



Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

*Справочный материал к практике 13 по
дисциплине «Математика» для студентов
направления подготовки
09.03.02 «Информационные системы и
технологии»*

Градиент. Производная по направлению

*Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-
математические науки» Черемухин А. Д.*

Пример 1. Найдите производную по направлению $l(20;21)$ в точке $M(5;-1)$ от функции

$$z = \frac{6x^2y + 6y}{3x^2y^2 + 3y^2 + 6x}$$

1. Находим частные производные

$$z'_x = \left(\frac{6x^2y + 6y}{3x^2y^2 + 3y^2 + 6x} \right)' = \frac{(6x^2y + 6y)' \cdot (3x^2y^2 + 3y^2 + 6x) - (6x^2y + 6y) \cdot (3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)'}{(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)^2} = \frac{12xy(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x) - (6x^2y + 6y)(6xy^2 + 6)}{(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)^2}$$

$$z'_y = \left(\frac{6x^2y + 6y}{3x^2y^2 + 3y^2 + 6x} \right)' = \frac{(6x^2y + 6y)' \cdot (3x^2y^2 + 3y^2 + 6x) - (6x^2y + 6y) \cdot (3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)'}{(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)^2} = \frac{(6x^2 + 6)(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x) - (6x^2y + 6y)(6x^2y + 6y)'}{(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)^2}$$

2. Находим значение частных производных в точке M

$$z'_x \Big|_M = \frac{12 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 5) - (6 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1)) (6 \cdot 5 \cdot (-1)^2 + 6)}{(3 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 5)^2} = -\frac{46}{81}$$

$$z'_y \Big|_M = \frac{(6 \cdot 5^2 + 6)(3 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 5) - (6 \cdot 5^2 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1))^2}{(3 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 5)^2} = -\frac{2015}{972}$$

Пример 1. Найдите производную по направлению $l(20;21)$ в точке $M(5;-1)$ от функции

$$z = \frac{6x^2y + 6y}{3x^2y^2 + 3y^2 + 6x}$$

3. Находим направляющие косинусы вектора направления

$$\cos(\alpha) = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 21^2}} = \frac{20}{29}; \quad \cos(\beta) = \frac{21}{\sqrt{20^2 + 21^2}} = \frac{21}{29}$$

4. Находим значение производной по направлению (это число)

$$\frac{dz}{dl} = z_x' \Big|_M \cdot \cos(\alpha) + z_y' \Big|_M \cdot \cos(\beta) = -\frac{46}{81} \cdot \frac{20}{29} + \left(-\frac{2015}{972}\right) \cdot \frac{21}{29} = -\frac{17785}{9396} \approx -1.893$$

Пример 2. Найдите градиент функции $u = 21x^2y^z + \frac{3}{2} \frac{x^2}{y^3z^3}$ в точке (2;2;3)

1. Находим частные производные

$$\frac{du}{dx} = \left(21x^2y^z + \frac{3}{2} \frac{x^2}{y^3z^3} \right)' = (21x^2y^z)' + \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{y^3z^3} \right)' = 21y^z(x^2)' + \frac{3}{2y^3z^3} = (x^2)' = 2x \left(21y^z + \frac{3}{2y^3z^3} \right)$$

$$\frac{du}{dy} = \left(21x^2y^z + \frac{3}{2} \frac{x^2}{y^3z^3} \right)' = (21x^2y^z)' + \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{y^3z^3} \right)' = 21x^2 \cdot (y^z)' + \frac{3x^2}{2z^3} \cdot \left(\frac{1}{y^3} \right)' = 21x^2zy^{z-1} - \frac{x^2}{2z^3y^4}$$

$$\frac{du}{dz} = \left(21x^2y^z + \frac{3}{2} \frac{x^2}{y^3z^3} \right)' = (21x^2y^z)' + \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{y^3z^3} \right)' = 21x^2 \cdot (y^z)' + \frac{3x^2}{2y^3} \cdot \left(\frac{1}{z^3} \right)' = \frac{21x^2y^z}{\ln(y)} - \frac{x^2}{2z^4y^3}$$

Пример 2. Найдите градиент функции $u = 21x^2y^z + \frac{3}{2} \frac{x^2}{y^3z^3}$ в точке $M(2;2;3)$

2. Находим значения частных производных в точке M

$$u'_x \Big|_M = 2 \cdot 2 \left(21 \cdot 2^3 + \frac{3}{2 \cdot 2^3 \cdot 3^3} \right) = \frac{24193}{36} \approx 672.03$$

$$u'_y \Big|_M = 21 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2^3 - 1 - \frac{2^2}{2 \cdot 3^3 \cdot 2^4} = \frac{217727}{216} \approx 1008.00$$

$$u'_z \Big|_M = \frac{21 \cdot 2^2 \cdot 2^3}{\ln(2)} - \frac{2^2}{2 \cdot 3^4 \cdot 2^3} = \frac{672}{\ln(2)} - \frac{1}{324} \approx 969.49$$

3. Записываем вектор градиента $\text{grad} u \Big|_M = (672.03, 1008.00, 969.49)$