

A decorative frame consisting of two thick black L-shaped lines. One L-shape is positioned in the top-left corner, and the other is in the bottom-right corner, creating an open rectangular frame around the central text.

ЛОГИКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Лутковская Е.А.



ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Логика высказываний

Стандартными блоками формальной логики являются высказывания. *Высказыванием* называется утверждение, которое имеет значение истинности, т.е. может быть **истинным** (обозначается буквой И) или **ложным** (обозначается Л). Например,

- земля плоская;
- Сара — доктор;
- 29 — простое число.

Составные высказывания

Каждое из высказываний можно обозначить своей буквой. Пусть, например, P обозначает высказывание «земля плоская», Q — «Сара — доктор» и R — «29 — простое число».

Используя такие логические операции, как **не**, **или**, **и**, можно построить новые, так называемые *составные высказывания*, komponуя более простые. Например,

- $(\text{не } P)$ — это высказывание «земля не плоская»;
- $(P \text{ или } Q)$ — «земля плоская или Сара — доктор»;
- $(P \text{ и } Q)$ — «земля плоская и Сара — доктор».

Пример 2.1. Обозначим через P высказывание «логика — забава», а через Q — «сегодня пятница». Требуется выразить каждое из следующих составных высказываний в символьной форме.

- Логика — не забава, и сегодня пятница.
- Сегодня не пятница, да и логика — не забава.
- Либо логика — забава, либо сегодня пятница.

Отрицание \neg \bar{Q}

Отрицанием произвольного высказывания P называется высказывание вида (не P), чье истинностное значение строго противоположно значению P . Определяющая таблица истинности отрицания высказывания приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

P	(не P)
И	Л
Л	И

Конъюнкция \wedge (&)

Конъюнкцией или логическим умножением двух высказываний P и Q называют составное высказывание вида $(P \text{ и } Q)$. Оно принимает истинное значение только в том случае, когда истинны обе его составные части. Такое определение хорошо согласуется с обычным пониманием союза «и» в разговорном языке. Соответствующая таблица истинности — табл. 2.2.

Таблица 2.2

P	Q	$(P \text{ и } Q)$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкция $\cup (V)^+$

Дизъюнкцией или логическим сложением двух высказываний P и Q называется составное высказывание (P или Q). Оно истинно, если хотя бы одна из ее составных частей имеет истинное значение, что в некотором смысле также согласуется с обыденным пониманием союза «или». Другими словами, (P или Q) означает, что «или P , или Q , или и то, и другое». Таблица истинности дизъюнкции обозначена как табл. 2.3.

Таблица 2.3

P	Q	$(P$ или $Q)$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Эквивалентность \Leftrightarrow

- Два составных высказывания, построенные из одних и тех же простых высказываний, но разными способами, называются логически эквивалентными, если они имеют одинаковые таблицы истинности на всех возможных наборах значений истинности простых высказываний, из которых они состоят.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Пример

Пример 2.3. Показать, что высказывание $(\text{не } (P \text{ и } (\text{не } Q)))$ логически эквивалентно утверждению $((\text{не } P) \text{ или } Q)$.

Решение. Заполним совместную таблицу истинности (табл. 2.4) для составных высказываний:

$$R = (\text{не } (P \text{ и } (\text{не } Q))) \quad \text{и} \quad S = ((\text{не } P) \text{ или } Q).$$

Вспомогательные колонки используются для построения обоих выражений из P и Q .

Таблица 2.4

P	Q	не P	не Q	P и (не Q)	R	S
И	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	И	И

Две последние колонки таблицы идентичны. Это означает, что высказывание R логически эквивалентно высказыванию S .

Импликация $\rightarrow \Rightarrow$

В логике условное высказывание «если P , то Q » принято считать ложным только в том случае, когда *предпосылка* P истинна, а *заключение* Q ложно. В любом другом случае оно считается истинным.

Используя символ импликации « \Rightarrow », мы пишем $P \Rightarrow Q$ для обозначения условного высказывания «если P , то Q ». Такая запись читается как «из P следует Q » или, « P влечет Q », или « P достаточно для Q », или « Q необходимо для P ».

Таблица истинности импликации приведена в табл. 2.5.

Таблица 2.5

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример

Пример 2.4. Пусть P — (ложное) высказывание $1 = 5$, Q — (тоже ложное) высказывание $3 = 7$ и R — (истинное) утверждение $4 = 4$. Показать, что условные высказывания: «если P , то Q » и «если P , то R », — оба истинны.

Решение. Если $1 = 5$, то, прибавляя 2 к обеим частям равенства, мы получим, что $3 = 7$. Следовательно, высказывание «если P , то Q » справедливо. Вычтем теперь из обеих частей равенства $1 = 5$ число 3 и придем к $-2 = 2$. Поэтому $(-2)^2 = 2^2$, т. е. $4 = 4$. Таким образом, «если P , то R » тоже верно.

Контр-позиция

Пример 2.5. Высказывание $((\text{не } Q) \Rightarrow (\text{не } P))$ называется *противоположным* или *контрапозитивным* к высказыванию $(P \Rightarrow Q)$. Показать, что $((\text{не } Q) \Rightarrow (\text{не } P))$ логически эквивалентно высказыванию $(P \Rightarrow Q)$.

Решение. Рассмотрим совместную таблицу истинности (табл. 2.6).

Таблица 2.6

P	Q	$\text{не } P$	$\text{не } Q$	$(P \Rightarrow Q)$	$((\text{не } Q) \Rightarrow (\text{не } P))$
И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Поскольку два последних столбца этой таблицы совпадают, то и высказывания, о которых идет речь, логически эквивалентны.

Конверсия импликации

- Высказывание $Q \rightarrow P$ называется конверсией импликации $P \rightarrow Q$ или обратной импликацией.
- Многие из ошибок в рассуждениях происходят от смешивания высказывания с его конверсией.
- Например, можно сказать, что если функция в данной точке имеет экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, но нельзя сказать, что если производная в данной точке равна нулю, то функция в этой точке имеет экстремум (м.б. это точка перегиба).

С импликацией связано понятие необходимых и достаточных условий в математике

X является достаточным условием для Y .	Если имеет место X , то имеет место и Y .	Импликация $X \rightarrow Y$.
X является необходимым условием для Y .	Если имеет место Y , то имеет место X .	Конверсия импликации $Y \rightarrow X$.
X является необходимым и достаточным условием для Y .	X имеет место тогда и только тогда, когда имеет место и Y .	Двойная импликация или эквивалентность XY .

Антиоперации

антиконъюнкция	Штрих Шеффера
антидизъюнкция	Стрелка Пирса ↓
антиэквивалентность	Сумма по модулю 2 

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	P или Q	$P \cup Q$	P / Q	$P \downarrow Q$	$P \oplus Q$
И	И	И	И	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	Л	Л	И	И	Л

Тавтологически истинные и ложные высказывания

- Составные высказывания, принимающие истинные значения при любых истинных значениях своих компонент называются *тавтологиями* или *тавтологически истинными*.
- Составные высказывания, принимающие ложные значения при любых значениях своих компонент называются *противоречивыми* или *тавтологически ложными*.

Приоритет операций

Приоритет выполнения логических операций
(если нет скобок)

Приоритет	Операция		Обозначение
(Высший)	НЕ	NOT	$\neg, \bar{}$
I (Высокий)	И	AND	\wedge, \cdot
II (Средний)	ИЛИ, Искл. ИЛИ	OR, XOR	$\vee, +$ \oplus
V (Низкий)	ЕСЛИ ТО	IMP	\rightarrow
/ (Низший)	Эквивалент ность	EQU	\sim

Следствие и совместность

- Из высказывания P следует высказывание Q , если Q истинно всякий раз, когда истинно P .
- Говорят, что два высказывания являются логически несовместными, если из истинности одного необходимо следует ложность другого.
- Для проверки совместности высказываний по таблице истинности смотрят, есть ли хоть одна строка, где все составные высказывания истины, и если есть, то они совместны.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	P или Q	P и Q	P / Q	$P \downarrow Q$	$P \oplus Q$
И	И	И	И	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	Л	Л	И	И	Л



ПРЕДИКАТЫ И
КВАНТОРЫ

Предикаты

Предикатом называется утверждение, содержащее переменные, принимающее значение истины или лжи в зависимости от значений переменных. Например, выражение « x — целое число, удовлетворяющее соотношению $x = x^2$ » является предикатом, поскольку оно истинно при $x = 0$ или $x = 1$ и ложно в любом другом случае.

Логические операции можно применять и к предикатам. В общем случае истинность составного предиката в конечном счете зависит от значений входящих в него переменных. Однако существуют некоторые, еще неизвестные Вам логические операторы (называемые *кванторами*), применение которых к предикатам превращает последние в ложные или истинные высказывания.

Кванторы

\forall	<i>Квантор всеобщности</i>	<i>Для всех (for All)</i>
\exists	<i>Квантор существования</i>	<i>Существует (Exists)</i>
$!$	<i>Квантор единственности</i>	<i>Единственное</i>
\Rightarrow	<i>Символ следствия</i>	<i>Следует, что</i>
\Leftrightarrow	<i>Символ равносильности</i>	<i>Тогда и только тогда</i>
\in \notin \ni	<i>Символ принадлежности</i>	<i>Принадлежит (входит)</i>
$:$	<i>Символ разъяснения</i>	<i>Такой, что</i>
\cap (\cap)	<i>Символ пересечения (И)</i>	<i>И</i>
\cup (\cup)	<i>Символ объединения (ИЛИ)</i>	<i>Или</i>

Пример

Пример 2.6. Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны?

- (а) Сумма внутренних углов любого треугольника равна 180° .
- (б) У всех кошек есть хвост.
- (в) Найдется целое число x , удовлетворяющее соотношению $x^2 = 2$.
- (г) Существует простое четное число.

Примеры

Пример 2.7. Обозначим через $P(x)$ предикат « x — целое число и $x^2 = 16$ ». Выразите словами высказывание $\exists x P(x)$ и определите его истинностное значение.

Пример 2.8. Пусть $P(x)$ — предикат « x — вещественное число и $x^2 + 1 = 0$ ». Выразите словами высказывание $\exists x P(x)$ и определите его истинностное значение.

Отрицание высказывания из примера 2.8 записывается в следующем виде **не** $\exists x P(x)$. Это, естественно, истинное высказывание, которое означает, что не существует вещественного числа x , удовлетворяющего условию $x^2 + 1 = 0$. Иными словами, каково бы ни было вещественное x , $x^2 + 1 \neq 0$. В символьной форме это можно записать как $\forall x$ **не** $P(x)$.

Отрицание кванторов

$$\text{не } \exists x : P(x) \Leftrightarrow \forall x : \text{не } P(x);$$

$$\text{не } \forall x : P(x) \Leftrightarrow \exists x : \text{не } P(x)$$

Пример 2.9. Предположим, что x и y — вещественные числа, а $P(x, y)$ обозначает предикат $x + y = 0$. Выразите каждое из высказываний словами и определите их истинность.

(а) $\forall x \exists y P(x, y);$

(б) $\exists y \forall x P(x, y).$



МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ



При доказательстве теорем применяется логическая аргументация. Доказательства в информатике — неотъемлемая часть проверки корректности алгоритмов. Необходимость доказательства возникает, когда нам нужно установить истинность высказывания вида $(P \Rightarrow Q)$. Существует несколько стандартных типов доказательств, включающих следующие

1. *Прямое рассуждение.* Предполагаем, что высказывание P истинно и показываем справедливость Q . Такой способ доказательства исключает ситуацию, когда P истинно, а Q — ложно, поскольку именно в этом и только в этом случае импликация $(P \Rightarrow Q)$ принимает ложное значение (см. табл. 2.5 на стр. 27).

2. *Обратное рассуждение.* Предполагаем, что высказывание Q ложно и показываем ошибочность P . То есть, фактически, прямым способом проверяем истинность импликации $((\text{не } Q) \Rightarrow (\text{не } P))$, что согласно примеру 2.5, логически эквивалентно истинности исходного утверждения $(P \Rightarrow Q)$.

Типы доказательств

3. *Метод «от противного».* Предположив, что высказывание P истинно, а Q ложно, используя аргументированное рассуждение, получаем противоречие. Этот способ опять-таки основан на том, что импликация $(P \Rightarrow Q)$ принимает ложное значение только тогда, когда P истинно, а Q ложно.

Примеры

Пример 2.10. Покажите прямым способом рассуждений, что произведение xu двух нечетных целых чисел x и y всегда нечетно.

Пример 2.11. Пусть n — натуральное число. Покажите, используя обратный способ доказательства, что если n^2 нечетно, то и n нечетно.

Пример 2.12. Методом «от противного» покажите, что решение уравнения $x^2 = 2$ является иррациональным числом, т. е. не может быть записано в виде дроби с целыми числителем и знаменателем.

Решения

Решение. Прежде всего заметим, что любое нечетное число, и в частности x , можно записать в виде $x = 2m + 1$, где m — целое число. Аналогично, $y = 2n + 1$ с некоторым целым n .

Значит, произведение

$$xy = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1$$

тоже является нечетным числом.

Решение. Отрицанием высказывания о нечетности числа n^2 служит утверждение « n^2 четно», а высказывание о четности n является отрицанием утверждения «число n нечетно». Таким образом, нам нужно показать прямым способом рассуждений, что четность числа n влечет четность его квадрата n^2 .

Так как n четно, то $n = 2m$ для какого-то целого числа m . Следовательно, $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$ — четное число.

Решение. Здесь нам следует допустить, что решение x уравнения $x^2 = 2$ рационально, т. е. записывается в виде дроби $x = \frac{m}{n}$ с целыми m и n , причем $n \neq 0$. Предположив это, нам необходимо получить противоречие либо с предположением, либо с каким-то ранее доказанным фактом.

Как известно, рациональное число неоднозначно записывается в виде дроби. Например, $x = \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{3m}{3n}$ и т. д. Однако можно считать, что m и n не имеют общих делителей. В этом случае неоднозначность записи пропадает.

Итак, предполагаем дополнительно, что дробь $x = \frac{m}{n}$ несократима (m и n не имеют общих делителей). По условию число x удовлетворяет уравнению $x^2 = 2$. Значит, $(\frac{m}{n})^2 = 2$, откуда $m^2 = 2n^2$.

Из последнего равенства следует, что число m^2 четно. Следовательно, m тоже четно (см. упр. а(б)) и может быть представлено в виде $m = 2p$ для какого-то целого числа p . Подставив эту информацию в равенство $m^2 = 2n^2$, мы получим, что $4p^2 = 2n^2$, т. е. $n^2 = 2p^2$. Но тогда n тоже является четным числом. Таким образом, мы показали, что как m , так и n — четные числа. Поэтому они обладают общим делителем 2. Если же теперь вспомнить, что мы предполагали отсутствие общего делителя у числителя и знаменателя дроби $\frac{m}{n}$, то увидим явное противоречие.

Найденное противоречие приводит нас к однозначному выводу: решение уравнения $x^2 = 2$ не может быть рациональным числом, т. е. оно иррационально.

Метод математической индукции

Компьютерную программу в информатике называют *правильной* или *корректной*, если она делает то, что указано в ее спецификации. Несмотря на то, что тестирование программы может давать ожидаемый результат в случае каких-то отдельных начальных данных, необходимо доказать приемами формальной логики, что правильные выходные данные будут получаться при любых вводимых начальных значениях. О доказательствах такого сорта будет рассказано в приложении, размещенном в конце этой главы.

Проверка корректности алгоритма, содержащего циклы, нуждается в довольно мощном методе доказательства, который называется «*математическая индукция*». Продемонстрируем преимущества этого важного метода, доказав корректность следующего рекуррентного алгоритма, определяющего максимальный элемент из набора $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ натуральных чисел.

Пример

```
begin
   $i = 0$ ;
   $M = 0$ ;
  while  $i < n$  do
    begin
       $j = j + 1$ ;
       $M = \max(M, a)$ ;
    end
  end
end
```

j	M	$j < 4?$
0	0	Да
1	4	Да
2	7	Да
3	7	Да
4	8	Нет

Решение

Рассмотрим вводимый набор $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ длины n и обозначим через M_k значение переменной M после k -го прохода цикла.

1. Если мы вводим набор a_1 длины 1, то цикл сделает только один проход и M присвоится наибольшее значение из 0 и a_1 , которым, очевидно, будет a_1 (натуральные числа больше 0). В этом простом случае вывод будет правильным.
2. Если после k -го прохода цикла M_k — наибольший элемент из набора a_1, a_2, \dots, a_k , то после следующего прохода M_{k+1} будет равно $\max(M_k, a_{k+1})$, т. е. максимальному элементу набора $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$.

Принцип математической индукции

- Проверить справедливость утверждения при $n=1$.
- Предположив, что утверждение верно при $n=k$, доказать, что оно верно при $n=k+1$.
- Тогда утверждение верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

Принцип математической индукции

Пусть $P(n)$ — предикат, определенный для всех натуральных чисел n .

Предположим, что

- 1. $P(1)$ истинно и*
- 2. $\forall k \geq 1$ импликация $(P(k) \Rightarrow P(k + 1))$ верна.*

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном значении n .

$$1+2+3+\dots+100=$$

$$1+2+\dots+n=$$

Рачинский «Устный счет»

$$(10^2+11^2+12^2+12^2+14^2)/365$$



Пример

Пример 2.13. Докажите по индукции, что равенство

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

выполнено при всех натуральных n .

Решение. Пусть $P(n)$ — предикат $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

В случае $n = 1$ левая часть равенства — просто 1, а вычисляя правую часть, получаем

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Следовательно, $P(1)$ истинно.

Предположим теперь, что равенство $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ имеет место для какого-то натурального числа k . Тогда

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= (1 + 2 + \dots + k) + (k + 1) = \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \\ &= \frac{1}{2}(k(k+1) + 2(k+1)) = \\ &= \frac{1}{2}((k+2)(k+1)) = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом натуральном k импликация
 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

справедлива. Значит, по принципу математической индукции, предикат $P(n)$ имеет истинное значение при всех натуральных n .



КОРРЕКТНОСТЬ АЛГОРИТМОВ

Приложение.



Корректность простого оператора

Чтобы доказать корректность алгоритма (иными словами, убедиться, что он делает именно то, что и предусмотрено), нам нужно проверить все изменения переменных, в нем используемых *до*, *в течение* и *после* работы алгоритма. Эти изменения и условия можно рассматривать как небольшие утверждения или предикаты.

Пусть P — предикат, истинный для входных данных алгоритма A , и Q — предикат, описывающий условия, которым должны удовлетворять выходные данные. Высказывание $\{P\} A \{Q\}$ означает, что «если работа алгоритма A начинается с истинного значения предиката P , то она закончится при истинном значении Q ». Предикат P называется *входным условием* или *предусловием*, а Q — *выходным*

Пример

Задача 1. Докажите корректность алгоритма *Разность*.

```
Разность  
begin  
     $z = x - y;$   
end
```

Решение. В данном случае предусловием P являются равенства $x = x_1$ и $y = y_1$. Постусловие Q — это $z = x_1 - y_1$. Предикат

$$\{P\} \text{ *Разность* } \{Q\}$$

читается как «если $x = x_1$ и $y = y_1$, то $z = x_1 - y_1$ ». Истинность последнего предиката легко проверяется подстановкой $x = x_1$ и $y = y_1$ в тело алгоритма, содержащего переменные z , x и y . С формальной точки зрения соотношения $z = x - y$, $x = x_1$ и $y = y_1$ влекут тождество $z = x_1 - y_1$.

Корректность составного оператора

Когда в алгоритме A происходит много различных действий с переменными, мы разбиваем его на подходящие отрезки A_1, \dots, A_n и доказываем цепочку утверждений вида

$$\{P\} A_1 \{Q_1\}, \{Q_1\} A_2 \{Q_2\}, \dots, \{Q_{n-1}\} A_n \{Q\},$$

где постусловие любого отрезка служит предусловием следующего.

Пример

Задача 2. Докажите правильность алгоритма «*Квадратный многочлен*».

Квадратный многочлен

{ x — вещественное число}

begin

$$y = ax;$$

$$y = (y + b)x;$$

$$y = y + c;$$

end

{ $y = ax^2 + bx + c$ }

Решение. Разобьем алгоритм на кусочки, зафиксировав при этом обозначения пред- и постусловий.

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \{x = x_1\} \\ &\text{begin} \\ &\quad y = ax; \\ Q_1 &\rightarrow \{y = ax_1 \text{ и } x = x_1\} \\ &\quad y = (y + b)x; \\ Q_2 &\rightarrow \{y = ax_1^2 + bx_1\} \\ &\quad y = y + c; \\ &\text{end} \\ Q &\rightarrow \{y = ax_1^2 + bx_1 + c\} \end{aligned}$$

Подстановки, сделанные выше, показывают, что все высказывания

$$\begin{aligned} \{P\} \ y := ax \ \{Q_1\}, \\ \{Q_1\} \ y := (y + b)x \ \{Q_2\}, \\ \{Q_2\} \ y := y + c \ \{Q\}, \text{ —} \end{aligned}$$

верны. Следовательно, предикат

$\{P\}$ *Квадратный многочлен* $\{Q\}$

истинен, т. е. алгоритм *Квадратный многочлен* корректен.

Корректность условного оператора

```
if условие then  
    высказывание 1;  
else  
    высказывание 2;
```

вводит предусловие P , а на выходе дает условие Q . Тогда следует доказать истинность обоих предикатов

$\{P \text{ и } \text{условие}\} \text{ высказывание } 1 \{Q\}$

и

$\{P \text{ и не (условие)}\} \text{ высказывание } 2 \{Q\}$.

Пример

```
Модуль  
{x — вещественное число}  
begin  
  if x ≥ 0    then  
    abs = x;  
  else  
    abs = -x;  
  
end  
{abs — модуль числа x}
```

Решение. Предусловием P в нашем алгоритме служит $\{x = x_1\}$, а соответствующим постусловием Q является $\{abs \text{ — модуль числа } x\}$.

Предикат $\{P \text{ и } x \geq 0\} \text{ } abs := x \{Q\}$ имеет истинное значение, поскольку модуль неотрицательного числа x_1 совпадает с ним самим.

Предикат $\{P \text{ и не } (x \geq 0)\} \text{ } abs := -x \{Q\}$ тоже истинен, так как модуль отрицательного числа x_1 отличается от него знаком.

Корректность циклов

Использование пред- и постусловий при проверке алгоритмов, в которых участвуют циклы типа **while ... do**, довольно громоздко. Предпочтительнее доказывать корректность таких алгоритмов методом математической индукции.

В задаче 4 цикл **for** ограничен определенным числом итераций (проходов). В том случае, когда число петель цикла заранее не определено, как в цикле **while ... do**, при доказательстве индукцией следует предположить, что число проходов все же ограничено и показать правильность выходных данных. После чего необходимо будет проверить, что число петель такого цикла действительно конечно.

Пример

Задача 4. Докажите по индукции корректность алгоритма *Квадрат*.

```
Квадрат  
{n — натуральное число}  
begin  
    sq = 0;  
    for i = 1 to n do  
        sq = sq + 2i - 1;  
end  
{sq = n2}
```

Решение. Пусть $P(n)$ обозначает предикат « $sq = n^2$ после n -го прохода цикла», а sq_k — значение переменной sq после k -го прохода цикла. Покажем, что

$$(1) \quad sq_1 = 1^2;$$

$$(2) \quad \text{если } sq_k = k^2, \text{ то } sq_{k+1} = (k+1)^2.$$

Очевидно, что после первого прохода цикла $sq_1 = 1$ и пункт (1) выполнен. Предположим, что после k -ой петли цикла $sq_k = k^2$. Тогда после следующего прохода

$$sq_{k+1} = sq_k + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Таким образом, пункт (2) тоже имеет место.

Итак, мы установили, что $P(1)$ истинно (п. (1)). Кроме того, по второму пункту импликация $((P(k) \Rightarrow P(k+1)))$ справедлива при любом $k \geq 1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции, $P(n)$ истинно для всех натуральных n .