

# I. МЕХАНИКА И ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

## 1. Кинематика поступательного и вращательного движений материальной точки

Механическим движением тел называют изменение их положения (или положения их частей) в пространстве с течением времени. В основе классической механики лежат законы Ньютона.

Кинематика изучает механическое движение с геометрической точки зрения и не рассматривает причины, вызывающие это движение. В механике рассматривается движение таких объектов, как материальная точка и абсолютно твердое тело.

Материальной точкой называется тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь.

Абсолютно твёрдым телом называется тело, деформацией которого в данных условиях можно пренебречь. Абсолютно твёрдое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

### 1.1. Кинематические характеристики движения материальной точки

Описать движение материальной точки – значит знать ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Системой отсчёта называется система координат, связанная с телом отсчёта и снабжённая синхронизированными часами. Наиболее часто используется прямоугольная декартова система координат (рис. 1).

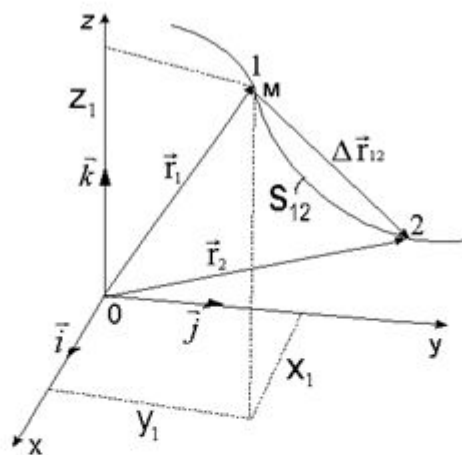


Рис. 1

Положение материальной точки характеризуется радиусом-вектором  $\vec{r}$ , проведённым из начала координат в данную точку (рис. 1). Проекции радиуса-вектора на координатные оси соответствуют координатам точки в выбранной системе координат (рис. 1):

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} .$$

Движение материальной точки задано, если известна зависимость координат точки от времени, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ или } x = x(t), y = y(t), z = z(t) .$$

Данные уравнения являются кинематическими уравнениями движения материальной точки, или законом движения точки.

В процессе движения конец радиуса-вектора, связанный с точкой, описывает в пространстве кривую, называемую траекторией движения материальной точки. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения.

**Перемещением** материальной точки называют вектор, проведённый из начальной точки в конечную точку траектории (рис. 1):

$$\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1).$$

Вектор  $\Delta \vec{r}_{12}$  может быть выражен через приращения координат и орты соответствующих осей (единичные векторы, направленные по осям):

$$\Delta \vec{r}_{12} = \Delta x_{12} \vec{i} + \Delta y_{12} \vec{j} + \Delta z_{12} \vec{k}.$$

Модуль вектора перемещения можно определить следующим образом:

$$|\Delta \vec{r}_{12}| = \sqrt{\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2 + \Delta z_{12}^2}.$$

**Путь** материальной точки  $S_{12}$  – это длина траектории.

**Скорость** – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения положения тела в пространстве, равная перемещению тела за единицу времени. Различают среднюю и мгновенную скорости.

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}} \quad - \text{средняя скорость};$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad - \text{мгновенная скорость};$$

$$\langle |\vec{v}| \rangle = \frac{S_{12}}{\Delta t_{12}} \quad - \text{среднее значение модуля скорости}.$$

Вектор средней скорости направлен так же, как и вектор перемещения  $\Delta \vec{r}_{12}$ . Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения так же, как вектор элементарного перемещения:  $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$ . Так как  $|d\vec{r}| = dS$ , где  $dS$  – элементарный

путь, то модуль мгновенной скорости равен производной пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

В декартовой системе координат скорость можно представить через её проекции на оси:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

$$\text{где } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль скорости может быть найден по следующей формуле:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

При рассмотрении движения тела относительно двух различных инерциальных систем отсчета используют классический закон сложения скоростей: скорость тела относительно неподвижной системы отсчета ( $\vec{v}_H$ ) равна векторной сумме скорости тела относительно движущейся системы ( $\vec{v}_D$ ) и скорости самой движущейся системы относительно неподвижной ( $\vec{v}_C$ ):

$$\vec{v}_H = \vec{v}_D + \vec{v}_C.$$

**Ускорение** – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости с течением времени, равная приращению скорости за единицу времени. Различают среднее и мгновенное ускорения.

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}_{12}}{\Delta t_{12}} \text{ – среднее ускорение,}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \text{ – мгновенное ускорение.}$$

Вектор ускорения может быть представлен через его проекции на координатные оси:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

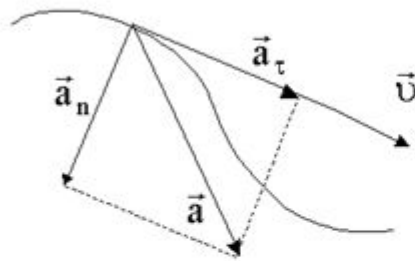
$$\text{где } a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Модуль ускорения можно определить следующим образом:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

## 1.2. Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения

Часто используется представление ускорения через две составляющие: тангенциальное и нормальное ускорения (рис. 2):



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Рис. 2

**Тангенциальное ускорение** характеризует изменение скорости по модулю (величине) и направлено по касательной к траектории:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau},$$

где  $\frac{dv}{dt}$  – производная модуля скорости,  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной, совпадающий по направлению со скоростью.

**Нормальное ускорение** характеризует изменение скорости по направлению и направлено по радиусу кривизны к центру кривизны траектории в данной точке:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n},$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории,  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали.

Модуль вектора ускорения может быть найден по формуле

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}.$$



**Основная задача кинематики** заключается в нахождении закона движения материальной точки. Для этого используются следующие соотношения:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt; \quad \bar{v} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{a} \cdot dt + \bar{v}_0; \quad \bar{r} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{v} \cdot dt + \bar{r}_0; \quad \Delta \bar{r}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{v} \cdot dt;$$

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^t \left[ \bar{v}_0 + \int_{t_0}^t \bar{a}(t) \cdot dt \right] dt.$$

Частные случаи прямолинейного движения:

1) равномерное прямолинейное движение:  $\bar{a} = 0, \bar{v} = \bar{v}_0, \bar{r} = \bar{v}t + \bar{r}_0;$

2) равнопеременное прямолинейное движение:  $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a}t^2}{2}.$

#### 1.4. Вращательное движение и его кинематические характеристики

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. Для характеристики вращательного движения вводятся следующие кинематические характеристики (рис. 3).

**Угловое перемещение**  $d\vec{\varphi}$  – вектор, численно равный углу поворота тела  $d\varphi$  за время  $dt$  и направленный вдоль оси вращения так, что, глядя вдоль него, поворот тела наблюдается происходящим по часовой стрелке.

**Угловая скорость**  $\vec{\omega}$  – характеризует быстроту и направление вращения тела, равна производной угла поворота по времени и направлена вдоль оси вращения как угловое перемещение.

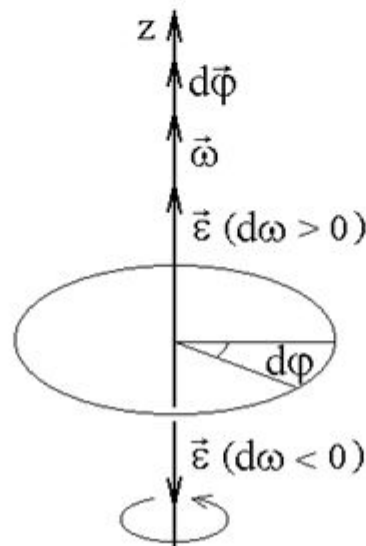


Рис.3

При вращательном движении справедливы следующие формулы:

$$\varphi = \int \omega \cdot dt + \varphi_0; \quad \bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}; \quad d\varphi = \omega \cdot dt.$$

**Угловое ускорение**  $\bar{\varepsilon}$  характеризует быстроту изменения угловой скорости с течением времени, равно первой производной угловой скорости и направлено вдоль оси вращения:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}; \quad d\omega = \varepsilon \cdot dt; \quad \omega = \int \varepsilon \cdot dt + \omega_0.$$

Зависимость  $\varphi = \varphi(t)$  выражает закон вращения тела.

При равномерном вращении:  $\varepsilon = 0$ ,  $\omega = \text{const}$ ,  $\varphi = \omega t$ .

При равнопеременном вращении:  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\varepsilon}t$ ,

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}.$$

Для характеристики равномерного вращательного движения используются период вращения и частота вращения.

**Период вращения**  $T$  – время одного оборота тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

**Частота вращения**  $\nu$  – количество оборотов, совершаемых телом за единицу времени.

Угловая скорость может быть выражена следующим образом:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Связь между угловыми и линейными кинематическими характеристиками (рис. 4):

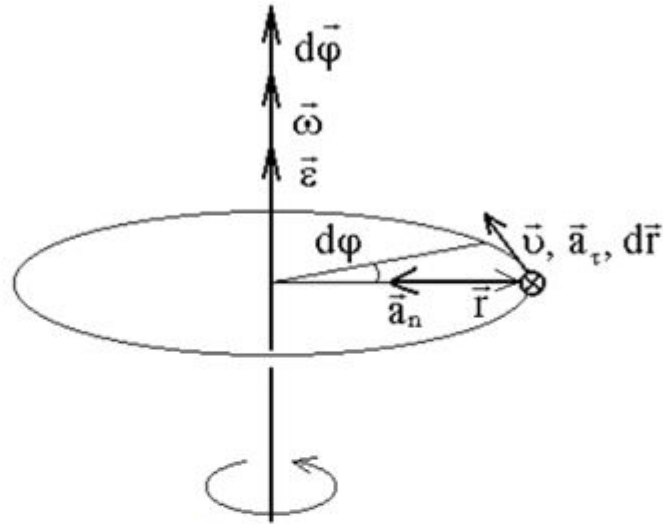


Рис. 4

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}], \quad dr = d\varphi \cdot r;$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad v = \omega \cdot r;$$

$$\vec{a}_t = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}], \quad a_t = \varepsilon \cdot r;$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}], \quad a_n = \omega \cdot v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r};$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

## 2. Динамика поступательного и вращательного движений

### 2.1. Законы Ньютона

**Первый закон Ньютона:** всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не выведет его из этого состояния.

Тела, не подверженные внешним воздействиям, называются свободными телами. Система отсчёта, связанная со свободным телом, называется **инерциальной системой отсчёта (ИСО)**. По отношению к ней любое свободное тело будет двигаться равномерно и прямолинейно или находиться в состоянии покоя. Из относительности движения следует, что система отсчёта, движущаяся равномерно и прямолинейно по отношению к ИСО, также является ИСО. ИСО играют важную роль во всех разделах физики. Это связано с принципом относительности Эйнштейна, согласно которому математическая форма любого физического закона должна иметь один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчёта.

К основным понятиям, используемым в динамике поступательного движения, относятся сила, масса тела, импульс тела (системы тел).

**Силой** называется векторная физическая величина, являющаяся мерой механического действия одного тела на другое. Механическое действие возникает как при непосредственном контакте взаимодействующих тел (трение, реакция опоры, вес и т.д.), так и посредством силового поля, существующего в пространстве (сила тяжести, кулоновские силы и т.д.). Сила  $\vec{F}$  характеризуется модулем, направлением и точкой приложения.

Одновременное действие на тело нескольких сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  может быть заменено действием **резльтирующей (равнодействующей)** силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

**Массой** тела называется скалярная величина, являющаяся мерой инертности тела. Под инертностью понимается свойство материальных тел сохранять свою скорость неизменной в отсутствие внешних воздействий и изменять её постепенно (т.е. с конечным ускорением) под действием силы.

**Импульсом тела** (материальной точки) называется векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость:  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

Импульс системы материальных точек равен векторной сумме импульсов точек, составляющих систему:  $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ .

**Второй закон Ньютона:** скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Если масса тела остается постоянной, то ускорение, приобретаемое телом относительно инерциальной системы отсчета, прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

**Третий закон Ньютона:** силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

где  $\vec{F}_{12}$  – сила, действующая на первое тело со стороны второго,

$\vec{F}_{21}$  – сила, действующая на второе тело со стороны первого.

Из третьего закона следует, что в любой механической системе материальных точек геометрическая сумма всех внутренних сил (т.е. сил, с которыми взаимодействуют между собой материальные точки системы) равна нулю.



## Закон сохранения импульса. Центральный удар двух тел

**Закон сохранения импульса:** полный импульс замкнутой системы остается постоянным.

Для замкнутой системы будут сохраняться и проекции импульса на координатные оси:

$$p_x = \sum_{i=1}^n m_i v_{xi} = \text{const}, p_y = \sum_{i=1}^n m_i v_{yi} = \text{const}, p_z = \sum_{i=1}^n m_i v_{zi} = \text{const}.$$

Если  $\vec{F}^{\text{внеш}} \neq 0$ , но  $F_x^{\text{внеш}} = 0$ , то будет сохраняться проекция импульса системы на ось X.

Рассмотрим центральный удар двух тел. Центральным называется удар, при котором тела движутся вдоль прямой, соединяющей их центры масс. Выделяют два предельных вида такого удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий.

Для двух тел массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  вдоль оси  $x$ , проекции их скоростей на ось  $x$  после абсолютно упругого центрального удара можно найти по формулам:  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$ ;

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

$$u_1 = v'_{1x} = \frac{2m_2 v_{2x} + (m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2}; \quad u_2 = v'_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

При этом сохраняются импульс и механическая энергия системы тел.

Если удар абсолютно неупругий, то  $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$ ;

$$u = v'_{1x} = v'_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

Тела после такого удара движутся вместе. Импульс системы тел сохраняется, а полная механическая энергия не сохраняется. Часть механической энергии переходит в энергию неупругой деформации и во внутреннюю энергию тел.