Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

Справочный материал к практике 13 по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Градиент. Производная по направлению

Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-математические науки» Черемухин А. Д.

Пример 1. Найдите производную по направлению l(20;21) в точке M(5;-1) от функции $z = \frac{6x^2y + 6y}{3x^2y^2 + 3y^2 + 6x}$

1. Находим частные производные

$$z_x' = \left(\frac{6x^2y + 6y}{3x^2y^2 + 3y^2 + 6x} \right)' = \frac{(6x^2y + 6y)' \cdot (3x^2y^2 + 3y^2 + 6x) - (6x^2y + 6y) \cdot (3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)'}{(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)^2} = \frac{12xy(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x) - (6x^2y + 6y)(6xy^2 + 6)}{(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)^2}$$

$$z_y' = \left(\frac{6x^2y + 6y}{3x^2y^2 + 3y^2 + 6x} \right)' = \frac{(6x^2y + 6y)' \cdot (3x^2y^2 + 3y^2 + 6x) - (6x^2y + 6y) \cdot (3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)'}{(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)^2} = \frac{(6x^2 + 6)(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x) - (6x^2y + 6y)(6x^2y + 6y)}{(3x^2y^2 + 3y^2 + 6x)^2}$$

2. Находим значение частных производных в точке M

$$z_x'\Big|_M = \frac{12 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 5) - (6 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1))(6 \cdot 5 \cdot (-1)^2 + 6)}{(3 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 5)^2} = -\frac{46}{81}$$

$$z_y'\Big|_M = \frac{(6 \cdot 5^2 + 6)(3 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 5) - (6 \cdot 5^2 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1))^2}{(3 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 5)^2} = -\frac{2015}{972}$$

Пример 1. Найдите производную по направлению l(20;21) в точке M(5;-1) от функции $z = \frac{6x^2y + 6y}{3x^2y^2 + 3y^2 + 6x}$

3. Находим направляющие косинусы вектора направления

$$\cos(\alpha) = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 21^2}} = \frac{20}{29};\ \cos(\beta) = \frac{21}{\sqrt{20^2 + 21^2}} = \frac{21}{29}$$

4. Находим значение производной по направлению (это число)

$$\frac{dz}{dl} = z_x'\Big|_M \cdot \cos(\alpha) + z_y'\Big|_M \cdot \cos(\beta) = -\frac{46}{81} \cdot \frac{20}{29} + \left(-\frac{2015}{972}\right) \cdot \frac{21}{29} = -\frac{17785}{9396} \approx -1.893$$

Пример 2. Найдите градиент функции $u = 21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}$ в точке (2;2;3)

1. Находим частные производные

$$\frac{du}{dx} = \left(21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = \left(21x^2y^z\right)' + \left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = 21y^z\left(x^2\right)' + \frac{3}{2y^3z^3} = \left(x^2\right)' = 2x\left(21y^z + \frac{3}{2y^3z^3}\right)$$

$$\frac{du}{dy} = \left(21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = \left(21x^2y^z\right)' + \left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = 21x^2\cdot\left(y^z\right)' + \frac{3x^2}{2z^3}\cdot\left(\frac{1}{y^3}\right)' = 21x^2zy^{z-1} - \frac{x^2}{2z^3y^4}$$

$$\frac{du}{dz} = \left(21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = \left(21x^2y^z\right)' + \left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = 21x^2\cdot\left(y^z\right)' + \frac{3x^2}{2y^3}\cdot\left(\frac{1}{z^3}\right)' = \frac{21x^2y^z}{\ln(y)} - \frac{x^2}{2z^4y^3}$$

Пример 2. Найдите градиент функции $u = 21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}$ в точке M(2;2;3)

2. Находим значения частных производных в точке M

$$u_x'\Big|_M = 2\cdot 2\left(21\cdot 2^3 + \frac{3}{2\cdot 2^3\cdot 3^3}\right) = \frac{24193}{36} \approx 672.03$$

$$u_y'\Big|_M = 21\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2^{3-1} - \frac{2^2}{2\cdot 3^3\cdot 2^4} = \frac{217727}{216} \approx 1008.00$$

$$u_z'\Big|_M = \frac{21\cdot 2^2\cdot 2^3}{\ln(2)} - \frac{2^2}{2\cdot 3^4\cdot 2^3} = \frac{672}{\ln(2)} - \frac{1}{324} \approx 969.49$$

3. Записываем вектор градиента $grad\,u\Big|_M = l(672.03,\ 1008.00,\ 969.49)$