Семинар 9

доцент Волков Н.П.

Занятие 9

Приведение к каноническому виду центральных линий второго порядка.

$$\underbrace{a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2}_{\text{старшие члены}}+\underbrace{2b_1x+2b_2y}_{\text{линейная часть}}+\underbrace{c}_{\text{свободный член}}=0 \qquad (34)$$

I $J_2 \neq 0$ (центральные линии)

1-ый шаг (параллельный перенос)

$\exists ?\ O'(x_0, y_0)$ - центр

$$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1=0 \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+b_2=0 \end{cases}$$ - система уравнений центра (40)

После преобразования параллельного переноса

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

исчезает линейная часть.

2-ой шаг (поворот на угол φ)

φ-? $\quad tg\,\varphi_{1,2} = \dfrac{a_{22}-a_{11} \pm \sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2}}{2a_{12}} \qquad (38)$

После преобразования поворота

$$\begin{cases} x' = \tilde{x}\cos\varphi_1 - \tilde{y}\sin\varphi_1 \\ y' = \tilde{x}\sin\varphi_1 + \tilde{y}\cos\varphi_1 \end{cases}, \quad \text{где } \cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{tg\,\varphi_1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}}$$

уходит слагаемое $2a_{12}x'y'$.

В результате получим каноническое уравнение центральных линий

$$AX^2 + BY^2 + C = 0 \qquad (K_1)$$

Теорема 1. Пусть $J_1 > 0$, $J_2 > 0$ (эллиптич. тип) и 1) $J_3 < 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в которой ур-ние (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ (эллипс) (1.1)

2) $J_3 = 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в кот. уравнение (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ (точка) (1.2)

3) $J_3 > 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в кот. ур-ние (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллипс) (1.3)

Теорема 2. Пусть $J_1 \geq 0$, $J_2 < 0$ (гиперболич. тип) и 1) $J_3 \neq 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в кот. уравнение (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ (гипербола) (2.1)

2) $J_3 = 0 \Rightarrow \exists$ ДПСК OXY, в которой уравнение (34) принимает вид: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ (2 пересекающиеся прямые) (2.2)

Замечание В уравнении (1.1) $a^2 = \frac{-C}{A}$, $b^2 = \frac{-C}{B}$; в уравнении (1.2) $a^2 = \frac{1}{A}$, $b^2 = \frac{1}{B}$; в (1.3) $a^2 = \frac{C}{A}$; $b^2 = \frac{C}{B}$

В уравнении (2.1) $a^2 = \frac{-C}{A}$, $b^2 = \frac{-C}{-B}$

$\underline{673}$ 1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$

$J_1=4+9=13>0$ $\quad J_2=\begin{vmatrix}4&0\\0&9\end{vmatrix}=36>0 \Rightarrow$ эллиптич. тип

Найдем координаты точки $O'(x_0,y_0)$

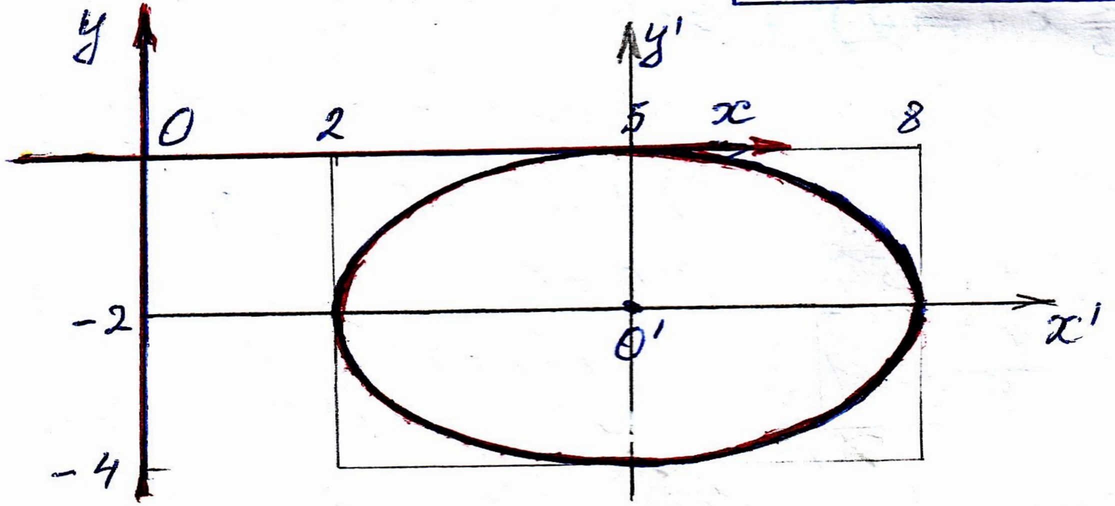
$$\begin{cases}4x_0-20=0\\9y_0+18=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x_0=5\\y_0=-2\end{matrix} \Rightarrow O'(5;-2)$$

Преобразование параллельного переноса:

$$\begin{cases}x=x'+5\\y=y'-2\end{cases} \Rightarrow 4(x'+5)^2+9(y'-2)^2-40(x'+5)+36(y'-2)+100=0$$

$$\Rightarrow 4(x')^2+40x'+100+9(y')^2-36y'+36-40x'-200+$$
$$+36y'-72+100=0$$

$$4(x')^2+9(y')^2=36 \Rightarrow \boxed{\frac{(x')^2}{3^2}+\frac{(y')^2}{2^2}=1}$$ - эллипс



674 | 1) $32x^2+52xy-7y^2+180=0$

$I_1=32-7=25>0$, $I_2=\begin{vmatrix}32 & 26\\ 26 & -7\end{vmatrix}=-224-676=-990<0$

$\Rightarrow$ гиперболический тип.

Линейная часть отсутствует, проведем преобразование поворота.

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\frac{-39\pm\sqrt{1521+2704}}{52}=\frac{-39\pm\sqrt{4225}}{52}=\frac{-39\pm 65}{52}$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_1=-2$, $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{1}{2}$

$$\cos\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ;\ \sin\varphi_1=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_1}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

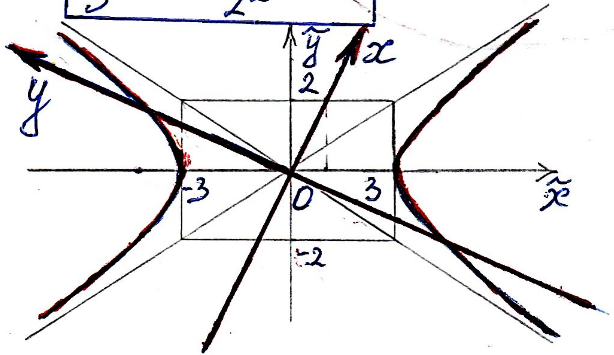
Преобразование поворота: $\begin{cases} x=\tilde{x}\frac{1}{\sqrt5}+\tilde{y}\frac{2}{\sqrt5}\\ y=\tilde{x}\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)+\tilde{y}\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}$

$$\Rightarrow 32\left(\frac{1}{\sqrt5}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt5}\tilde{y}\right)^2+52\left(\frac{1}{\sqrt5}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt5}\tilde{y}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt5}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt5}\tilde{y}\right)-$$
$$-7\left(-\frac{2}{\sqrt5}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt5}\tilde{y}\right)^2+180=0$$

$$\frac{32}{5}\left(\tilde{x}^2+4\tilde{x}\tilde{y}+4\tilde{y}^2\right)+\frac{52}{5}\left(-2\tilde{x}^2-3\tilde{x}\tilde{y}+2\tilde{y}^2\right)-$$
$$-\frac{7}{5}\left(4\tilde{x}^2-4\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{y}^2\right)+180=0$$

$$-100\tilde{x}^2+225\tilde{y}^2+900=0$$

$\boxed{\frac{\tilde{x}^2}{3^2}-\frac{\tilde{y}^2}{2^2}=1}$ – гипербола



676) 4) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$

$J_1=7-1=6>0$, $J_2=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7-9=-16<0$

$\Rightarrow$ гиперболический тип

1. Параллельный перенос:

$\begin{cases}7x_0+3y_0+14=0\\ 3x_0-y_0+6=0\end{cases}\Big|\,3^{+} \Rightarrow 16x_0+32=0 \Rightarrow \begin{matrix}x_0=-2\\ y_0=0\end{matrix}$

$O'(-2;0)$

$\begin{cases}x=x'-2\\ y=y'\end{cases} \Rightarrow 7(x'-2)^2+6(x'-2)y'-(y')^2+$
$+28(x'-2)+12y'+28=0$

$7(x')^2+6x'y'-(y')^2=0 \quad (*)$

2. Поворот.

$tg\varphi_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\dfrac{-8\pm 10}{6}$

$tg\varphi_1=-3 \qquad tg\varphi_2=\dfrac{1}{3}$

Возьмем угол φ_2. $\cos\varphi_2=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

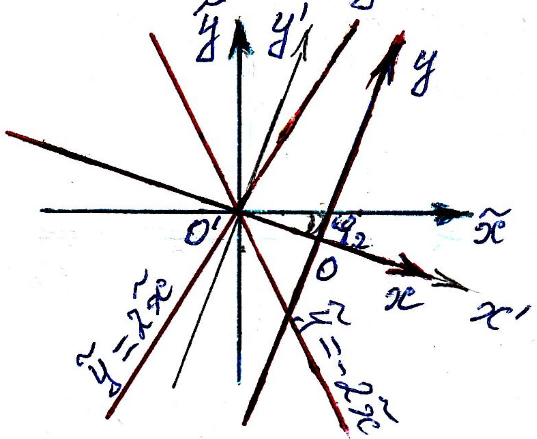
$\sin\varphi_2=\dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Преобразование поворота на угол φ_2

$\begin{cases}x'=\tilde{x}\cos\varphi_2-\tilde{y}\sin\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(3\tilde{x}-\tilde{y})\\ y'=\tilde{x}\sin\varphi_2+\tilde{y}\cos\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(\tilde{x}+3\tilde{y})\end{cases}$

$(*) \Rightarrow 7\cdot\frac{1}{10}(3\tilde{x}-\tilde{y})^2+6\cdot\frac{1}{10}(3\tilde{x}-\tilde{y})(\tilde{x}+3\tilde{y})-$
$-\frac{1}{10}(\tilde{x}+3\tilde{y})^2=0$

$$\Rightarrow \quad 80\tilde{x}^2 - 20\tilde{y}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{4\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 0}$$



пара пересекающихся прямых

$$\tilde{y} = \pm 2\tilde{x}$$

678| 2) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0 \quad (*)$

$I_1 = 8 + 5 = 13 > 0$, $I_2 = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 > 0$ эллипт. тип

$$I_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & -28 \end{vmatrix} = 8(-140-4) - 2(-56-16) + 8(4-40) = -1296 < 0$$

$\Rightarrow$ уравнение $(*)$ описывает эллипс

Рассмотрим каноническое уравнение (K_1)

$AX^2 + BY^2 + C = 0$, для которого

$I_1 = A + B = 13$, $I_2 = A \cdot B = 36$, $I_3 = A \cdot B \cdot C = -1296$

$$\Rightarrow C = -\frac{1296}{36} = -36$$

Из $\begin{cases} A + B = 13 \\ A \cdot B = 36 \end{cases} \Rightarrow A = 4, \; B = 9$

В силу замечания $a^2 = \frac{-C}{A} = 9 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$$b^2 = \frac{-C}{B} = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

679) 1) $5x^2-6xy+2y^2-2x+2=0$

$J_1=7>0,\ J_2=5\cdot2-9=1>0 \Rightarrow$ эллиптический тип

$J_3=\begin{vmatrix}5 & -3 & -1\\ -3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot(0+2)+2(10-9)=0 \Rightarrow$ выožден. эллипс-точка

$2(y^2-3xy)+5x^2-2x+2=0$

$2(y^2-3xy+\frac{9}{4}x^2)-\frac{9}{2}x^2+5x^2-2x+2=0$

$2(y-\frac{3}{2}x)^2+\frac{1}{2}(x^2-4x+4)=0$

$2(y-\frac{3}{2}x)^2+\frac{1}{2}(x-2)^2=0$

$\Rightarrow x=2 \Rightarrow y=3$

$\boxed{\text{точка } O'(2;3)}$

680) 3) $3x^2+4xy-12x+16=0$

$J_1=3>0,\ J_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0 \Rightarrow$ гиперболич. тип

$J_3=\begin{vmatrix}3 & 2 & -6\\ 2 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 16\end{vmatrix}=-2\cdot32=-64<0 \Rightarrow$ гипербола

Рассмотрим каноническое уравнение (K_1)

$AX^2+BY^2+C=0$, для которого

$J_1=A+B=3,\ J_2=A\cdot B=-4,\ J_3=A\cdot B\cdot C=-64$

$\Rightarrow C=\frac{-64}{-4}=16 \quad \begin{cases}A+B=3\\ AB=-4\end{cases} \Rightarrow A=-1,\ B=4$

Из замечания для уравнения (2.1)

$a^2=\frac{-C}{A}=\frac{-16}{-1}=16,\quad b^2=\frac{-C}{-B}=\frac{-16}{-4}=4$

$\boxed{a=4,\ b=2} \quad \Rightarrow \frac{X^2}{4^2}-\frac{Y^2}{2^2}=1$

681) 2) $x^2-6xy+8y^2-4y-4=0$

$\mathcal{I}_1=9>0$, $\mathcal{I}_2=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & 8\end{vmatrix}=8-9=-1<0 \Rightarrow$ гиперболич. тип

$$\mathcal{I}_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ -3 & 8 & -2\\ 0 & -2 & -4\end{vmatrix}=1\cdot(-32-4)+3(12-0)=0$$

$\Rightarrow$ вырожденная гипербола - 2 пересек. прямые

$$(x^2-6xy+9y^2)-9y^2+8y^2-4y-4=0$$

$$(x-3y)^2-(y+2)^2=0$$

$$(x-3y+y+2)(x-3y-y-2)=0$$

$\boxed{x-2y+2=0, \quad x-4y-2=0}$ - 2 пересекающ. прямые

682) 1) $8x^2-12xy+17y^2+16x-12y+3=0$

$\mathcal{I}_1=25>0$, $\mathcal{I}_2=8\cdot17-6^2=100>0 \Rightarrow$ эллипт. тип

$$\mathcal{I}_3=\begin{vmatrix}8 & -6 & 8\\ -6 & 17 & -6\\ 8 & -6 & 3\end{vmatrix}=8(51-36)+6(-18+48)+8(36-136)=-500$$

$\mathcal{I}_3<0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{эллипс}}$

4) $6x^2-6xy+9y^2-4x+18y+14=0$

$\mathcal{I}_1=15>0$, $\mathcal{I}_2=6\cdot9-3^2=45>0 \Rightarrow$ эллиптич. тип

$$\mathcal{I}_3=\begin{vmatrix}6 & -3 & -2\\ -3 & 9 & 9\\ -2 & 9 & 14\end{vmatrix}=6(126-81)+3(-42+18)-2(-27+18)=216>0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{мнимый эллипс}}$

Дома: К.673(2), 674(2), 675(1,2,3), 676(3), 677(1), 678(1), 679(2), 680(1), 681(1), 682(2,5).