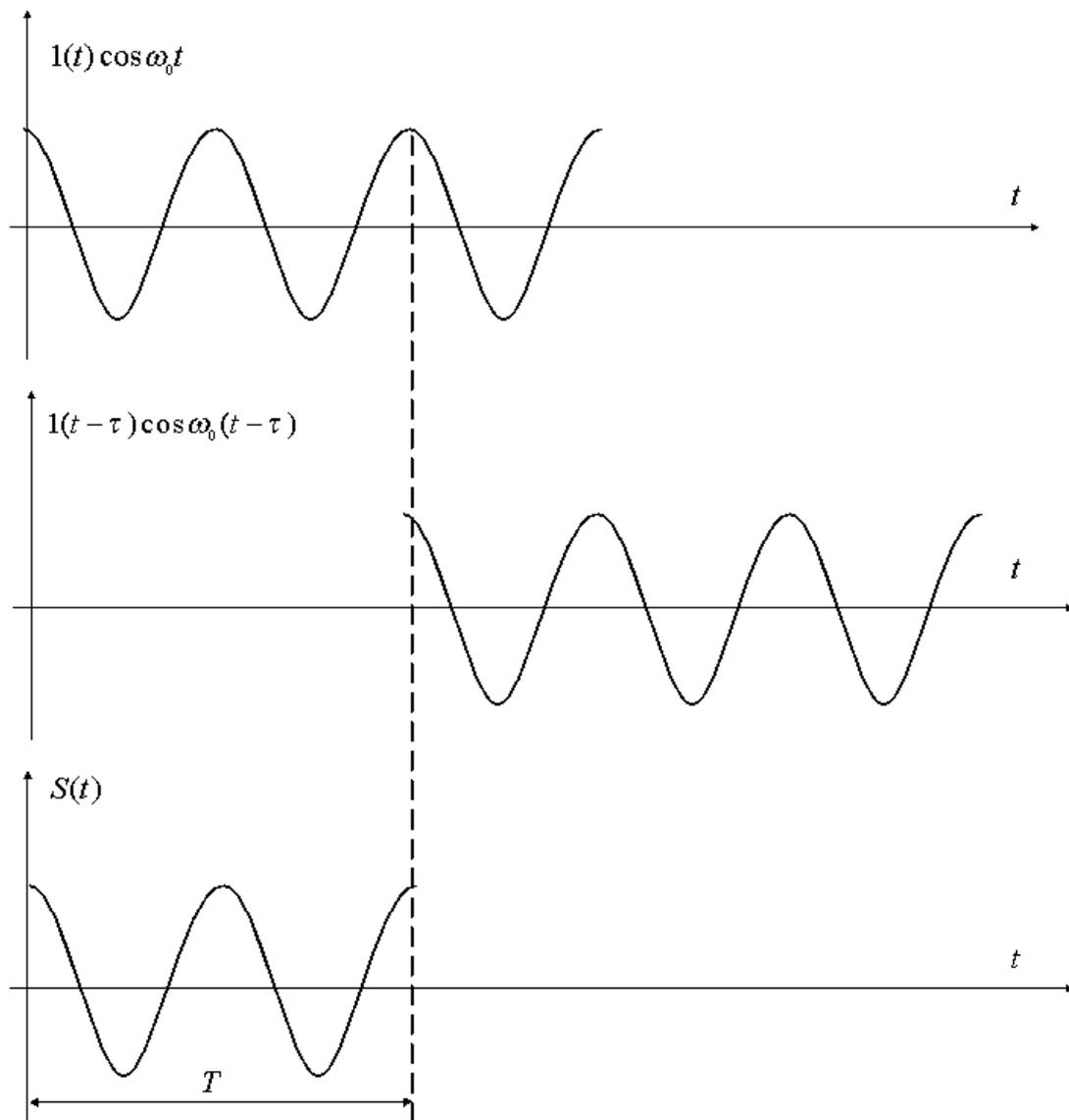


Рис. 1.4 – Косинусоида

Амплитудно – и фазо – частотные характеристики согласованного фильтра:

$$K(j\omega) = \frac{U}{2} \left[ \frac{1 - e^{-j(\omega - \omega_0)T}}{j(\omega - \omega_0)} + \frac{1 - e^{-j(\omega + \omega_0)T}}{j(\omega + \omega_0)} \right] \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{U}{2} \left[ e^{-j\omega_0 T/2} \frac{e^{j(\omega - \omega_0)T/2} - e^{-j(\omega - \omega_0)T/2}}{j(\omega - \omega_0)} + \right. \\ &\quad \left. + e^{j\omega_0 T/2} \frac{e^{j(\omega + \omega_0)T/2} - e^{-j(\omega + \omega_0)T/2}}{j(\omega + \omega_0)} \right] = \\ &= U \frac{U}{2} \left[ e^{-j\omega_0 T/2} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)T}{2}}{\frac{\omega - \omega_0}{2}} + e^{j\omega_0 T/2} \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)T}{2}}{\frac{\omega + \omega_0}{2}} \right] \quad (1.36) \end{aligned}$$

Частотная характеристика:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{U}{2} \left[ e^{-j\omega_0 T/2} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)T}{2}}{\frac{\omega - \omega_0}{2}} e^{j\omega_0 T/2} + \right. \\ &\quad \left. + e^{j\omega_0 T/2} \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)T}{2}}{\frac{\omega + \omega_0}{2}} e^{-j\omega_0 T/2} \right] \quad (1.37) \end{aligned}$$

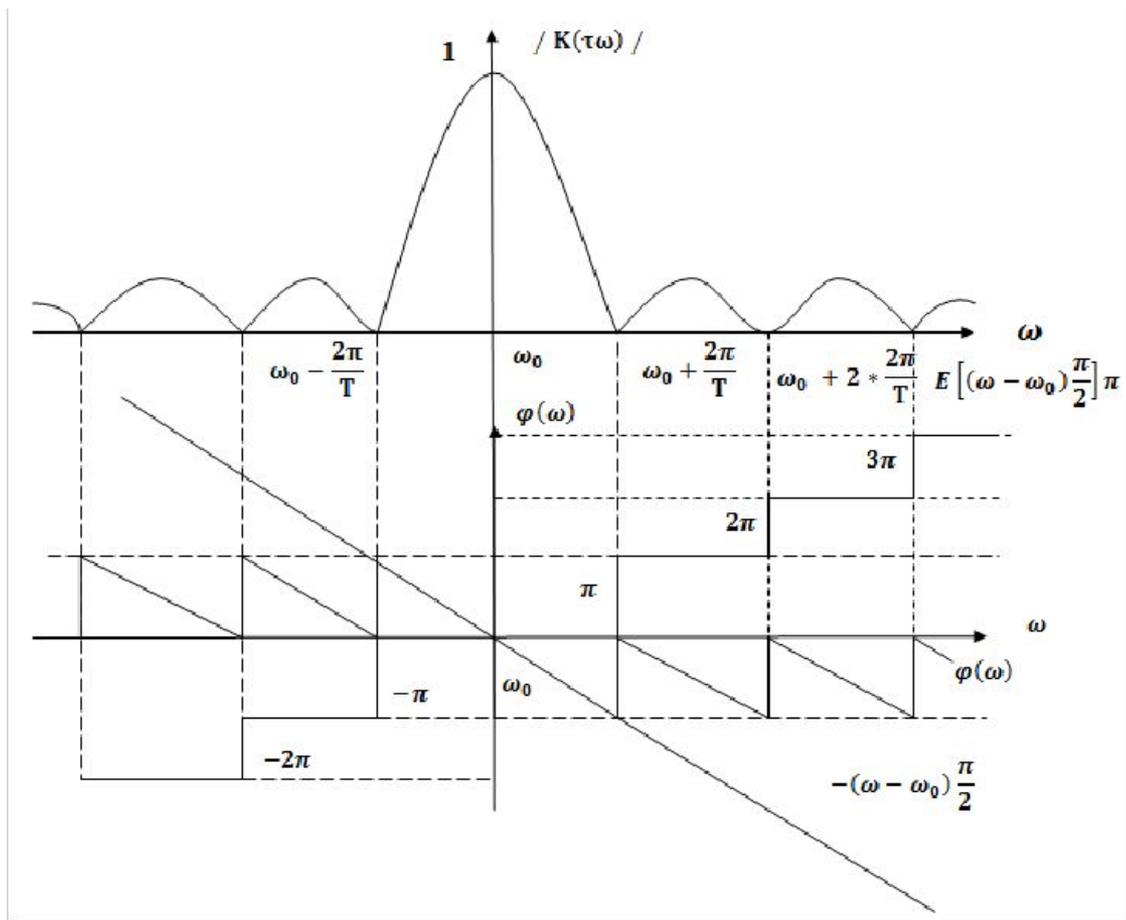


Рис. 1.5 – Частотная характеристика согласованного фильтра входного сигнала

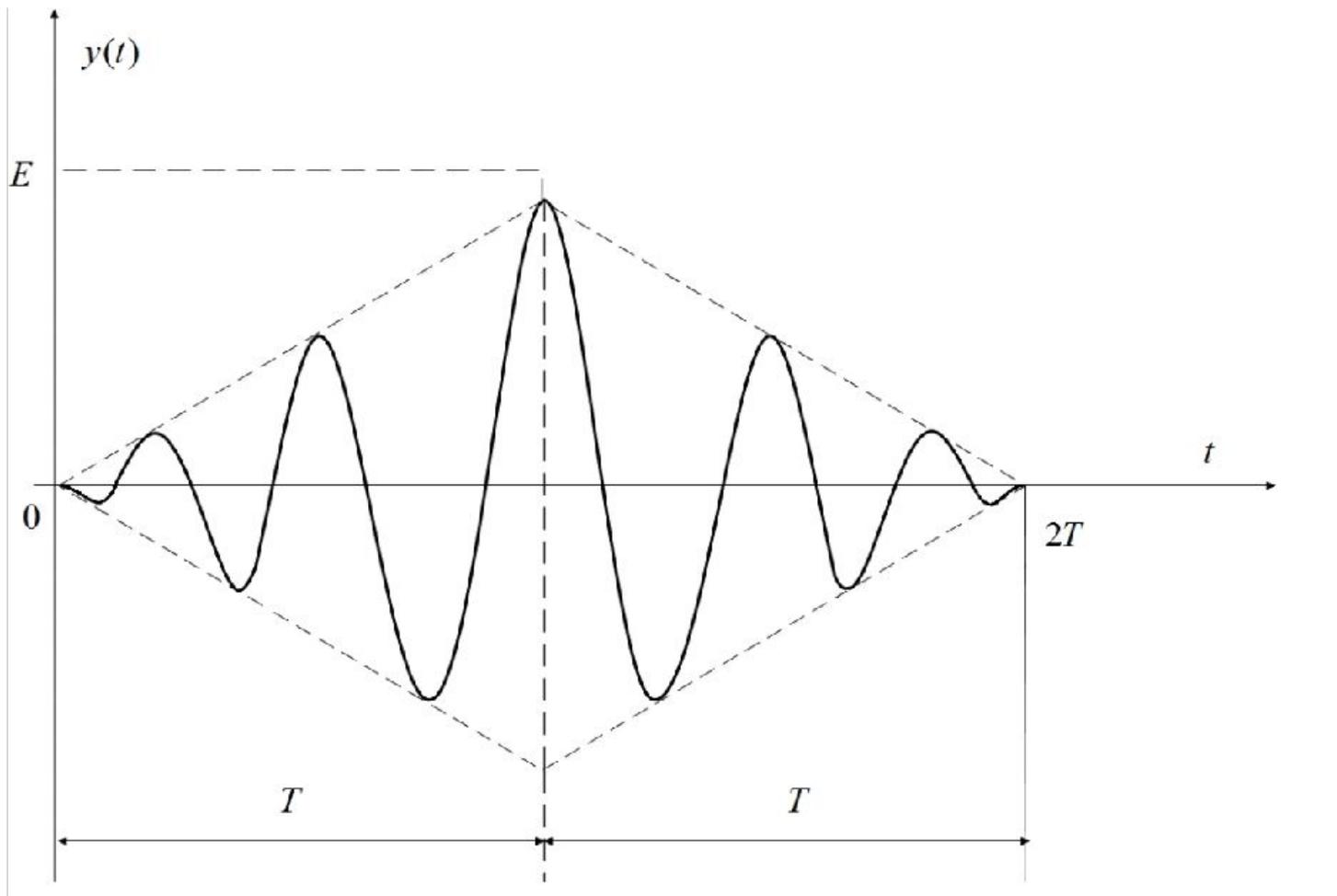


Рис. 1.6 – Входной сигнал согласованного фильтра