

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. Часть I

Расчёт сооружений на действие подвижных и других временных нагрузок

ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

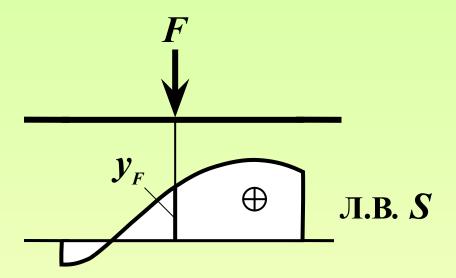


Определение силовых факторов с помощью линий влияния

Определение с помощью линии влияния значения силового фактора от заданной нагрузки называется

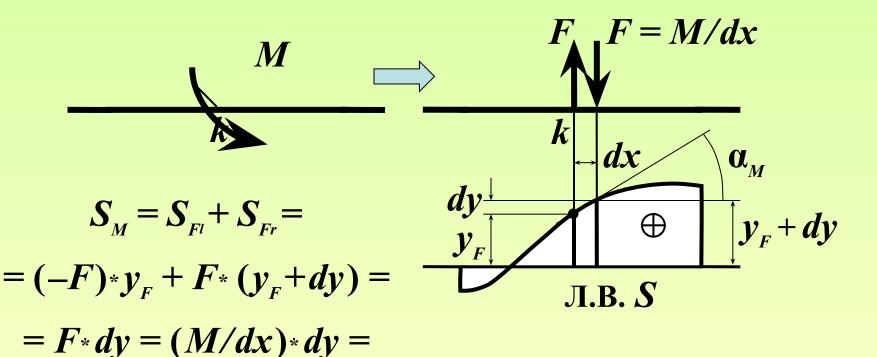
загружением линии влияния.

1. Сосредоточенная нагрузка *F*



$$S_F = F_* y_F$$

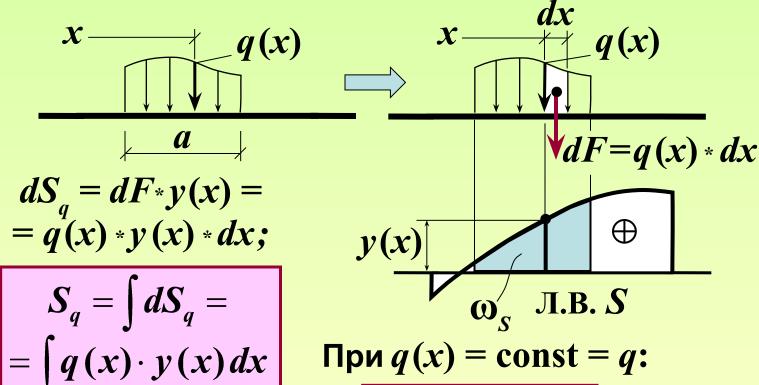
2. Сосредоточенный момент М



$$= M * dy/dx = M * tg \alpha_{M}$$

$$S_{M} = M * tg \alpha_{M}$$

3. Распределённая нагрузка q



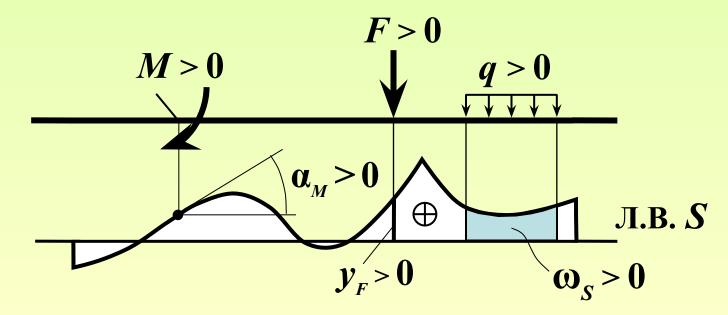
При
$$q(x) = \text{const} = q$$
:

$$S_q = q * \omega_S \qquad \omega_S = \int_a y(x) dx$$

Формула загружения л.в. S:

$$S = \sum F_* y_F + \sum M_* \operatorname{tg} \alpha_M + \sum q_* \omega_S$$

Правило знаков:



Использование статически эквивалентных преобразований нагрузок

Статически эквивалентное преобразование – замена группы сил другой группой, имеющей такие же главный вектор и главный момент (такую же равнодействующую), как и исходная.

Правило: загружение прямолинейного участка линии влияния любыми статически эквивалентными нагрузками даёт один и тот же результат.

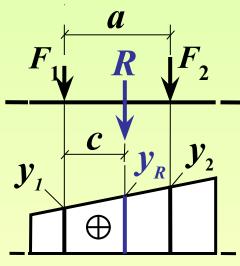
даёт один и тот же результат.
$$F \bigvee F_2 \bigvee F_2 \bigvee F_2 \bigvee F_1 + F_2 \bigvee F_2 \bigvee F_2 \bigvee F_1 + F_2 \bigvee F_2 \bigvee$$

Использование статически эквивалентных преобразований нагрузок

Статически эквивалентное преобразование – замена группы сил другой группой, имеющей такие же главный вектор и главный момент (такую же равнодействующую), как и исходная.

Правило: загружение прямолинейного участка линии влияния любыми статически эквивалентными нагрузками даёт один и тот же результат.

FFF



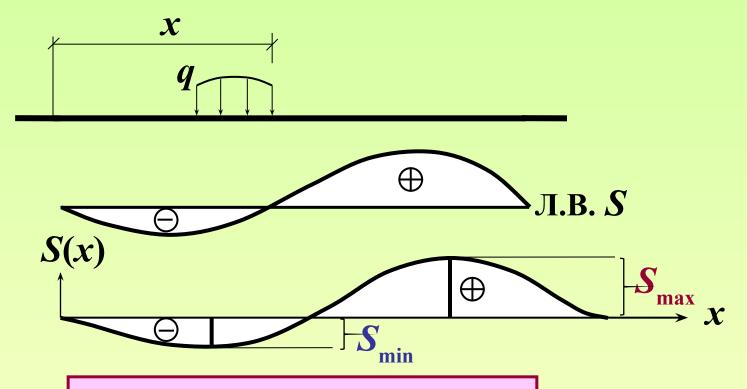
$$R_1 = F$$

$$R_2 = 2(F + qb)$$

$$R_i = ql_i$$

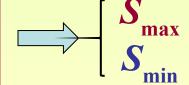
$$R_n = 3F$$

$$\begin{array}{c|c}
\hline
S_{R_1+F_2} &= F_1 y_1 + F_2 y_2 \\
S_R &= R \cdot y_R = (F_1 + F_2) \cdot \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = F_1 y_1 + F_2 y_2 \\
\hline
S_R &= S_{F_1+F_2} &= S_{F_1+F_2}
\end{array}$$



Условие экстремума:

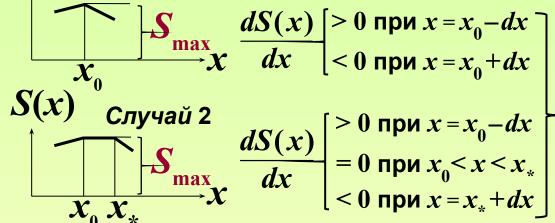
$$\frac{dS(x)}{dx} = 0$$



Условия максимума и минимума кусочной функции S(x)



Условие максимума:



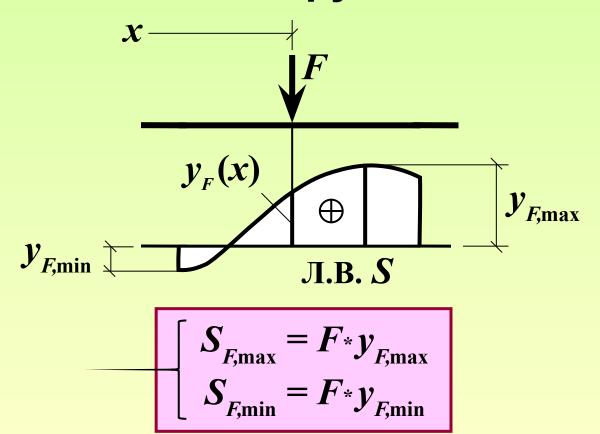
$$\frac{dS(x)}{dx} \begin{cases} \geq 0 & (x = (x_0 \lor x_*) - dx) \\ \leq 0 & (x = (x_0 \lor x_*) + dx) \end{cases}$$

S(x) Случай 1 Случай 2 S_{\min} X_0 X_*

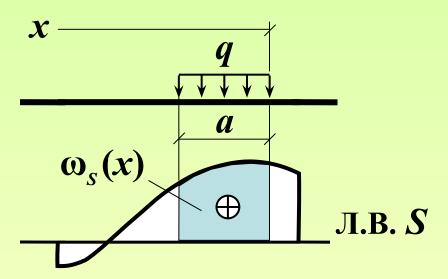
Условие минимума:

$$\frac{dS(x)}{dx} \begin{cases} \leq 0 & (x = (x_0 \lor x_*) - dx) \\ \geq 0 & (x = (x_0 \lor x_*) + dx) \end{cases}$$

1. Сосредоточенная подвижная нагрузка *F*



2. Подвижная полоса распределённой нагрузки *q*

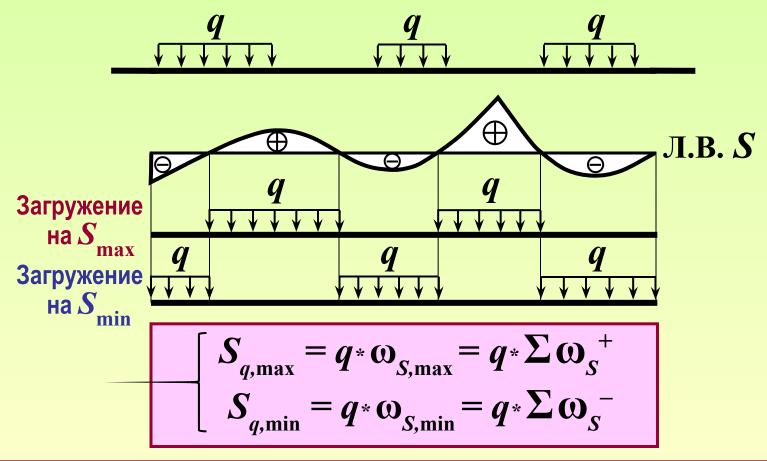


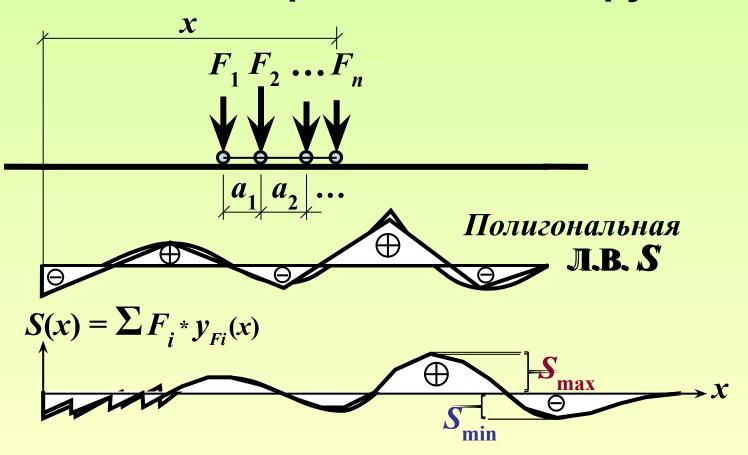
$$\begin{bmatrix} S_{q,\text{max}} = q * \omega_{S,\text{max}} \\ S_{q,\text{min}} = q * \omega_{S,\text{min}} \end{bmatrix}$$

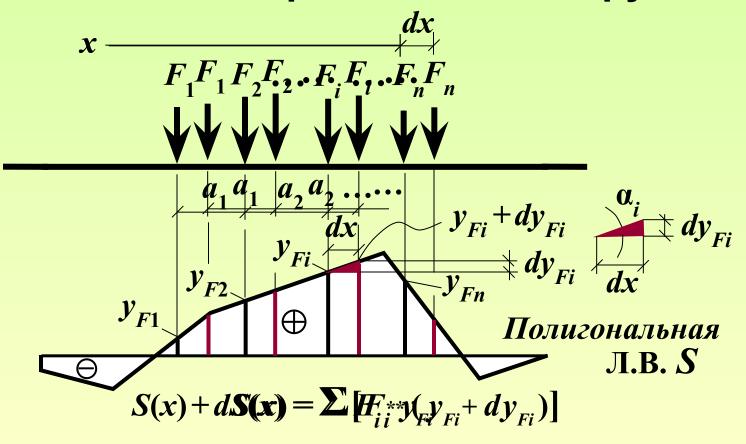
$$\omega_{S,\text{max}} = \max_{x} \omega_{S}(x) = \max_{x} \int_{x-a}^{x} y(\chi) d\chi$$

$$\omega_{S,\text{min}} = \min_{x} \omega_{S}(x) = \min_{x} \int_{x-a}^{x} y(\chi) d\chi$$

3. Распределённая нагрузка *q* с произвольными разрывами







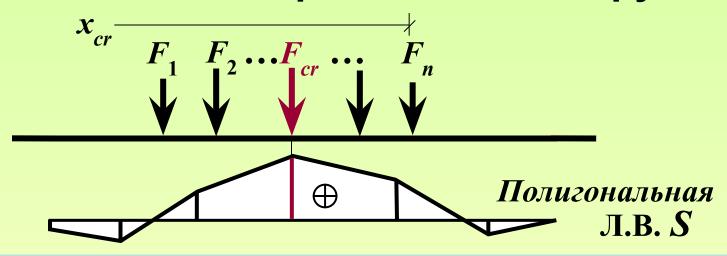
$$dS(x) = \sum [F_i * (y_{Fi} + dy_{Fi})] - \sum F_i * y_{Fi} = \sum F_i * dy_{Fi}$$

$$dy_{Fi} = dx * tg \alpha_i$$

$$dS(x) = dx * \sum (F_i * tg \alpha_i)$$

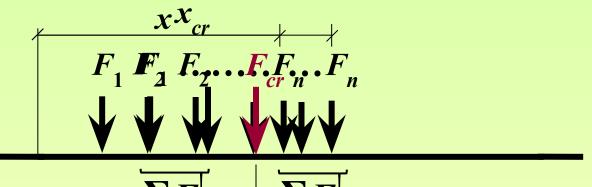
$$\frac{dS(x)}{dx} = \sum (F_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i)$$

4. Подвижная система параллельных сосредоточенных грузов



Груз, при расположении которого над вершиной линии влияния фактора S значение S от действия системы параллельных сосредоточенных грузов становится экстремальным (S_{max} или S_{min}), называется критическим грузом. ■

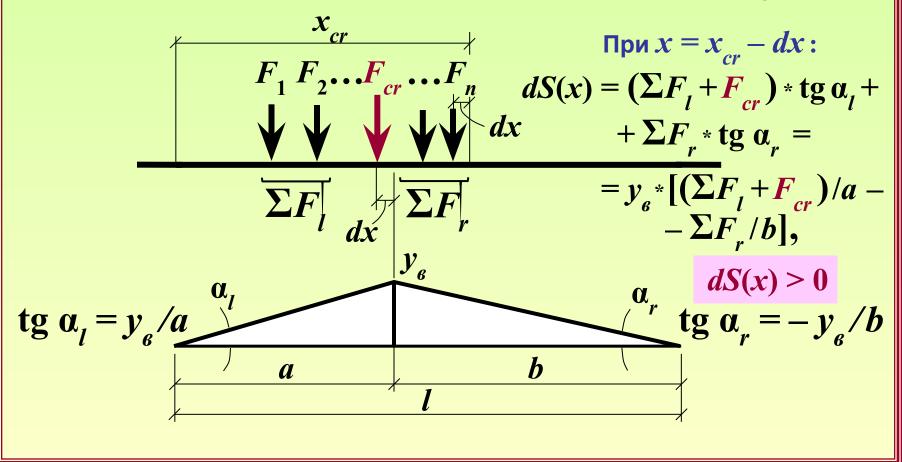
4. Подвижная система параллельных сосредоточенных грузов

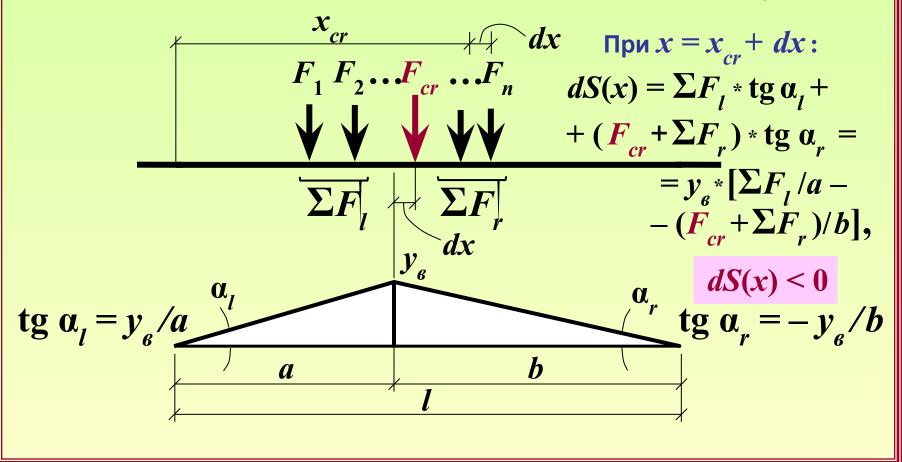


Частный случай полигональной Л.В. S- треугольная

$$tg \alpha_l = y_e / a$$

$$a_r tg \alpha_r = -y_e / b$$



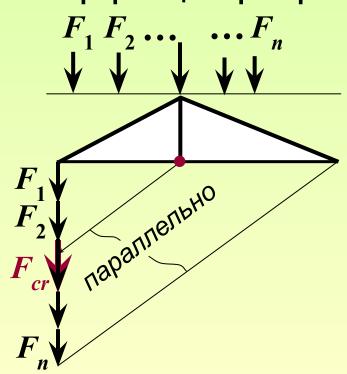


4. Подвижная система параллельных сосредоточенных грузов

Критерий **определения** критического груза в случае треугольной линии влияния

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{l} \leq \frac{a}{l} \sum F \\ \sum F_{l} + F_{cr} \geq \frac{a}{l} \sum F \end{array} \right.$$

Графическая интерпретация критерия

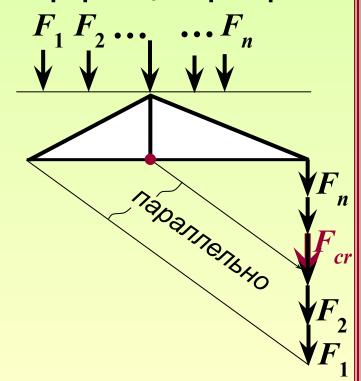


4. Подвижная система параллельных сосредоточенных грузов

Критерий **определения** критического груза в случае треугольной линии влияния

$$\begin{cases}
\sum_{l} F_{l} \leq \frac{a}{l} \sum_{l} F \\
\sum_{l} F_{l} + F_{cr} \geq \frac{a}{l} \sum_{l} F
\end{cases}$$

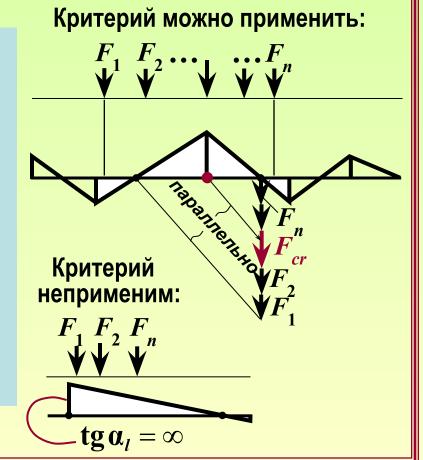
Графическая интерпретация критерия



4. Подвижная система параллельных сосредоточенных грузов

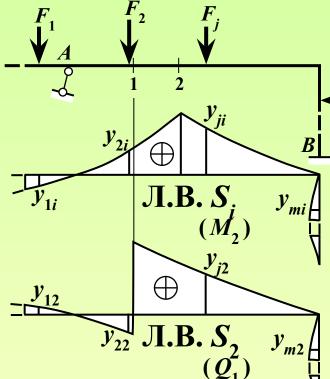
Критерий **определения** критического груза в случае треугольной линии влияния

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{l} \leq \frac{a}{l} \sum F \\ \sum F_{l} + F_{cr} \geq \frac{a}{l} \sum F \end{array} \right.$$



Матрицы влияния

 $egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned\\ egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} eg$



Матрица влияния силовых факторов — это матрица, строки которой состоят из ординат линий влияния искомых силовых факторов в точках приложения сосредоточенных нагрузок.

Например, $S_1 = R_A$, $S_2 = Q_1$, $S_i = M_2$, $S_n = M_B$

Определение S_i с помощью линии влияния:

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} F_j \, y_{ji}$$
 В матричной форме: $S_i = \underbrace{[y_{1i} \, y_{2i} \, ... y_{ji} \, ... y_{mi}]^*}_{$

$$S_i = \lambda_{Si}^* F$$
 матрица (строка) влияния силового фактора S_i

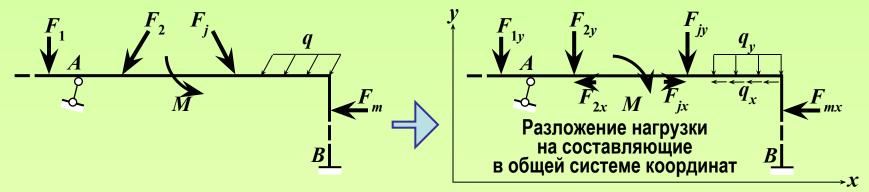
Все искомые силовые факторы:

$$S = \Lambda_{S} * F =$$
 матрица (вектор) $\Lambda_{S_1} \setminus A_{S_2} \setminus A_{S_1} \setminus A_{S_2} \setminus A_{S_2}$

Матрицы влияния

Общий случай загружения

(сосредоточенные и распределённые, силовые и моментные нагрузки)



Замена заданных нагрузок расчётными узловыми нагрузками (сосредоточенными силами в расчётных точках загружения)

Расчетные точки загружения:

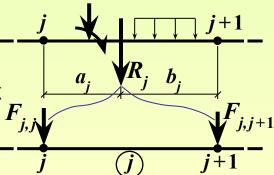
- 1. Границы дисков (узлы)
- 2. Места сечений с искомыми внутренними усилиями

<u>необходимы</u>е; для СОС – и достаточные

3. Любые точки — дополнительные (нужны для обеспечения требуемой точности при нелинейных Л.В. в СНС)

Способ приведения заданных нагрузок к расчётным точкам – статически эквивалентное преобразование в пределах расчётного участка

(в случае линейной Л.В. результат – точный)



Равнодействующая:

$$egin{align*} R_j = & \sum_{F(j)} y_{F(j)}; \quad a_j = \sum_{F(j)} p_{F(j)} & \sum_{F(j)} p_{F(j)} & p_{F(j)$$

Матрицы влияния

Общий случай загружения

(сосредоточенные и распределённые, силовые и моментные нагрузки)

$$S = \Lambda_S * F$$

$$\Lambda_S = [\Lambda_{Sx} \Lambda_{Sy} \Lambda_{Sz}] F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$
Ot $F_x = 1$ Ot $F_y = 1$ Ot $F_z = 1$

В общем случае пространственной системы



Замена заданных нагрузок расчётными узловыми нагрузками (сосредоточенными силами в расчётных точках загружения)

Расчётные точки загружения:

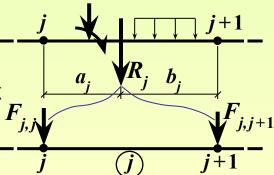
- 1. Границы дисков (узлы)
- 2. Места сечений с искомыми внутренними усилиями

<u>необходимы</u>е; для СОС – и достаточные

3. Любые точки — дополнительные (нужны для обеспечения требуемой точности при нелинейных Л.В. в СНС)

Способ приведения заданных нагрузок к расчётным точкам — статически эквивалентное преобразование в пределах расчётного участка

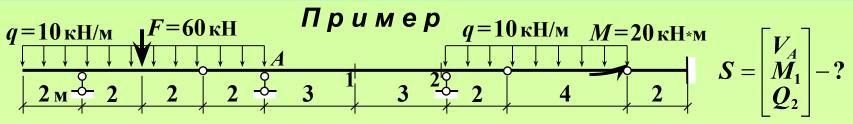
(в случае линейной Л.В. результат – точный)



Равнодействующая:

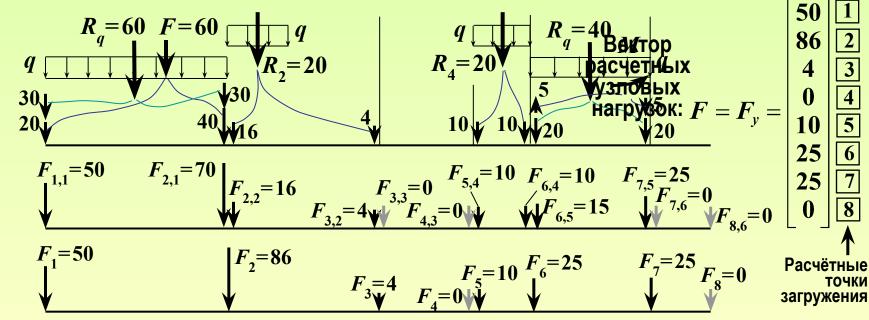
$$R_{j} = \sum y_{F(j)}; \quad a_{j} = \sum$$
 $F_{j,j+1} = R_{j} \frac{b_{j} m_{j}}{a_{j} + b_{j}} F_{j}^{(j)} = \sum_{\substack{j \in \mathcal{S} \\ j+1}} F_{j,j+1} = \sum_{\substack{j \in$

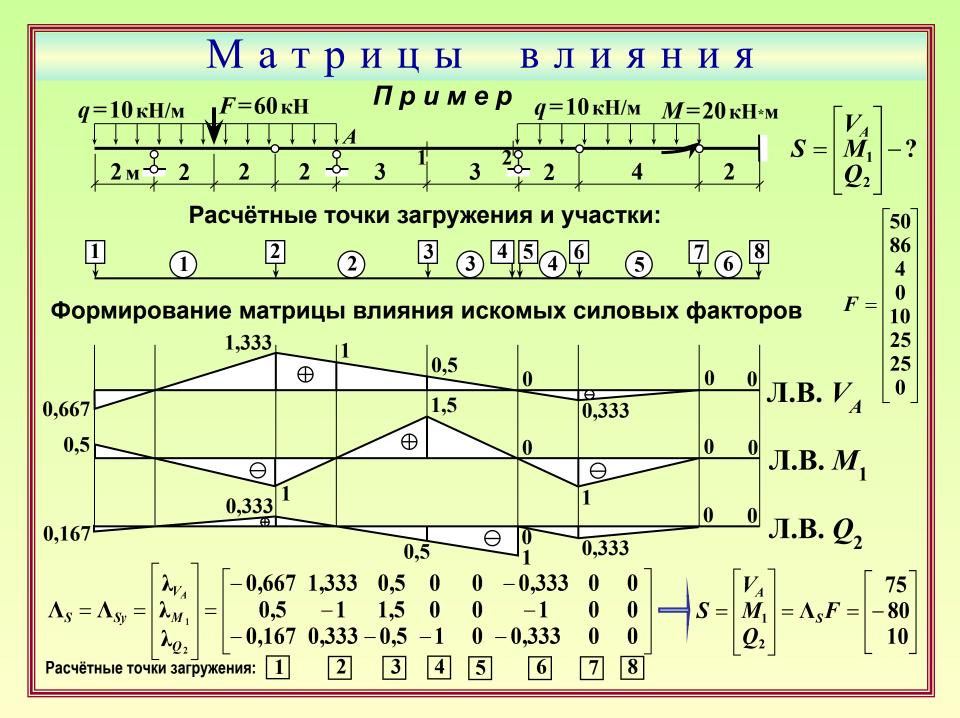




Расчётные точки загружения и участки:

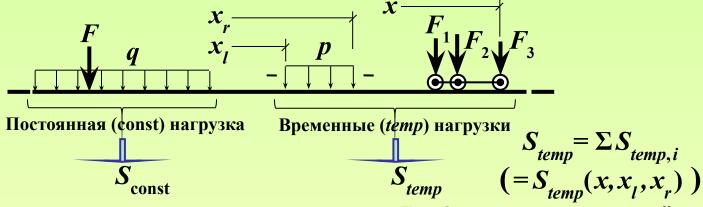
Замена заданных нагрузок расчётными узловыми нагрузками





РАСЧЁТНЫЕ УСИЛИЯ И ОБЪЕМЛЮЩИЕ ЭПЮРЫ

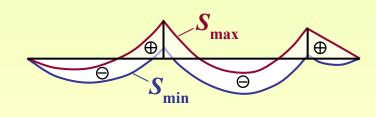
Расчётным значением силового фактора S (расчётным усилием) называется его экстремальное (максимальное S_{\max} или минимальное S_{\min}) значение от совместного действия постоянной нагрузки и временных воздействий, каждое из которых занимает невыгоднейшее (опасное) – соответственно по максимуму или минимуму фактора S – положение на сооружении.



$$m{S_{ ext{pacu}}} = egin{cases} m{S_{ ext{max}}} = m{S_{ ext{const}}} + m{\sum} m{S_{temp, ext{max}}} \ m{S_{temp, ext{min}}} \ m{S_{temp, ext{min}}} \end{cases}$$

Объемлющая эпюра S (эпюра S_{pacy}) объемлющей эпюрой силового фактора S_{max} которые являются границами области возможных значений силового фактора Sзначений S при произвольных положениях временных нагрузок): $S_{\min} \leq S \leq S_{\max}$

График изменения расчётных усилий $S_{
m max}$ и $S_{
m min}$ по длине элементов (или их объему – для нестержневых элементов) называется



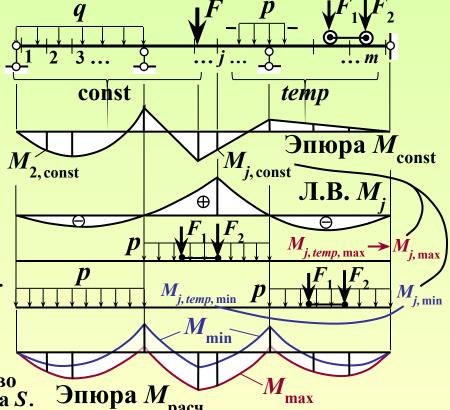
РАСЧЁТНЫЕ УСИЛИЯ И ОБЪЕМЛЮЩИЕ ЭПЮРЫ

Расчётным значением силового фактора S (расчётным усилием) называется его экстремальное (максимальное S_{\max} или минимальное S_{\min}) значение от совместного действия постоянной нагрузки и временных воздействий, каждое из которых занимает невыгоднейшее (опасное) – соответственно по максимуму или минимуму фактора S – положение на сооружении.

Алгоритм определения расчётных усилий и построения объемлющей эпюры

- 1. Назначаются сечения 1, 2, ..., *j*, ..., *m* в которых будут определяться расчётные усилия (расчётные сечения).
- 2. В назначенных сечениях определяются усилия от постоянной нагрузки $S_{j, {\rm const}}$ (j=1,2,...,m) строится эпюра $S_{{\rm const}}$.
- 3. Строятся линии влияния усилий в назначенных сечениях Л.В. S_{j} (j=1,2,...,m).
- 4. Каждая Л.В. S_{j} (j=1,2,...,m) загружается временными нагрузками на max и min усилия. Определяются $S_{j, temp, max}$ и $S_{j, temp, min}$.
- 5. Для каждого сечения (j = 1, 2, ..., m) вычисляется пара расчётных значений $S_{j, \max}$ и $S_{j, \min}$.
- 6. По найденным парам расчётных усилий во всех сечениях строится объемлющая эпюра S.

Пример-иллюстрация Построение объемлющей эпюры М



РАСЧЁТНЫЕ УСИЛИЯ И ОБЪЕМЛЮЩИЕ ЭПЮРЫ

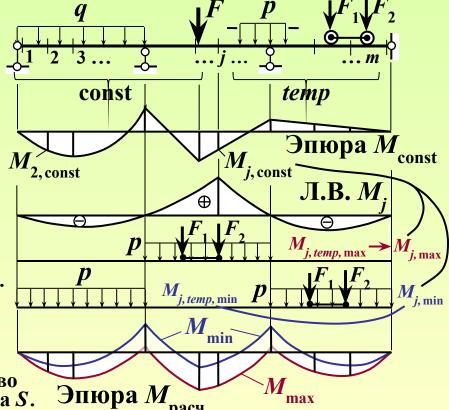
3 а м е ч а н и е: для выполнения практических расчётов конструкций на прочность при сложном сопротивлении, кроме расчётных усилий (в первую очередь, изгибающих моментов), необходимы также возникающие одновременно с ними (при той же комбинации воздействий) другие силовые факторы – поперечные и продольные силы, а в пространственных системах также крутящие моменты:

 $M_{
m pach} \Longleftrightarrow Q_{
m cooth}, N_{
m cooth}$

Алгоритм определения расчётных усилий и построения объемлющей эпюры

- 1. Назначаются сечения 1,2,..., *j*,..., *m* в которых будут определяться расчётные усилия (расчётные сечения).
- 2. В назначенных сечениях определяются усилия от постоянной нагрузки $S_{j, {\rm const}}$ (j=1,2,...,m) строится эпюра $S_{{\rm const}}$.
- 3. Строятся линии влияния усилий в назначенных сечениях Л.В. S_{j} (j=1,2,...,m).
- 4. Каждая Л.В. S_{j} (j=1,2,...,m) загружается временными нагрузками на max и min усилия. Определяются $S_{j, temp, max}$ и $S_{j, temp, min}$.
- 5. Для каждого сечения (j=1,2,...,m) вычисляется пара расчётных значений $S_{j,\max}$ и $S_{j,\min}$.
- 6. По найденным парам расчётных усилий во всех сечениях строится объемлющая эпюра S.

Пример-иллюстрация Построение объемлющей эпюры М



Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 32»)

- 1. Какая операция называется загружением линии влияния? (2)
- 2. По каким формулам с помощью линии влияния вычисляется силовой фактор S а) от сосредоточенной нагрузки F? (3) б) от сосредоточенного момента M? (4) в) от распределённой нагрузки q(x)? (5) г) от равномерно распределённой нагрузки? (5)
- 3. Правила знаков, используемые в операции загружения линии влияния –? (6)
- 4. Что такое статически эквивалентное преобразование нагрузок (7) и как его можно использовать при загружении линий влияния? (8)
- 5. Условие экстремума силового фактора S при действии подвижной нагрузки ? (9)
- 6. Как записываются условия максимума и минимума S в случае кусочно-линейной линии влияния? (10)
- 7. Как определяются опасные положения подвижных нагрузок и соответствующие им экстремальные значения фактора S в случаях: а) одиночной сосредоточенной подвижной силы F? (11) б) подвижной полосы равномерно распределённой нагрузки q? (12)
- 8. Как располагается равномерно распределённая нагрузка q с произвольным разрывами при загружениях на максимум и минимум силового фактора S? (13)
- 9. Критерий опасного положения подвижной системы параллельных сосредоточенных сил в случае полигональной линии влияния —? (16)
- 10. Что такое критический груз? (17)
- 11. Критерий опасного положения подвижной системы параллельных сосредоточенных сил в случае треугольной линии влияния: а) аналитическое выражение критерия —? (18–21) б) графическая интерпретация критерия —? (21, 22)
- 12. Каковы ограничения в использовании критерия определения критического груза при треугольной линии влияния? (23)

^{*)} Только в режиме «Показ слайдов»

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 33»)

- 13. По какой матричной формуле вычисляется совокупность (вектор) искомых силовых факторов S? (24)
- 14. Что такое матрица влияния силовых факторов? (24) Как она формируется (смысл строк матрицы влияния)? (24)
- 15. Какие величины включаются в вектор F при нагрузках, отличных от сосредоточенных сил? (25)
- 16. По каким правилам назначаются расчётные точки загружения? (25)
- 17. Как выполняется приведение заданных произвольных нагрузок к расчётным точкам загружения? (25)
- 18. Если нагрузки на рассчитываемую систему изменяются, то нужно ли вносить изменения в матрицу влияния силовых факторов? (25)
- 19. Какова структура матрицы влияния силовых факторов и вектора расчётных узловых нагрузок в случаях двух- и трёхмерных систем? (26)
- 19. Что называется расчётными усилиями и как они вычисляются? (29)
- 20. Какие усилия называются соответствующими расчётным усилиям? (31)
- 21. Что такое объемлющая эпюра некоторого силового фактора? (29)
- 21. По какому алгоритму осуществляется построение объемлющей эпюры? (30)
- 22. Как по объемлющей эпюре определить область возможных значений силового фактора *S*? (29)

^{*)} Только в режиме «Показ слайдов»