ЛОГИКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Лутковская Е.А.

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Логика высказываний

Стандартными блоками формальной логики являются высказывания. *Высказыванием* называется утверждение, которое имеет значение истинности, т.е. может быть **истинным** (обозначается буквой И) или **ложным** (обозначается Л). Например,

- земля плоская;
- Сара — доктор;
- 29 — простое число.

Составные высказывания

Каждое из высказываний можно обозначить своей буквой. Пусть, например, P обозначает высказывание «земля плоская», Q — «Сара — доктор» и R — «29 — простое число».

Используя такие логические операции, как **не**, **или**, **и**, можно построить новые, так называемые *составные высказывания*, компануя более простые. Например,

- (**не** P) — это высказывание «земля не плоская»;
- (P **или** Q) — «земля плоская или Сара — доктор»;
- (P **и** Q) — «земля плоская и Сара — доктор».

Пример 2.1. Обозначим через P высказывание «логика — забава», а через Q — «сегодня пятница». Требуется выразить каждое из следующих составных высказываний в символьной форме.

(а) Логика — не забава, и сегодня пятница.

(б) Сегодня не пятница, да и логика — не забава.

(в) Либо логика — забава, либо сегодня пятница.

Отрицание ¬ ‾ $\bar{Q}$

Отрицанием произвольного высказывания P называется высказывание вида (**не** P), чье истинностное значение строго противоположно значению P. Определяющая таблица истинности отрицания высказывания приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

P	(**не** P)
И	Л
Л	И

Конъюнкция ∩ (∧)&·

Конъюнкцией или *логическим умножением* двух высказываний P и Q называют составное высказывание вида (P **и** Q). Оно принимает истинное значение только в том случае, когда истинны обе его составные части. Такое определение хорошо согласуется с обычным пониманием союза «и» в разговорном языке. Соответствующая таблица истинности — табл. 2.2.

Таблица 2.2

P	Q	(P **и** Q)
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкция ∪(∨)+

Дизъюнкцией или *логическим сложением* двух высказываний P и Q называется составное высказывание (P **или** Q). Оно истинно, если хотя бы одна из ее составных частей имеет истинное значение, что в некотором смысле также согласуется с обыденным пониманием союза «или». Другими словами, (P **или** Q) означает, что «или P, или Q, или и то, и другое». Таблица истинности дизъюнкции обозначена как табл. 2.3.

Таблица 2.3

P	Q	(P **или** Q)
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Эквивалентность $\Leftrightarrow$ $\leftrightarrow$

- Два составных высказывания, построенные из одних и тех же простых высказываний, но разными способами, называются логически эквивалентными, если они имеют одинаковые таблицы истинности на всех возможных наборах значений истинности простых высказываний, из которых они состоят.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Пример

Пример 2.3. Показать, что высказывание (**не** (P **и** (**не** Q))) логически эквивалентно утверждению ((**не** P) **или** Q).

Решение. Заполним совместную таблицу истинности (табл. 2.4) для составных высказываний:

$$R = (\textbf{не}\ (P\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\ Q))) \qquad \text{и} \qquad S = ((\textbf{не}\ P)\ \textbf{или}\ Q).$$

Вспомогательные колонки используются для построения обоих выражений из P и Q.

Таблица 2.4

P	Q	**не** P	**не** Q	P **и** (**не** Q)	R	S
И	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	И	И

Две последние колонки таблицы идентичны. Это означает, что высказывание R логически эквивалентно высказыванию S.

Импликация→⇒

В логике условное высказывание «если P, то Q» принято считать ложным только в том случае, когда *предпосылка* P истинна, а *заключение* Q ложно. В любом другом случае оно считается истинным.

Используя символ импликации «⇒», мы пишем $P \Rightarrow Q$ для обозначения условного высказывания «если P, то Q». Такая запись читается как «из P следует Q» или, «P влечет Q», или «P достаточно для Q», или «Q необходимо для P».

Таблица истинности импликации приведена в табл. 2.5.

Таблица 2.5

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример

Пример 2.4. Пусть P — (ложное) высказывание $1 = 5$, Q — (тоже ложное) высказывание $3 = 7$ и R — (истинное) утверждение $4 = 4$. Показать, что условные высказывания: «если P, то Q» и «если P, то R», — оба истинны.

Решение. Если $1 = 5$, то, прибавляя 2 к обеим частям равенства, мы получим, что $3 = 7$. Следовательно, высказывание «если P, то Q» справедливо. Вычтем теперь из обеих частей равенства $1 = 5$ число 3 и придем к $-2 = 2$. Поэтому $(-2)^2 = 2^2$, т. е. $4 = 4$. Таким образом, «если P, то R» тоже верно.

Контр-позиция

Пример 2.5. Высказывание ((**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P)) называется *противоположным* или *контрапозитивным* к высказыванию ($P \Rightarrow Q$). Показать, что ((**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P)) логически эквивалентно высказыванию ($P \Rightarrow Q$).

Решение. Рассмотрим совместную таблицу истинности (табл. 2.6).

Таблица 2.6

P	Q	**не** P	**не** Q	$(P \Rightarrow Q)$	((**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P))
И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Поскольку два последних столбца этой таблицы совпадают, то и высказывания, о которых идет речь, логически эквивалентны.

Конверсия импликации

- Высказывание $Q \to P$ называется конверсией импликации $P \to Q$ или обратной импликацией.
- Многие из ошибок в рассуждениях происходят от смешивания высказывания с его конверсией.
- Например, можно сказать, что если функция в данной точке имеет экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, но нельзя сказать, что если производная в данной точке равна нулю, то функция в этой точке имеет экстремум (м.б. это точка перегиба).

С импликацией связано понятие необходимых и достаточных условий в математике

X является достаточным условием для *У*.	Если имеет место *X*, то имеет место и *У*.	Импликация $X \to У$.
X является днеобходимым условием для *У*.	Если имеет место *У*, то имеет место *X*.	Конверсия импликации $У \to X$.
X является необходимым и достаточным условием для *У*.	*X* имеет место тогда и только тогда, когда имеет место и *У*.	Двойная импликация или эквивалентность *XУ*.

Антиоперации

антиконъюнкция	Штрих Шеффера |
антидизъюнкция	Стрелка Пирса ↓
антиэквивалентность	Сумма по модулю 2 $\oplus$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	*P или Q*	*P и Q*	*P / Q*	*P↓Q*	$P \oplus Q$
И	И	И	И	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	Л	Л	И	И	Л

Тождественно истинные и ложные высказывания

- Составные высказывания, принимающие истинные значения при любых истинносных значениях своих компонент называются *тавтологиями* или *тождественно истинными.*
- Составные высказывания, принимающие ложные значения при любых значениях своих компонент называются *противоречивыми* или *тождественно ложными.*

Приоритет операций

Приоритет выполнения логических операций
(если нет скобок)

Приоритет	Операция		Обозначение
(Высший)	НЕ	NOT	¬, ¯
I (Высокий)	И	AND	∧, ·
II (Средний)	ИЛИ, Искл. ИЛИ	OR, XOR	∨, + ⊕
V (Низкий)	ЕСЛИ ТО	IMP	→
/ (Низший)	Эквивалент ность	EQU	~

Следствие и совместность

- Из высказывания P следует высказывание Q, если Q истинно всякий раз, когда истинно P.
- Говорят, что два высказывания являются логически несовместными, если из истинности одного необходимо следует ложность другого.
- Для проверки совместности высказываний по таблице истинности смотрят, есть ли хоть одна строка, где все составные высказывания истины, и если есть, то они совместны.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	*P или Q*	*P и Q*	$P \mid Q$	$P \downarrow Q$	$P \oplus Q$
И	И	И	И	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	Л	Л	И	И	Л

ПРЕДИКАТЫ И КВАНТОРЫ

Предикаты

Предикатом называется утверждение, содержащее переменные, принимающее значение истины или лжи в зависимости от значений переменных. Например, выражение «x — целое число, удовлетворяющее соотношению $x = x^2$» является предикатом, поскольку оно истинно при $x = 0$ или $x = 1$ и ложно в любом другом случае.

Логические операции можно применять и к предикатам. В общем случае истинность составного предиката в конечном счете зависит от значений входящих в него переменных. Однако существуют некоторые, еще незнакомые Вам логические операторы (называемые *кванторами*), применение которых к предикатам превращает последние в ложные или истинные высказывания.

Кванторы

□	*Квантор всеобщности*	*Для всех (for All)*
□	*Квантор существования*	*Существует (Exists)*
!	*Квантор единственности*	*Единственное*
□	*Символ следствия*	*Следует, что*
□	*Символ равносильности*	*Тогда и только тогда*
□ □□ □	*Символ принадлежности*	*Принадлежит (входит)*
:	*Символ разъяснения*	*Такой, что*
□ (□)	*Символ пересечения (И)*	*И*
□ (□)	*Символ объединения (ИЛИ)*	*Или*

Пример

Пример 2.6. Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны?

(а) Сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°.

(б) У всех кошек есть хвост.

(в) Найдется целое число x, удовлетворяющее соотношению $x^2 = 2$.

(г) Существует простое четное число.

Примеры

Пример 2.7. Обозначим через $P(x)$ предикат «x — целое число и $x^2 = 16$». Выразите словами высказывание $\exists x \quad P(x)$ и определите его истинностное значение.

Пример 2.8. Пусть $P(x)$ — предикат «x — вещественное число и $x^2+1 = 0$». Выразите словами высказывание $\exists x \quad P(x)$ и определите его истинностное значение.

Отрицание высказывания из примера 2.8 записывается в следующем виде **не** $\exists x \quad P(x)$. Это, естественно, истинное высказывание, которое означает, что не существует вещественного числа x, удовлетворяющего условию $x^2 + 1 = 0$. Иными словами, каково бы ни было вещественное x, $x^2 + 1 \neq 0$. В символьной форме это можно записать как $\forall x$ **не** $P(x)$.

Отрицание кванторов

$$\textbf{не}\ \exists x:\ P(x) \Leftrightarrow \forall x: \textbf{не}\ P(x);$$

$$\textbf{не}\ \forall x: P(x) \Leftrightarrow \exists x:\ \textbf{не}\ P(x)$$

Пример 2.9. Предположим, что x и y — вещественные числа, а $P(x, y)$ обозначает предикат $x + y = 0$. Выразите каждое из высказываний словами и определите их истинность.

(а) $\forall x\ \exists y \quad P(x, y)$;

(б) $\exists y \quad \forall x\ P(x, y)$.

МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

При доказательстве теорем применяется логическая аргументация. Доказательства в информатике — неотъемлемая часть проверки корректности алгоритмов. Необходимость доказательства возникает, когда нам нужно установить истинность высказывания вида $(P \Rightarrow Q)$. Существует несколько стандартных типов доказательств, включающих следующие

1. *Прямое рассуждение.* Предполагаем, что высказывание P истинно и показываем справедливость Q. Такой способ доказательства исключает ситуацию, когда P истинно, а Q — ложно, поскольку именно в этом и только в этом случае импликация $(P \Rightarrow Q)$ принимает ложное значение (см. табл. 2.5 на стр. 27).

2. *Обратное рассуждение.* Предполагаем, что высказывание Q ложно и показываем ошибочность P. То есть, фактически, прямым способом проверяем истинность импликации ((**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P)), что согласно примеру 2.5, логически эквивалентно истинности исходного утверждения $(P \Rightarrow Q)$.

Типы доказательств

3. Метод «от противного». Предположив, что высказывание P истинно, а Q ложно, используя аргументированное рассуждение, получаем противоречие. Этот способ опять-таки основан на том, что импликация $(P \Rightarrow Q)$ принимает ложное значение только тогда, когда P истинно, а Q ложно.

Примеры

Пример 2.10. Покажите прямым способом рассуждений, что произведение xy двух нечетных целых чисел x и y всегда нечетно.

Пример 2.11. Пусть n — натуральное число. Покажите, используя обратный способ доказательства, что если n^2 нечетно, то и n нечетно.

Пример 2.12. Методом «от противного» покажите, что решение уравнения $x^2 = 2$ является иррациональным числом, т. е. не может быть записано в виде дроби с целыми числителем и знаменателем.

Решения

Решение. Прежде всего заметим, что любое нечетное число, и в частности x, можно записать в виде $x = 2m + 1$, где m — целое число. Аналогично, $y = 2n + 1$ с некоторым целым n.

Значит, произведение

$$xy = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1$$

тоже является нечетным числом.

Решение. Отрицанием высказывания о нечетности числа n^2 служит утверждение «n^2 четно», а высказывание о четности n является отрицанием утверждения «число n нечетно». Таким образом, нам нужно показать прямым способом рассуждений, что четность числа n влечет четность его квадрата n^2.

Так как n четно, то $n = 2m$ для какого-то целого числа m. Следовательно, $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$ — четное число.

Решение. Здесь нам следует допустить, что решение x уравнения $x^2 = 2$ рационально, т. е. записывается в виде дроби $x = \frac{m}{n}$ с целыми m и n, причем $n \neq 0$. Предположив это, нам необходимо получить противоречие либо с предположением, либо с каким-то ранее доказанным фактом.

Как известно, рациональное число неоднозначно записывается в виде дроби. Например, $x = \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{3m}{3n}$ и т. д. Однако можно считать, что m и n не имеют общих делителей. В этом случае неоднозначность записи пропадает.

Итак, предполагаем дополнительно, что дробь $x = \frac{m}{n}$ несократима (m и n не имеют общих делителей). По условию число x удовлетворяет уравнению $x^2 = 2$. Значит, $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, откуда $m^2 = 2n^2$.

Из последнего равенства следует, что число m^2 четно. Следовательно, m тоже четно (см. упр. а(б)) и может быть представлено в виде $m = 2p$ для какого-то целого числа p. Подставив эту информацию в равенство $m^2 = 2n^2$, мы получим, что $4p^2 = 2n^2$, т. е. $n^2 = 2p^2$. Но тогда n тоже является четным числом. Таким образом, мы показали, что как m, так и n — четные числа. Поэтому они обладают общим делителем 2. Если же теперь вспомнить, что мы предполагали отсутствие общего делителя у числителя и знаменателя дроби $\frac{m}{n}$, то увидим явное противоречие.

Найденное противоречие приводит нас к однозначному выводу решение уравнения $x^2 = 2$ не может быть рациональным числом, т. е. оно иррационально.

Метод математической индукции

Компьютерную программу в информатике называют *правильной* или *корректной*, если она делает то, что указано в ее спецификации. Несмотря на то, что тестирование программы может давать ожидаемый результат в случае каких-то отдельных начальных данных, необходимо доказать приемами формальной логики, что правильные выходные данные будут получаться при любых вводимых начальных значениях. О доказательствах такого сорта будет рассказано в приложении, размещенном в конце этой главы.

Проверка корректности алгоритма, содержащего циклы, нуждается в довольно мощном методе доказательства, который называется *«математическая индукция»*. Продемонстрируем преимущества этого важного метода, доказав корректность следующего рекуррентного алгоритма, определяющего максимальный элемент из набора $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ натуральных чисел.

Пример

```
begin
    i = 0;
    M = 0;
        while i < n do
            begin
                j = j + 1;
                M = max(M, a);
            end
end
```

j	M	$j < 4?$
0	0	Да
1	4	Да
2	7	Да
3	7	Да
4	8	Нет

Решение

Рассмотрим вводимый набор $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ длины n и обозначим через M_k значение переменной M после k-го прохода цикла.

1. Если мы вводим набор a_1 длины 1, то цикл сделает только один проход и M присвоится наибольшее значение из 0 и a_1, которым, очевидно, будет a_1 (натуральные числа больше 0). В этом простом случае вывод будет правильным.

2. Если после k-го прохода цикла M_k — наибольший элемент из набора $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то после следующего прохода M_{k+1} будет равно $\max(M_k, a_{k+1})$, т. е. максимальному элементу набора $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$.

Принцип математической индукции

- Проверить справедливость утверждения при *n=1.*
- Предположив, что утверждение верно при n=k, доказать, что оно верно при *n=k+1.*
- Тогда утверждение верно $\forall\, n \in N$.

Принцип математической индукции

Пусть $P(n)$ — предикат, определенный для всех натуральных чисел n.
Предположим, что

1. $P(1)$ *истинно и*
2. $\forall k \geqslant 1$ *импликация* $(P(k) \Rightarrow P(k+1))$ *верна.*

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном значении n.

$1+2+3+...+100=$

$1+2+...+n=$

Рачинский «Устный счет»

$(10^2+11^2+12^2+12^2+14^2)/365$

Пример

Пример 2.13. Докажите по индукции, что равенство

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

выполнено при всех натуральных n.

Решение. Пусть $P(n)$ — предикат $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

В случае $n = 1$ левая часть равенства — просто 1, а вычисляя правую часть, получаем

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Следовательно, $P(1)$ истинно.

Предположим теперь, что равенство $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ имеет место для какого-то натурального числа k. Тогда

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k+1) &= (1 + 2 + \dots + k) + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= \frac{1}{2}\big(k(k+1) + 2(k+1)\big) = \\ &= \frac{1}{2}\big((k+2)(k+1)\big) = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом натуральном k импликация

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

справедлива. Значит, по принципу математической индукции, предикат $P(n)$ имеет истинное значение при всех натуральных n.

КОРРЕКТНОСТЬ АЛГОРИТМОВ

Приложение.

Корректность простого оператора

Чтобы доказать корректность алгоритма (иными словами, убедиться, что он делает именно то, что и предусмотрено), нам нужно проверить все изменения переменных, в нем используемых *до*, *в течение* и *после* работы алгоритма. Эти изменения и условия можно рассматривать как небольшие утверждения или предикаты.

Пусть P — предикат, истинный для входных данных алгоритма A, и Q — предикат, описывающий условия, которым должны удовлетворять выходные данные. Высказывание $\{P\}\,A\,\{Q\}$ означает, что «если работа алгоритма A начинается с истинного значения предиката P, то она закончится при истинном значении Q». Предикат P называется *входным условием* или *предусловием*, а Q — *выходным*

Пример

Задача 1. Докажите корректность алгоритма ***Разность***.

Разность
begin
$z = x - y$;
end

Решение. В данном случае предусловием P являются равенства $x = x_1$ и $y = y_1$. Постусловие Q — это $z = x_1 - y_1$. Предикат

$$\{P\}\ \textit{\textbf{Разность}}\ \{Q\}$$

читается как «если $x = x_1$ и $y = y_1$, то $z = x_1 - y_1$». Истинность последнего предиката легко проверяется подстановкой $x = x_1$ и $y = y_1$ в тело алгоритма, содержащего переменные z, x и y. С формальной точки зрения соотношения $z = x - y$, $x = x_1$ и $y = y_1$ влекут тождество $z = x_1 - y_1$.

Корректность составного оператора

Когда в алгоритме A происходит много различных действий с переменными, мы разбиваем его на подходящие отрезки $A_1, \ldots, A_n$ и доказываем цепочку утверждений вида

$$\{P\}\, A_1\, \{Q_1\},\ \{Q_1\}\, A_2\, \{Q_2\},\ \ldots,\ \{Q_{n-1}\}\, A_n\, \{Q\},$$

где постусловие любого отрезка служит предусловием следующего.

Пример

Задача 2. Докажите правильность алгоритма ***«Квадратный многочлен»***.

Квадратный многочлен
$\{x$ — вещественное число$\}$
begin
$y\ = ax;$
$y\ = (y + b)x;$
$y\ = y + c;$
end
$\{y = ax^2 + bx + c\}$

Решение. Разобьем алгоритм на кусочки, зафиксировав при этом обозначения пред- и постусловий.

$$
\begin{array}{ll}
P \rightarrow & \{x = x_1\} \\
& \textbf{begin} \\
& \qquad y = ax; \\
Q_1 \rightarrow & \{y = ax_1 \text{ и } x = x_1\} \\
& \qquad y = (y + b)x; \\
Q_2 \rightarrow & \{y = ax_1^2 + bx_1\} \\
& \qquad y = y + c; \\
& \textbf{end} \\
Q \rightarrow & \{y = ax_1^2 + bx_1 + c\}
\end{array}
$$

Подстановки, сделанные выше, показывают, что все высказывания

$$
\begin{array}{l}
\{P\}\ \boldsymbol{y := ax}\ \{Q_1\}, \\
\{Q_1\}\ \boldsymbol{y := (y + b)x}\ \{Q_2\}, \\
\{Q_2\}\ \boldsymbol{y := y + c}\ \{Q\}, \text{ —}
\end{array}
$$

верны. Следовательно, предикат $\{P\}$ ***Квадратный многочлен*** $\{Q\}$

истинен, т. е. алгоритм ***Квадратный многочлен*** корректен.

Корректность условного оператора

if *условие* **then**
высказывание 1;
else
высказывание 2;

вводит предусловие P, а на выходе дает условие Q. Тогда следует доказать истинность обоих предикатов

$$\{P \textbf{ и } \text{условие}\}\ \textbf{\textit{высказывание 1}}\ \{Q\}$$

и

$$\{P \textbf{ и не } (\text{условие})\}\ \textbf{\textit{высказывание 2}}\ \{Q\}.$$

Пример

Модуль
{x — вещественное число}
begin
    if $x \geqslant 0$ **then**
        $abc = x$;
        else
        $abs = -x$;
end
{abs — модуль числа x}

Решение. Предусловием P в нашем алгоритме служит $\{x = x_1\}$, а соответствующим постусловием Q является {abs — модуль числа x}.

Предикат $\{P$ **и** $x \geqslant 0\}$ $\boldsymbol{abs := x}$ $\{Q\}$ имеет истинное значение, поскольку модуль неотрицательного числа x_1 совпадает с ним самим.

Предикат $\{P$ **и не** $(x \geqslant 0)\}$ $\boldsymbol{abs := -x}$ $\{Q\}$ тоже истинен, так как модуль отрицательного числа x_1 отличается от него знаком.

Корректность циклов

Использование пред- и постусловий при проверке алгоритмов, в которых участвуют циклы типа **while ... do**, довольно громоздко. Предпочтительнее доказывать корректность таких алгоритмов методом математической индукции.

В задаче 4 цикл **for** ограничен определенным числом итераций (проходов). В том случае, когда число петель цикла заранее не определено, как в цикле **while ... do**, при доказательстве индукцией следует предположить, что число проходов все же ограничено и показать правильность выходных данных. После чего необходимо будет проверить, что число петель такого цикла действительно конечно.

Пример

Задача 4. Докажите по индукции корректность алгоритма ***Квадрат***.

Квадрат
$\{n$ — натуральное число$\}$
begin
    $sq = 0;$
    for $i = 1$ **to** n **do**
        $sq = sq + 2i - 1;$
end
$\{sq = n^2\}$

Решение. Пусть $P(n)$ обозначает предикат «$sq = n^2$ после n-го прохода цикла», а sq_k — значение переменной sq после k-го прохода цикла. Покажем, что

(1) $sq_1 = 1^2$;

(2) если $sq_k = k^2$, то $sq_{k+1} = (k+1)^2$.

Очевидно, что после первого прохода цикла $sq_1 = 1$ и пункт (1) выполнен. Предположим, что после k-ой петли цикла $sq_k = k^2$. Тогда после следующего прохода

$$sq_{k+1} = sq_k + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Таким образом, пункт (2) тоже имеет место.

Итак, мы установили, что $P(1)$ истинно (п. (1)). Кроме того, по второму пункту импликация $((P(k) \Rightarrow P(k+1))$ справедлива при любом $k \geqslant 1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции, $P(n)$ истинно для всех натуральных n.