Семинар 9

доцент Волков Н.П.

Занятие 9

Приведение к каноническому виду центральных линий второго порядка.

$$\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{старшие члены}} + \underbrace{2b_1x + 2b_2y}_{\text{линейная часть}} + \underbrace{c}_{\text{свободный член}} = 0 \quad (34)$$

I $J_2 \neq 0$ (центральные линии)

1-ый шаг (параллельный перенос)

∃? $O'(x_0, y_0)$ - центр

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 = 0 \end{cases}$$ - система уравнений центра (40)

После преобразования параллельного переноса

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

исчезает линейная часть.

2-ой шаг (поворот на угол φ)

φ - ?

$$tg\varphi_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22}-a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}} \quad (38)$$

После преобразования поворота

$$\begin{cases} x' = \tilde{x}\cos\varphi_1 - \tilde{y}\sin\varphi_1 \\ y' = \tilde{x}\sin\varphi_1 + \tilde{y}\cos\varphi_1 \end{cases}$$, где $\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}}$, $\sin\varphi_1 = \frac{tg\varphi_1\sqrt{1+tg^2\varphi_1}}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}}$

уходит слагаемое $2a_{12}x'y'$.

В результате получим каноническое уравнение центральных линий

$$AX^2 + BY^2 + C = 0 \qquad (K_1)$$

Теорема 1. Пусть $J_1 > 0$, $J_2 > 0$ (эллиптич. тип)
и 1) $J_3 < 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в которой ур-ние (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ (эллипс) (1.1)

2) $J_3 = 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в кот. уравнение (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ (точка) (1.2)

3) $J_3 > 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в кот. ур-ние (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллипс) (1.3)

Теорема 2. Пусть $J_1 \geq 0$, $J_2 < 0$ (гиперболич. тип)
и 1) $J_3 \neq 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в кот. уравнение (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ (гипербола) (2.1)

2) $J_3 = 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в которой уравнение (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ (2 пересекающиеся прямые) (2.2)

Замечание В уравнении (1.1) $a^2 = \frac{-C}{A}$, $b^2 = \frac{-C}{B}$;
в уравнении (1.2) $a^2 = \frac{1}{A}$, $b^2 = \frac{1}{B}$; в (1.3) $a^2 = \frac{C}{A}$; $b^2 = \frac{C}{B}$
В уравнении (2.1) $a^2 = \frac{-C}{A}$, $b^2 = \frac{-C}{-B}$

673| 1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$

$J_1=4+9=13>0 \quad J_2=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{vmatrix}=36>0 \Rightarrow$ эллиптич. тип

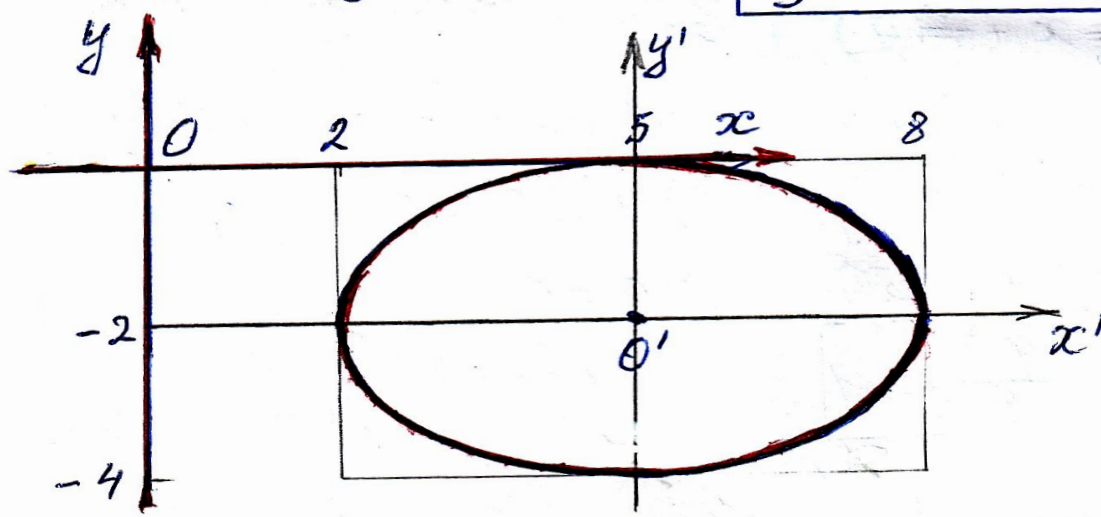
Найдем координаты точки $O'(x_0,y_0)$

$$\begin{cases}4x_0-20=0\\ 9y_0+18=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x_0=5\\ y_0=-2\end{matrix} \Rightarrow O'(5;-2)$$

Преобразование параллельного переноса:

$$\begin{cases}x=x'+5\\ y=y'-2\end{cases} \Rightarrow 4(x'+5)^2+9(y'-2)^2-40(x'+5)+36(y'-2)+100=0$$

$$\Rightarrow 4(x')^2+40x'+100+9(y')^2-36y'+36-40x'-200+$$
$$+36y'-72+100=0$$
$$4(x')^2+9(y')^2=36 \Rightarrow \boxed{\frac{(x')^2}{3^2}+\frac{(y')^2}{2^2}=1} \text{ - эллипс}$$



674 1) $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$

$J_1 = 32 - 7 = 25 > 0$, $J_2 = \begin{vmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{vmatrix} = -224 - 676 = -930 < 0$

$\Rightarrow$ гиперболический тип.

Линейная часть отсутствует, проведем преобразование поворота.

$$tg\,\varphi_{1,2} = \frac{-39 \pm \sqrt{1521 + 2704}}{52} = \frac{-39 \pm \sqrt{4225}}{52} = \frac{-39 \pm 65}{52}$$

$\Rightarrow tg\,\varphi_1 = -2$, $tg\,\varphi_2 = \frac{1}{2}$

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin\varphi_1 = \frac{tg\,\varphi_1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi_1}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

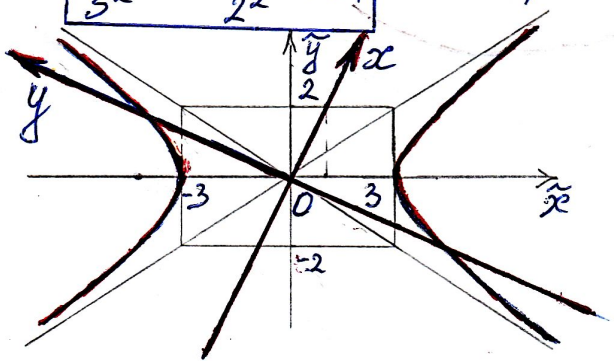
Преобразование поворота: $\begin{cases} x = \tilde{x}\frac{1}{\sqrt{5}} + \tilde{y}\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \tilde{x}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \tilde{y}\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$$\Rightarrow 32\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)^2 + 52\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right) -$$
$$- 7\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)^2 + 180 = 0$$

$$\frac{32}{5}\left(\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\tilde{y} + 4\tilde{y}^2\right) + \frac{52}{5}\left(-2\tilde{x}^2 - 3\tilde{x}\tilde{y} + 2\tilde{y}^2\right) -$$
$$- \frac{7}{5}\left(4\tilde{x}^2 - 4\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{y}^2\right) + 180 = 0$$

$$-100\tilde{x}^2 + 225\tilde{y}^2 + 900 = 0$$

$$\boxed{\frac{\tilde{x}^2}{3^2} - \frac{\tilde{y}^2}{2^2} = 1}$$ – гипербола



676| 4) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$

$J_1=7-1=6>0$, $J_2=\begin{vmatrix}7&3\\3&-1\end{vmatrix}=-7-9=-16<0$

$\Rightarrow$ гиперболический тип

1. Параллельный перенос:

$\begin{cases}7x_0+3y_0+14=0\\3x_0-y_0+6=0\end{cases}\Big|_{3}^{+}\Rightarrow 16x_0+32=0\Rightarrow x_0=-2$, $y_0=0$

$O'(-2;0)$

$\begin{cases}x=x'-2\\y=y'\end{cases}\Rightarrow 7(x'-2)^2+6(x'-2)y'-(y')^2+$
$+28(x'-2)+12y'+28=0$

$7(x')^2+6x'y'-(y')^2=0$ (*)

2. Поворот.

$tg\varphi_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\frac{-8\pm10}{6}$

$tg\varphi_1=-3$ $tg\varphi_2=\frac{1}{3}$

Возьмем угол φ_2. $\cos\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

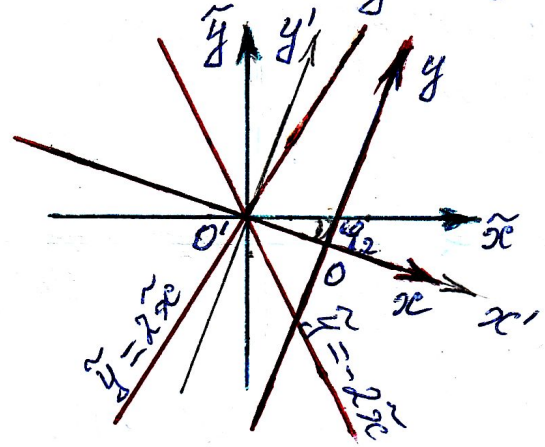
$\sin\varphi_2=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

Преобразование поворота на угол φ_2

$\begin{cases}x'=\tilde{x}\cos\varphi_2-\tilde{y}\sin\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(3\tilde{x}-\tilde{y})\\y'=\tilde{x}\sin\varphi_2+\tilde{y}\cos\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(\tilde{x}+3\tilde{y})\end{cases}$

$(*)\Rightarrow 7\cdot\frac{1}{10}(3\tilde{x}-\tilde{y})^2+6\cdot\frac{1}{10}(3\tilde{x}-\tilde{y})(\tilde{x}+3\tilde{y})-$
$-\frac{1}{10}(\tilde{x}+3\tilde{y})^2=0$

$\Rightarrow \quad 80\tilde{x}^2 - 20\tilde{y}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{4\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 0}$



пара пересекающихся прямых

$\tilde{y} = \pm 2\tilde{x}$

678 2) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0 \quad (*)$

$J_1 = 8 + 5 = 13 > 0, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 > 0$ эллипт. тип

$J_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & -28 \end{vmatrix} = 8(-140-4) - 2(-56-16) + 8(4-40) = -1296 < 0$

$\Rightarrow$ уравнение $(*)$ описывает эллипс

Рассмотрим каноническое уравнение (K_1)

$AX^2 + BY^2 + C = 0$, для которого

$J_1 = A + B = 13, \quad J_2 = A \cdot B = 36, \quad J_3 = A \cdot B \cdot C = -1296$

$\Rightarrow C = -\frac{1296}{36} = -36$

Из $\begin{cases} A + B = 13 \\ A \cdot B = 36 \end{cases} \Rightarrow A = 4, \; B = 9$

В силу замечания $a^2 = \frac{-C}{A} = 9 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$b^2 = \frac{-C}{B} = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$

679 | 1) $5x^2 - 6xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$

$J_1 = 7 > 0$, $J_2 = 5 \cdot 2 - 9 = 1 > 0 \Rightarrow$ эллиптический тип

$J_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0+2) + 2(10-9) = 0 \Rightarrow$ вырожден. эллипс-точка

$2(y^2 - 3xy) + 5x^2 - 2x + 2 = 0$

$2(y^2 - 3xy + \frac{9}{4}x^2) - \frac{9}{2}x^2 + 5x^2 - 2x + 2 = 0$

$2(y - \frac{3}{2}x)^2 + \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) = 0$

$2(y - \frac{3}{2}x)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$

точка $O'(2; 3)$

680 | 3) $3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0$

$J_1 = 3 > 0$, $J_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$ гиперболич. тип

$J_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{vmatrix} = -2 \cdot 32 = -64 < 0 \Rightarrow$ гипербола

Рассмотрим каноническое уравнение (K_1) $AX^2 + BY^2 + C = 0$, для которого

$J_1 = A + B = 3$, $J_2 = A \cdot B = -4$, $J_3 = A \cdot B \cdot C = -64$

$\Rightarrow C = \frac{-64}{-4} = 16$ $\quad \begin{cases} A + B = 3 \\ AB = -4 \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = 4$

Из замечания для уравнения (2.1)

$a^2 = \frac{-C}{A} = \frac{-16}{-1} = 16$, $b^2 = \frac{-C}{B} = \frac{-16}{-4} = 4$

$a = 4$, $b = 2$ $\Rightarrow \frac{X^2}{4^2} - \frac{Y^2}{2^2} = 1$

681 2) $x^2 - 6xy + 8y^2 - 4y - 4 = 0$

$I_1 = 9 > 0$, $I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 < 0 \Rightarrow$ гиперболич. тип

$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-32 - 4) + 3(12 - 0) = 0$

$\Rightarrow$ вырожденная гипербола – 2 пересек. прямые

$(x^2 - 6xy + 9y^2) - 9y^2 + 8y^2 - 4y - 4 = 0$

$(x - 3y)^2 - (y + 2)^2 = 0$

$(x - 3y + y + 2)(x - 3y - y - 2) = 0$

$\boxed{x - 2y + 2 = 0, \quad x - 4y - 2 = 0}$ – 2 пересекающ. прямые

682 1) $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0$

$I_1 = 25 > 0$, $I_2 = 8 \cdot 17 - 6^2 = 100 > 0 \Rightarrow$ эллипт. тип

$I_3 = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 8 \\ -6 & 17 & -6 \\ 8 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 8(51 - 36) + 6(-18 + 48) + 8(36 - 136) = -500$

$I_3 < 0 \Rightarrow$ **эллипс**

4) $6x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 18y + 14 = 0$

$I_1 = 15 > 0$, $I_2 = 6 \cdot 9 - 3^2 = 45 > 0 \Rightarrow$ эллиптич. тип

$I_3 = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 9 \\ -2 & 9 & 14 \end{vmatrix} = 6(126 - 81) + 3(-42 + 18) - 2(-27 + 18) = 216 > 0$

$\Rightarrow$ **мнимый эллипс**

Дома: К. 673(2), 674(2), 675(1,2,3), 676(3), 677(1), 678(1), 679(2), 680(1), 681(1), 682(2,5).