## Дифференцирование оригинала

Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и функции $f'(t)$, $f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \doteqdot p \cdot F(p) - f(0), \tag{11}$$

$$f''(t) \doteqdot p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \tag{12}$$

$$f'''(t) \doteqdot p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0), \tag{13}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{14}$$

По определению изображения находим

$$f'(t) \doteqdot \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt}\,dt \\ dv = f'(t)\,dt & v = f(t) \end{array}\right] =$$

$$= f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = -f(0) + pF(p).$$

Итак, $f'(t) \doteqdot p \cdot F(p) - f(0)$. Пользуясь полученным результатом, найдем изображение второй производной $f''(t)$:

$$f''(t) = \big(f'(t)\big)' \doteqdot p\big(p \cdot F(p) - f(0)\big) - f'(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Итак, $f'(t) \doteqdot p \cdot F(p) - f(0)$. Пользуясь полученным результатом, найдем изображение второй производной $f''(t)$:

$$f''(t) = \big(f'(t)\big)' \doteqdot p\big(p \cdot F(p) - f(0)\big) - f'(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Аналогично найдем изображение третьей производной $f'''(t)$:

$$f'''(t) \doteqdot p\big(p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)\big) - f''(0) =$$
$$= p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0).$$

Применяя формулу (11) $(n-1)$ раз, получим формулу (14). ■

*Замечание.* Формулы (11)–(14) просто выглядят при нулевых начальных условиях: если $f(0) = 0$, то $f'(t) \doteqdot p \cdot F(p)$; если $f(0) = f'(0) = 0$, то $f''(t) \doteqdot p^2 \cdot F(p)$, и, наконец, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \cdot F(p)$, т. е. дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на $p$.

***Пример.*** Найти изображение выражения

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2,$$

если $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -2$.

❍ Решение: Пусть $x(t) \doteqdot X(p) = X$. Тогда, согласно формулам (11)–(13), имеем

$$x'(t) \doteqdot p \cdot X - 3,$$
$$x''(t) \doteqdot p^2 \cdot X - p \cdot 3 - 0,$$
$$x'''(t) \doteqdot p^3 \cdot X - p^2 \cdot 3 - p \cdot 0 + 2,$$
$$2 = 2 \cdot \mathbf{1} \doteqdot \frac{2}{p}.$$

Следовательно,

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2 \doteqdot$$
$$\doteqdot p^3 \cdot X - 3p^2 + 2 - 2(p^2 \cdot X - 3p) - 3(p \cdot X - 3) + 2X + \frac{2}{p}.$$ ●

### Дифференцирование изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$
\begin{aligned}
F'(p) &\risingdotseq -t \cdot f(t),\\
F''(p) &\risingdotseq (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F^{(n)}(p) &\risingdotseq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

т. е. дифференцированию изображения соответствует умножение его оригинала на $(-t)$.

Согласно теореме 1 существования изображения, $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Следовательно, у нее существует производная любого порядка. Дифференцируя интеграл ( 1 ) по параметру $p$ (обоснование законности этой операции опустим), получим

$$
F'(p) = \left( \int\limits_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt \right)'_p = \int\limits_0^\infty \left( f(t) \cdot e^{-pt} \right)'_p dt =
$$

$$
= \int\limits_0^\infty f(t) \cdot (-t) e^{-pt}\, dt = \int\limits_0^\infty \big( -t \cdot f(t) \big) e^{-pt}\, dt \risingdotseq -t \cdot f(t),
$$

т. е. $F'(p) \risingdotseq -t \cdot f(t)$. Тогда $F''(p) = \big(F'(p)\big)' \risingdotseq -t\big(-t \cdot f(t)\big) = t^2 \cdot f(t)$, $F'''(p) \risingdotseq -t\big(t^2 \cdot f(t)\big) = -t^3 \cdot f(t)$ и вообще $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)$. ■

***Пример*** . Найти изображения функций $t^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $e^{at} \cdot t^n$, $t \cdot \sin \omega t$, $t \cdot \cos \omega t$, $t \cdot \operatorname{sh} \omega t$, $t \cdot \operatorname{ch} \omega t$, $e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t$, $e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t$.

◕ Решение: Так как $\mathbf{1} \risingdotseq \frac{1}{p}$, то, в силу свойства дифференцирования изображения, имеем $-t \cdot \mathbf{1} \risingdotseq -\frac{1}{p^2}$, т. е.

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}.$$

Далее находим $-t^2 \risingdotseq \left(\frac{1}{p^2}\right)'_p = -\frac{2}{p^3}$, т. е. $t^2 \risingdotseq \frac{2!}{p^3}$. Продолжая дифференцирование, получим

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

С учетом свойства смещения получаем

$$e^{at} \cdot t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Согласно формуле (5), $\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Следовательно,

$$\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right)'_p \risingdotseq -t \sin \omega t,$$

т. е. $-\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \risingdotseq -t \sin \omega t$, или

$$t \sin \omega t \risingdotseq \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}. \qquad (15)$$

Аналогично, используя формулы (6), (7) и (8), находим

$$t\cos\omega t \doteqdot \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}, \tag{16}$$

$$t\,\mathrm{sh}\,\omega t \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2},$$

$$t\,\mathrm{ch}\,\omega t \doteqdot \frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}.$$

**С учетом свойства смещения и формул (15) и (16), получаем**

$$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t \doteqdot \frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2},$$

$$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t \doteqdot \frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}.$$

## Интегрирование оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$, т. е. интегрированию оригинала от $0$ до $t$ соответствует деление его изображения на $p$.

❑ Функция $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$ является оригиналом (можно проверить).

Пусть $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала имеем

$$\varphi'(t) \risingdotseq p\cdot\Phi(p) - \varphi(0) = p\cdot\Phi(p)$$

(так как $\varphi(0) = 0$). А так как

$$\varphi'(t) = \left(\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right)'_t = f(t),$$

то $F(p) = p\cdot\Phi(p)$. Отсюда $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$, т. е. $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$. ■

**Интегрирование изображения**

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(\rho)\,d\rho$ сходится, то $\int\limits_p^\infty F(\rho)\,d\rho \risingdotseq$ $\risingdotseq \dfrac{f(t)}{t}$, т. е. интегрированию изображения от $p$ до $\infty$ соответствует деление его оригинала на $t$.

❑ Используя формулу (1) и изменяя порядок интегрирования (обоснование законности этой операции опускаем), получаем

$$\int\limits_p^\infty F(\rho)\,d\rho = \int\limits_p^\infty \left( \int\limits_0^\infty f(t) e^{-\rho t}\,dt \right) d\rho = \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_p^\infty e^{-\rho t}\,d\rho \right) f(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left( -\frac{1}{t} e^{-pt} \Big|_p^\infty \right) f(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt}\,dt \risingdotseq \frac{f(t)}{t}. \qquad \blacksquare$$

***Пример.*** Найти изображение функции $\dfrac{\sin t}{t}$; найти изображение интегрального синуса $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$.

Решение: Так как $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, то $\dfrac{\sin t}{t} \risingdotseq \displaystyle\int_p^\infty \frac{1}{\rho^2+1}\,d\rho = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$, т. е. $\dfrac{\sin t}{t} \risingdotseq \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p$. Применяя свойство интегрирования оригинала, получаем $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \risingdotseq \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}$. ●

**Умножение изображений**

Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

❑ Можно показать, что функция $\int\limits_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$ является оригиналом.

Используя преобразование Лапласа (1), можно записать

$$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq \int_0^\infty \left( \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \right) e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

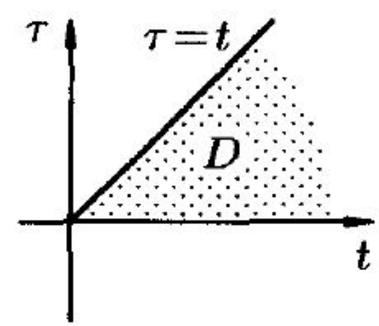


Рис. 309

Область $D$ интегрирования полученного двукратного интеграла определяется условиями $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ (см. рис. 309).

Изменяя порядок интегрирования и полагая $t - \tau = t_1$, получим

$$\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \doteqdot \int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt}\cdot f_2(t-\tau)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau \int_0^\infty f_2(t_1)e^{-pt_1}\,dt_1 = F_1(p)\cdot F_2(p). \qquad \blacksquare$$

Интеграл в правой части формулы (17) называется ***сверткой функции*** $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1(t) * f_2(t)$, т. е.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

Можно убедиться (положив $t - \tau = u$), что свертывание обладает свойством переместительности, т. е. $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$.

Итак, умножение оригиналов равносильно их свертыванию, т. е.

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \doteqdot f_1(t) * f_2(t).$$

***Пример.*** Найти оригинал функций

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} \quad \text{и} \quad F(p) = \frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

◒ Решение: Так как $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)} \cdot \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)}$, и $\dfrac{1}{p^2+\omega^2} \risingdotseq \dfrac{1}{\omega} \cdot \sin\omega t$, то

$$F(p) \risingdotseq \int_0^t \frac{1}{\omega} \cdot \sin\omega\tau \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin\omega(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2} \cdot \int_0^t \left(\cos\omega(2\tau - t) - \cos\omega t\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{2\omega} \cdot \sin\omega(2\tau-t)\Big|_0^t - \cos\omega t \cdot \tau\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - t\cos\omega t\right) = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t \cdot \cos\omega t),$$

т. е.

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} \risingdotseq \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t \cdot \cos\omega t).$$

Аналогично получаем

$$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2} \risingdotseq \frac{1}{2\omega} \cdot t \cdot \sin\omega t.$$ ●

**Следствие 2.** Если $f_1 * f_2 \doteqdot F_1(p) \cdot F_2(p)$ и $f_1'(t)$ также является оригиналом, то

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t). \tag{18}$$

□ Запишем произведение $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p)$ в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) - f_1(0) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p),$$

или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = \big(p \cdot F_1(p) - f_1(0)\big) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p).$$

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f_1'(t)$ $(f_1'(t) \doteqdot p \cdot F_1(p) - f_1(0))$ и $f_2(t)$. Поэтому на основании свойства умножения изображений и линейности можно записать $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot f_1'(t) * f_2(t) + f_1(0) \cdot f_2(t)$ или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = \big(p \cdot F_1(p) - f_1(0)\big) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p).$$

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f_1'(t)$ $(f_1'(t) \doteqdot p \cdot F_1(p) - f_1(0))$ и $f_2(t)$. Поэтому на основании свойства умножения изображений и линейности можно записать $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot f_1'(t) * f_2(t) + f_1(0) \cdot f_2(t)$ или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t).$$ ■

Формула (18) называется ***формулой Дюамеля***.

На основании свойства переместительности свертки формулу Дюамеля можно записать в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t-\tau)\,d\tau + f_2(t) \cdot f_1(0).$$

Формулу Дюамеля можно применять для определения оригиналов по известным изображениям.

***Пример.*** Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Решение: Так как

$$\frac{2p^2}{(p^2+1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t, \quad \frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля (78.18) имеем

$$2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \risingdotseq 2\int\limits_0^t \cos\tau \cdot \cos(t-\tau)\,d\tau + 0 = t \cdot \cos t + \sin t.$$

**Умножение оригиналов**

Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$ и $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p - z)dz,$$

где путь интегрирования — вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = \gamma > s_0$ (см. рис. 310) (примем без доказательства).

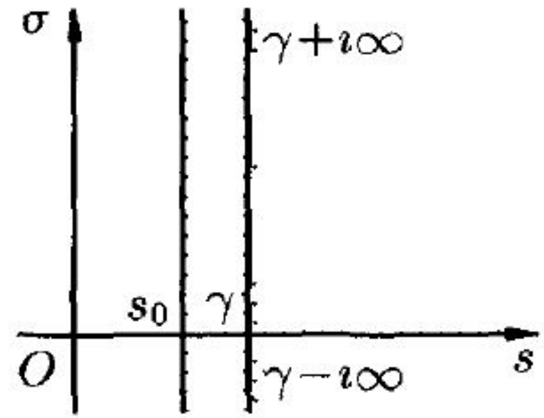


Рис. 310

## *Таблица оригиналов и изображений*

| № | Оригинал $f(t)$ | Изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$ |
|---|---|---|
| 1 | $\mathbf{1}$ | $\dfrac{1}{p}$ |
| 2 | $e^{at}$ | $\dfrac{1}{p-a}$ |
| 3 | $t$ | $\dfrac{1}{p^2}$ |
| 4 | $\sin\omega t$ | $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |
| 5 | $\cos\omega t$ | $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ |
| 6 | $\operatorname{sh}\omega t$ | $\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$ |
| 7 | $\operatorname{ch}\omega t$ | $\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$ |
| 8 | $e^{at}\cdot\sin\omega t$ | $\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$ |
| 9 | $e^{at}\cdot\cos\omega t$ | $\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$ |
| 10 | $e^{at}\cdot\operatorname{sh}\omega t$ | $\dfrac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$ |
| 11 | $e^{at}\cdot\operatorname{ch}\omega t$ | $\dfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | $e^{at} \cdot \operatorname{ch} \omega t$ | $\dfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$ |
| 12 | $t^n$ ($n$ — целое) | $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ |
| 13 | $e^{at} \cdot t^n$ | $\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ |
| 14 | $t \cdot \sin \omega t$ | $\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$ |
| 15 | $t \cdot \cos \omega t$ | $\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$ |
| 16 | $t \cdot \operatorname{sh} \omega t$ | $\dfrac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$ |
| 17 | $t \cdot \operatorname{ch} \omega t$ | $\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$ |
| 18 | $e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t$ | $\dfrac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$ |
| 19 | $e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t$ | $\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$ |
| 20 | $\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$ | $\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$ |
| 21 | $\dfrac{1}{2\omega^3}(\omega t \operatorname{ch} \omega t - \operatorname{sh} \omega t)$ | $\dfrac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$ |

| № | Оригинал $f(t)$ | Изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$ |
|---|---|---|
| 22 | $\sin(\omega t \pm \varphi)$ | $\dfrac{\omega\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$ |
| 23 | $\cos(\omega t \pm \varphi)$ | $\dfrac{p\cos\varphi \mp \omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$ |