



РАЗДЕЛ 3. ИНТЕГРАЛЫ И ИХ СВОЙСТВА

ТЕМА 3.2. СВОЙСТВА И МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

План

- 1. Интегрирование через преобразование дифференциала**
- 2. Интегрирование методом замены переменной**
- 3. Интегрирование по частям**
- 4. Метод интегрирования рациональных дробей**

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЧЕРЕЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

- 1) $dx = d(x + b)$
- 2) $dx = \frac{1}{a} d(ax)$, где $a \neq 0$
- 3) $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$, где $a \neq 0$



ПРИМЕР 2.1

$$\int \sqrt{x-2} dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int (x-2)^{\frac{1}{2}} d(x-2) =$$

$$\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x-2)^3} + c$$



$$\begin{aligned} \square \quad \circ \int \sin 5x \, dx &= \int \sin 5x \cdot \frac{1}{5} d(5x) = \\ &= \frac{1}{5} \int \sin 5x \, d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + c \end{aligned}$$



МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

ПРИМЕР 2.2

□

○ $\int \frac{3x \, dx}{x^2 + 7} =$

1) $U = x^2 + 7$

2) $dU = (x^2 + 7)' \cdot dx$

$$dU = 2x \, dx$$

$$x \, dx = \frac{1}{2} dU$$



$$\square \quad \circ \int \frac{3x \, dx}{x^2 + 7} = \int \frac{3 \cdot \frac{1}{2} dU}{U} =$$

$$\frac{3}{2} \int \frac{dU}{U} = \frac{3}{2} \ln|U| + c =$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2 + 7| + c$$



$$\square \int (\cos e^{3x}) \cdot e^{3x} dx =$$

$$1) U = e^{3x}$$

$$2) dU = (e^{3x})' dx$$

$$dU = e^{3x} \cdot (3x)' dx$$

$$dU = 3 \cdot e^{3x} dx$$

$$e^{3x} dx = \frac{1}{3} dy$$



$$\int (\cos e^{3x}) \cdot e^{3x} dx =$$

$$\int \cos U \frac{1}{3} dU = \frac{1}{3} \int \cos U dU =$$

$$\frac{1}{3} \sin U + c = \frac{1}{3} \sin e^{3x} + c$$



МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

$$\square \int U dV = V \cdot U - \int V dU$$

$$\circ \int f(Ux) d(Ux)$$

$$\circ \int P_n(x) e^{ax} dx$$

$$\circ \int P_n(x) \cos ax dx$$

$$\circ \int \underbrace{P_n(x)}_U \underbrace{\sin ax dx}_{dV}$$



ПРИМЕР 2.3

$$\square \circ \int \underbrace{x}_{U} \cdot \underbrace{\sin x \, dx}_{dV} =$$

1. $U = x$

$$dU = (x)' dx$$

$$dU = dx$$



$$2. \quad dV = \sin x \, dx$$

$$V = \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$3. \quad \int x \cdot \sin x \, dx =$$

$$-x \cdot \cos x - \int -\cos x \, dx =$$

$$-x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx =$$

$$-x \cdot \cos x + \sin x + c$$



МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

- Дробь является рациональной, если в числителе и в знаменателе находятся многочлены.
- Рациональная дробь является правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.
- Рациональная дробь является неправильной, если степень числителя больше степени знаменателя.



ПРИМЕР 2.4

□

○ $\int \frac{x^3 - 6}{x^2 - 3x + 2} dx =$

1. Т. к. дробь неправильная, то выделим целую часть разделив числитель на знаменатель.



$$\begin{array}{r}
 \square \quad x^3 + 0x^2 + 0x - 6 \quad | \quad x^2 - 3x + 2 \\
 \underline{x^3 - 3x^2 + 2x} \quad | \quad x + 3 \\
 3x^2 - 2x - 6 \\
 \underline{ 3x^2 - 9x + 6} \\
 7x - 12
 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 6}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{7x - 12}{x^2 - 3x + 2}$$



2. Разложим дробную часть на сумму простейших дробей, для этого знаменатель раскладываем на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

$$(x - 2)(x - 1)$$



$$\square \frac{7x-12}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

$$A(x-1) + B(x-2) = 7x-12$$

$$Ax - 1A + Bx - 2B = 7x - 12$$

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ -A - 2B = -12 \end{cases}$$

$$-1B = -5$$

$$B = 5$$

$$A = 7 - 5$$

$$A = 2$$

$$A = 2$$



□

$$\frac{7x - 12}{x^2 - 3x - 2} = \frac{2}{x - 2} + \frac{5}{x - 1}$$



$$\square 3. \quad \int \left(x + 3 + \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-1} \right) dx =$$

$$1) \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$2) \int 3 \, dx = 3x$$

$$3) \int \frac{2 \, dx}{x-2} = 2 \int \frac{d(x-2)}{x-2} = 2 \ln(x-2)$$

$$4) \int \frac{5 \, dx}{x-1} = 5 \int \frac{d(x-1)}{x-1} = 5 \ln(x-1)$$



$$\begin{aligned} \int \left(x + 3 + \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-1} \right) dx &= \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + 2\ln(x-2) \\ &\quad + 5\ln(x-1) + c \end{aligned}$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

□ Найти интегралы:

1. $\int (3x + 2)e^{2x} dx =$

2. $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+3} dx =$

