

Дифференцирование оригинала

☉ Если $f(t) \doteq F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0), \quad (11)$$

$$f''(t) \doteq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \quad (12)$$

$$f'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0), \quad (13)$$

.....,

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (14)$$

□ По определению изображения находим

$$\begin{aligned} f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt &= \left[\begin{array}{l} u = e^{-pt} \\ dv = f'(t) dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = -pe^{-pt} dt \\ v = f(t) \end{array} \right] = \\ &= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

Итак, $f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0)$. Пользуясь полученным результатом, найдем изображение второй производной $f''(t)$:

$$f''(t) = (f'(t))' \doteq p(p \cdot F(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Итак, $f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0)$. Пользуясь полученным результатом, найдем изображение второй производной $f''(t)$:

$$f''(t) = (f'(t))' \doteq p(p \cdot F(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Аналогично найдем изображение третьей производной $f'''(t)$:

$$\begin{aligned} f'''(t) \doteq p(p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)) - f''(0) = \\ = p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0). \end{aligned}$$

Применяя формулу (11) $(n - 1)$ раз, получим формулу (14). ■

Замечание. Формулы (11)–(14) просто выглядят при нулевых начальных условиях: если $f(0) = 0$, то $f'(t) \doteq p \cdot F(p)$; если $f(0) = f'(0) = 0$, то $f''(t) \doteq p^2 \cdot F(p)$, и, наконец, если $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteq p^n \cdot F(p)$, т. е. дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на p .

Пример. Найти изображение выражения

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2,$$

если $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -2$.

○ Решение: Пусть $x(t) \doteq X(p) = X$. Тогда, согласно формулам (11)–(13), имеем

$$x'(t) \doteq p \cdot X - 3,$$

$$x''(t) \doteq p^2 \cdot X - p \cdot 3 - 0,$$

$$x'''(t) \doteq p^3 \cdot X - p^2 \cdot 3 - p \cdot 0 + 2,$$

$$2 = 2 \cdot 1 \doteq \frac{2}{p}.$$

Следовательно,

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2 \doteq$$

$$\doteq p^3 \cdot X - 3p^2 + 2 - 2(p^2 \cdot X - 3p) - 3(p \cdot X - 3) + 2X + \frac{2}{p}. \quad \bullet$$

Дифференцирование изображения

☉ Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\begin{aligned}F'(p) &\doteq -t \cdot f(t), \\F''(p) &\doteq (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t), \\&\dots\dots\dots, \\F^{(n)}(p) &\doteq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t), \\&\dots\dots\dots,\end{aligned}$$

т. е. дифференцированию изображения соответствует умножение его оригинала на $(-t)$.

□ Согласно теореме 1 существования изображения, $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Следовательно, у нее существует производная любого порядка. Дифференцируя интеграл (1) по параметру p (обоснование законности этой операции опустим), получим

$$\begin{aligned}F'(p) &= \left(\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right)'_p = \int_0^{\infty} (f(t) \cdot e^{-pt})'_p dt = \\&= \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} (-t \cdot f(t))e^{-pt} dt \doteq -t \cdot f(t),\end{aligned}$$

т. е. $F'(p) \doteq -t \cdot f(t)$. Тогда $F''(p) = (F'(p))' \doteq -t(-t \cdot f(t)) = t^2 \cdot f(t)$, $F'''(p) \doteq -t(t^2 \cdot f(t)) = -t^3 \cdot f(t)$ и вообще $F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)$. ■

Пример . Найти изображения функций t^n ($n \in \mathbb{N}$), $e^{at} \cdot t^n$, $t \cdot \sin \omega t$, $t \cdot \cos \omega t$, $t \cdot \operatorname{sh} \omega t$, $t \cdot \operatorname{ch} \omega t$, $e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t$, $e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t$.

○ Решение: Так как $1 \doteq \frac{1}{p}$, то, в силу свойства дифференцирования изображения, имеем $-t \cdot 1 \doteq -\frac{1}{p^2}$, т. е.

$$t \doteq \frac{1}{p^2}.$$

Далее находим $-t^2 \doteq \left(\frac{1}{p^2}\right)'_p = -\frac{2}{p^3}$, т. е. $t^2 \doteq \frac{2!}{p^3}$. Продолжая дифференцирование, получим

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

С учетом свойства смещения получаем

$$e^{at} \cdot t^n \doteq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Согласно формуле (5), $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Следовательно,

$$\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right)'_p \doteq -t \sin \omega t,$$

т. е. $-\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \doteq -t \sin \omega t$, или

$$t \sin \omega t \doteq \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}. \quad (15)$$

Аналогично, используя формулы (6), (7) и (8), находим

$$t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad (16)$$

$$t \operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2},$$

$$t \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}.$$

С учетом свойства смещения и формул (15) и (16), получаем

$$e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t \doteq \frac{2\omega(p - a)}{((p - a)^2 + \omega^2)^2},$$

$$e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t \doteq \frac{(p - a)^2 - \omega^2}{((p - a)^2 + \omega^2)^2}.$$

Интегрирование оригинала

☉ Если $f(t) \doteq F(p)$, то $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$, т. е. интегрированию оригинала от 0 до t соответствует деление его изображения на p .

□ Функция $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ является оригиналом (можно проверить).

Пусть $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала имеем

$$\varphi'(t) \doteq p \cdot \Phi(p) - \varphi(0) = p \cdot \Phi(p)$$

(так как $\varphi(0) = 0$). А так как

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)'_t = f(t),$$

то $F(p) = p \cdot \Phi(p)$. Отсюда $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$, т. е. $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$. ■

Интегрирование изображения

Если $f(t) \doteq F(p)$ и интеграл $\int_p^\infty F(\rho) d\rho$ сходится, то $\int_p^\infty F(\rho) d\rho \doteq \frac{f(t)}{t}$, т. е. интегрированию изображения от p до ∞ соответствует деление его оригинала на t .

□ Используя формулу (1) и изменяя порядок интегрирования (обоснование законности этой операции опускаем), получаем

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(\rho) d\rho &= \int_p^\infty \left(\int_0^\infty f(t) e^{-\rho t} dt \right) d\rho = \int_0^\infty \left(\int_p^\infty e^{-\rho t} d\rho \right) f(t) dt = \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t} e^{-\rho t} \Big|_p^\infty \right) f(t) dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \doteq \frac{f(t)}{t}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$; найти изобра-

жение интегрального синуса $\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

○ Решение: Так как $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$, то $\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{1}{\rho^2 + 1} d\rho = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$,

т. е. $\frac{\sin t}{t} \doteq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcsctg} p$. Применяя свойство интегрирования

оригинала, получаем $\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}$. ●

Умножение изображений

Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau. \quad (17)$$

□ Можно показать, что функция $\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$ является оригиналом.

Используя преобразование Лапласа (1), можно записать

$$\begin{aligned} \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau &\doteq \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Область D интегрирования полученного двукратного интеграла определяется условиями $0 \leq t < \infty$, $0 \leq \tau \leq t$ (см. рис. 309).

Изменяя порядок интегрирования и полагая $t - \tau = t_1$, получим

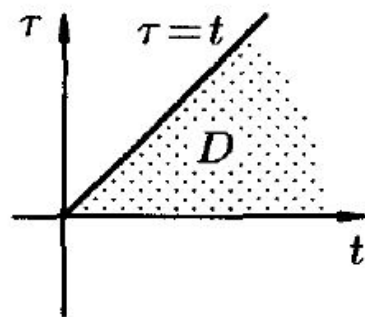


Рис. 309

$$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \doteq \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} \cdot f_2(t - \tau) dt =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty f_2(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = F_1(p) \cdot F_2(p). \quad \blacksquare$$

⇒ Интеграл в правой части формулы (17) называется **сверткой функции** $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1(t) * f_2(t)$, т. е.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau.$$

Можно убедиться (положив $t - \tau = u$), что свертывание обладает свойством переместительности, т. е. $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$.

Итак, умножение оригиналов равносильно их свертыванию, т. е.

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1(t) * f_2(t).$$

Пример. Найти оригинал функций

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \quad \text{и} \quad F(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

○ Решение: Так как $F(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1}{(p^2 + \omega^2)}$, и $\frac{1}{p^2 + \omega^2} \doteq \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t$, то

$$\begin{aligned} F(p) &\doteq \int_0^t \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega \tau \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \cdot \int_0^t (\cos \omega(2\tau - t) - \cos \omega t) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{2\omega} \cdot \sin \omega(2\tau - t) \Big|_0^t - \cos \omega t \cdot \tau \Big|_0^t \right) = \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - t \cos \omega t \right) = \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t), \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \doteq \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t),$$

Аналогично получаем

$$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} \doteq \frac{1}{2\omega} \cdot t \cdot \sin \omega t. \quad \bullet$$

Следствие 2. Если $f_1 * f_2 \doteq F_1(p) \cdot F_2(p)$ и $f_1'(t)$ также является оригиналом, то

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t). \quad (18)$$

□ Запишем произведение $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p)$ в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) - f_1(0) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p),$$

или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = (p \cdot F_1(p) - f_1(0)) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p).$$

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f_1'(t)$ ($f_1'(t) \doteq p \cdot F_1(p) - f_1(0)$) и $f_2(t)$. Поэтому на основании свойства умножения изображений и линейности можно записать $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1'(t) * f_2(t) + f_1(0) \cdot f_2(t)$ или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = (p \cdot F_1(p) - f_1(0)) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p).$$

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f_1'(t)$ ($f_1'(t) \doteq p \cdot F_1(p) - f_1(0)$) и $f_2(t)$. Поэтому на основании свойства умножения изображений и линейности можно записать $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1'(t) * f_2(t) + f_1(0) \cdot f_2(t)$ или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t). \quad \blacksquare$$

⇒ Формула (18) называется **формулой Дюамеля**.

На основании свойства переместительности свертки формулу Дюамеля можно записать в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t - \tau) d\tau + f_2(t) \cdot f_1(0).$$

Формулу Дюамеля можно применять для определения оригиналов по известным изображениям.

Пример. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2}.$$

○ Решение: Так как

$$\frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{p^2 + 1} \doteq \sin t, \quad \frac{p}{p^2 + 1} \doteq \cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля (78.18) имеем

$$2p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \doteq 2 \int_0^t \cos \tau \cdot \cos(t - \tau) d\tau + 0 = t \cdot \cos t + \sin t. \quad \bullet$$

Умножение оригиналов

Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$ и $f_2(t) \doteq F_2(p)$, то

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p-z) dz,$$

где путь интегрирования — вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = \gamma > s_0$ (см. рис. 310) (примем без доказательства).

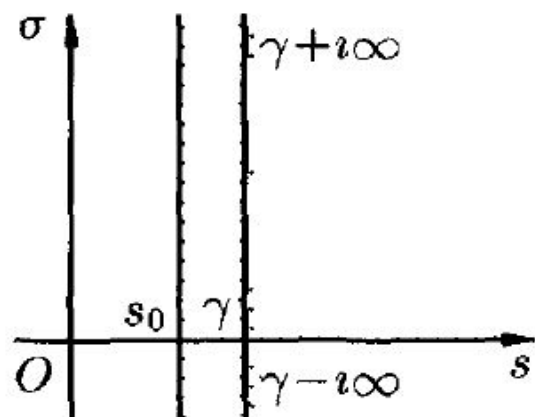


Рис. 310

Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
7	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
8	$e^{at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
9	$e^{at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
10	$e^{at} \cdot \text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}$
11	$e^{at} \cdot \text{ch } \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}$

11	$e^{at} \cdot \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}$
12	t^n (n — целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
15	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
16	$t \cdot \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 - \omega^2)^2}$
17	$t \cdot \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
18	$e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2 + \omega^2)^2}$
19	$e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t$	$\frac{(p-a)^2 - \omega^2}{((p-a)^2 + \omega^2)^2}$
20	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$
21	$\frac{1}{2\omega^3} (\omega t \operatorname{ch} \omega t - \operatorname{sh} \omega t)$	$\frac{1}{(p^2 - \omega^2)^2}$

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
22	$\sin(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi \pm p \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$
23	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$