

# Семинар 9

доцент Волков Н.П.

## Занятие 9

### Приведение к каноническому виду центральных линий второго порядка.

$$\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{старшие члены}} + \underbrace{2b_1x + 2b_2y}_{\text{линейная часть}} + \underbrace{c}_{\text{свободный член}} = 0 \quad (34)$$

I  $\Delta_2 \neq 0$  (центральные линии)

1-ый шаг (параллельный перенос)

$\exists? O'(x_0, y_0)$  - центр

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 = 0 \end{cases} \text{ - система уравнений центра} \quad (40)$$

После преобразования параллельного переноса

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

исчезает линейная часть.

2-ой шаг (поворот на угол  $\varphi$ )

$$\varphi - ? \quad \operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}} \quad (38)$$

После преобразования поворота

$$\begin{cases} x' = \tilde{x} \cos \varphi_1 - \tilde{y} \sin \varphi_1 \\ y' = \tilde{x} \sin \varphi_1 + \tilde{y} \cos \varphi_1 \end{cases}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} \\ \sin \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} \end{cases}$$

уходит слагаемое  $2a_{12}x'y'$ .

В результате получим каноническое уравнение центральных линий

$$AX^2 + BY^2 + C = 0 \quad (K_1)$$

- Теорема 1. Пусть  $J_1 > 0, J_2 > 0$  (эллиптич. тип)  
и 1)  $J_3 < 0 \Rightarrow \exists$  ДПСК  $OXY$ , в которой ур-ние (34) принимает вид:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$  (эллипс) (1.1)  
2)  $J_3 = 0 \Rightarrow \exists$  ДПСК  $OXY$ , в кот. уравнение (34) принимает вид:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$  (точка) (1.2)  
3)  $J_3 > 0 \Rightarrow \exists$  ДПСК  $OXY$ , в кот. ур-ние (34) принимает вид:  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$  (мнимый эллипс) (1.3)

- Теорема 2. Пусть  $J_1 \geq 0, J_2 < 0$  (гиперболич. тип)  
и 1)  $J_3 \neq 0 \Rightarrow \exists$  ДПСК  $OXY$ , в кот. уравнение (34) принимает вид:  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$  (гипербола) (2.1)  
2)  $J_3 = 0 \Rightarrow \exists$  ДПСК  $OXY$ , в которой уравнение (34) принимает вид:  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$  (2 пересекающиеся прямые) (2.2)

Замечание В уравнении (1.1)  $a^2 = \frac{-C}{A}, b^2 = \frac{-C}{B}$ ;  
в уравнении (1.2)  $a^2 = \frac{1}{A}, b^2 = \frac{1}{B}$ ; в (1.3)  $a^2 = \frac{C}{A}, b^2 = \frac{C}{B}$   
В уравнении (2.1)  $a^2 = \frac{-C}{A}, b^2 = \frac{-C}{-B}$

$$673) 1) 4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$$

$$\Delta_1 = 4 + 9 = 13 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36 > 0 \Rightarrow \text{эллиптич. тип}$$

Найдем координаты точки  $O'(x_0, y_0)$

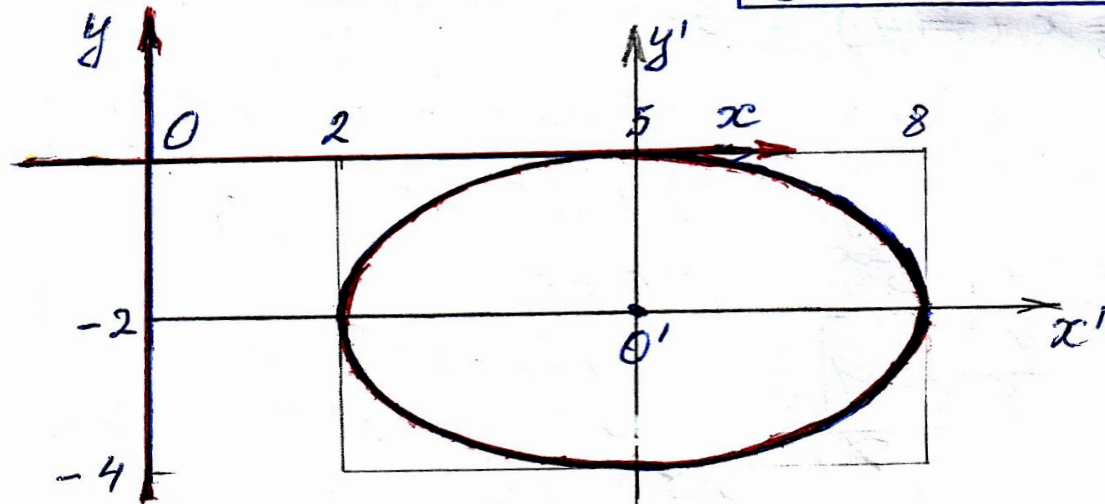
$$\begin{cases} 4x_0 - 20 = 0 \\ 9y_0 + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow O'(5; -2)$$

Преобразование параллельного переноса:

$$\begin{cases} x = x' + 5 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow 4(x'+5)^2 + 9(y'-2)^2 - 40(x'+5) + 36(y'-2) + 100 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x')^2 + 40x' + 100 + 9(y')^2 - 36y' + 36 - 40x' - 200 + 36y' - 72 + 100 = 0$$

$$4(x')^2 + 9(y')^2 = 36 \Rightarrow \boxed{\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1} \text{ - эллипс}$$



$$674 \quad 1) \quad 32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$$

$$J_1 = 32 - 7 = 25 > 0, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{vmatrix} = -224 - 676 = -900 < 0$$

$\Rightarrow$  гиперболический тип.

Линейная часть отсутствует, проведем преобразование поворота.

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{-39 \pm \sqrt{1521 + 2704}}{52} = \frac{-39 \pm \sqrt{4225}}{52} = \frac{-39 \pm 65}{52}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_1 = -2, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

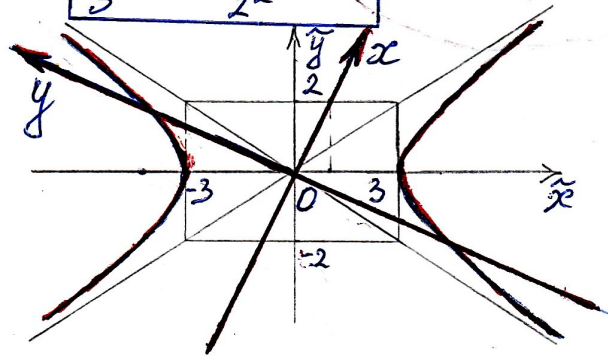
$$\text{Преобразование поворота: } \begin{cases} x = \tilde{x} \frac{1}{\sqrt{5}} + \tilde{y} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \tilde{x} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \tilde{y} \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 32 \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{y} \right)^2 + 52 \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{y} \right) \left( -\frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{y} \right) - 7 \left( -\frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{y} \right)^2 + 180 = 0$$

$$\frac{32}{5} (\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\tilde{y} + 4\tilde{y}^2) + \frac{52}{5} (-2\tilde{x}^2 - 3\tilde{x}\tilde{y} + 2\tilde{y}^2) - \frac{7}{5} (4\tilde{x}^2 - 4\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{y}^2) + 180 = 0$$

$$-100\tilde{x}^2 + 225\tilde{y}^2 + 900 = 0$$

$$\boxed{\frac{\tilde{x}^2}{3^2} - \frac{\tilde{y}^2}{2^2} = 1} \quad \text{— гипербола}$$



$$\underline{676} \quad 4) \quad 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$$

$$J_1 = 7 - 1 = 6 > 0, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 - 9 = -16 < 0$$

⇒ гиперболический тип

1. Параллельный перенос:

$$\begin{cases} 7x_0 + 3y_0 + 14 = 0 \\ 3x_0 - y_0 + 6 = 0 \end{cases} \Big| \cdot 3 \Rightarrow 16x_0 + 32 = 0 \Rightarrow x_0 = -2 \\ y_0 = 0$$

$$O'(-2; 0)$$

$$\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow 7(x' - 2)^2 + 6(x' - 2)y' - (y')^2 + 28(x' - 2) + 12y' + 28 = 0$$

$$7(x')^2 + 6x'y' - (y')^2 = 0 \quad (*)$$

2. Поворот.

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -3 \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Возьмем угол } \varphi_2. \quad \cos \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Преобразование поворота на угол  $\varphi_2$

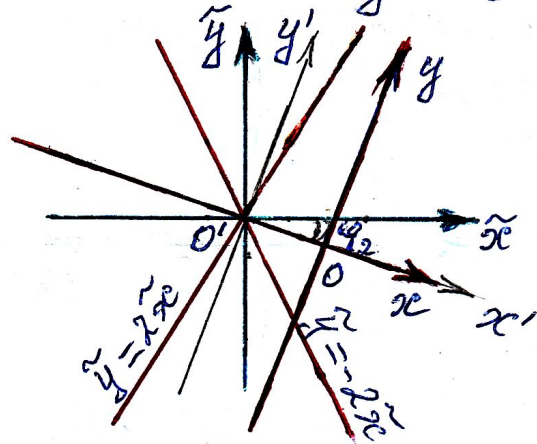
$$\begin{cases} x' = \tilde{x} \cos \varphi_2 - \tilde{y} \sin \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} (3\tilde{x} - \tilde{y}) \\ y' = \tilde{x} \sin \varphi_2 + \tilde{y} \cos \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} (\tilde{x} + 3\tilde{y}) \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow 7 \cdot \frac{1}{10} (3\tilde{x} - \tilde{y})^2 + 6 \cdot \frac{1}{10} (3\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} + 3\tilde{y}) - \frac{1}{10} (\tilde{x} + 3\tilde{y})^2 = 0$$

$$\Rightarrow 80\tilde{x}^2 - 90\tilde{y}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{4\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 0}$$

пара пересекающихся  
прямых

$$\tilde{y} = \pm 2\tilde{x}$$



678) 2)  $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$  (\*)

$\mathcal{I}_1 = 8 + 5 = 13 > 0$ ,  $\mathcal{I}_2 = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 > 0$  эллипт. тип

$\mathcal{I}_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & -28 \end{vmatrix} = 8(-140 - 4) - 2(-56 - 16) + 8(4 - 40) = -1296 < 0$

$\Rightarrow$  уравнение (\*) описывает эллипс

Рассмотрим каноническое уравнение (к)

$Ax^2 + By^2 + C = 0$ , для которого

$\mathcal{I}_1 = A + B = 13$ ,  $\mathcal{I}_2 = A \cdot B = 36$ ,  $\mathcal{I}_3 = A \cdot B \cdot C = -1296$

$\Rightarrow C = -\frac{1296}{36} = -36$

Из  $\begin{cases} A+B=13 \\ A \cdot B=36 \end{cases} \Rightarrow A=4, B=9$

В силу замечания  $a^2 = \frac{-C}{A} = 9 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$b^2 = \frac{-C}{B} = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow \boxed{b=2}$

$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$

$$\underline{679} \quad 1) \quad 5x^2 - 6xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$$

$$J_1 = 7 > 0, \quad J_2 = 5 \cdot 2 - 9 = 1 > 0 \Rightarrow \text{эллиптический тип}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0+2) + 2(10-9) = 0 \Rightarrow \text{вырожден. эллиптическая}$$

$$2(y^2 - 3xy) + 5x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$2(y^2 - 3xy + \frac{9}{4}x^2) - \frac{9}{2}x^2 + 5x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$2(y - \frac{3}{2}x)^2 + \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$2(y - \frac{3}{2}x)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

точка  $O'(2; 3)$

$$\underline{680} \quad 3) \quad 3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0$$

$$J_1 = 3 > 0, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{гиперболич. тип}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{vmatrix} = -2 \cdot 32 = -64 < 0 \Rightarrow \text{гипербола}$$

Рассмотрим каноническое уравнение (к)

$Ax^2 + By^2 + C = 0$ , для которого

$$J_1 = A+B=3, \quad J_2 = A \cdot B = -4, \quad J_3 = A \cdot B \cdot C = -64$$

$$\Rightarrow C = \frac{-64}{-4} = 16 \quad \begin{cases} A+B=3 \\ AB=-4 \end{cases} \Rightarrow A=-1, B=4$$

Из замечания для уравнения (2.1)

$$a^2 = \frac{-C}{A} = \frac{-16}{-1} = 16, \quad b^2 = \frac{-C}{-B} = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$\underline{a=4, b=2} \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$



$$681) 2) x^2 - 6xy + 8y^2 - 4y - 4 = 0$$

$$J_1 = 9 > 0, J_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 < 0 \Rightarrow \text{гиперболич. тип}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-32 - 4) + 3(12 - 0) = 0$$

$\Rightarrow$  вырожденная гипербола - 2 пересекающиеся прямые

$$(x^2 - 6xy + 9y^2) - 9y^2 + 8y^2 - 4y - 4 = 0$$

$$(x - 3y)^2 - (y + 2)^2 = 0$$

$$(x - 3y + y + 2)(x - 3y - y - 2) = 0$$

$$\boxed{x - 2y + 2 = 0, x - 4y - 2 = 0} \text{ - 2 пересекающ. прямые}$$

$$682) 1) 8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0$$

$$J_1 = 25 > 0, J_2 = 8 \cdot 17 - 6^2 = 100 > 0 \Rightarrow \text{эллипс. тип}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 8 \\ -6 & 17 & -6 \\ 8 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 8(51 - 36) + 6(-18 + 48) + 8(36 - 136) = -500$$

$$J_3 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{эллипс}}$$

$$4) 6x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 18y + 14 = 0$$

$$J_1 = 15 > 0, J_2 = 6 \cdot 9 - 3^2 = 45 > 0 \Rightarrow \text{эллипс. тип}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 9 \\ -2 & 9 & 14 \end{vmatrix} = 6(126 - 81) + 3(-42 + 18) - 2(-27 + 18) = 216 > 0$$

$\Rightarrow$   $\boxed{\text{мнимый эллипс}}$

Домашка: К. 673(2), 674(2), 675(1,2,3), 676(3), 677(1),  
678(1), 679(2), 680(1), 681(1), 682(2,5).

