Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

Справочный материал к практике 13 по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Градиент. Производная по направлению

*Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-математические науки» Черемухин А. Д.*

Пример 1. Найдите производную по направлению l(20;21) в точке M(5;-1) от функции $z=\dfrac{6x^2y+6y}{3x^2y^2+3y^2+6x}$

1. Находим частные производные

$$z_x'=\left(\frac{6x^2y+6y}{3x^2y^2+3y^2+6x}\right)'=\frac{(6x^2y+6y)'\cdot(3x^2y^2+3y^2+6x)-(6x^2y+6y)\cdot(3x^2y^2+3y^2+6x)'}{(3x^2y^2+3y^2+6x)^2}=\frac{12xy(3x^2y^2+3y^2+6x)-(6x^2y+6y)(6xy^2+6)}{(3x^2y^2+3y^2+6x)^2}$$

$$z_y'=\left(\frac{6x^2y+6y}{3x^2y^2+3y^2+6x}\right)'=\frac{(6x^2y+6y)'\cdot(3x^2y^2+3y^2+6x)-(6x^2y+6y)\cdot(3x^2y^2+3y^2+6x)'}{(3x^2y^2+3y^2+6x)^2}=\frac{(6x^2+6)(3x^2y^2+3y^2+6x)-(6x^2y+6y)(6x^2y+6y)}{(3x^2y^2+3y^2+6x)^2}$$

2. Находим значение частных производных в точке М

$$z_x'\Big|_M=\frac{12\cdot5\cdot(-1)\cdot(3\cdot5^2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)^2+6\cdot5)-(6\cdot5^2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1))(6\cdot5\cdot(-1)^2+6)}{(3\cdot5^2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)^2+6\cdot5)^2}=-\frac{46}{81}$$

$$z_y'\Big|_M=\frac{(6\cdot5^2+6)(3\cdot5^2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)^2+6\cdot5)-(6\cdot5^2\cdot(-1)+6\cdot(-1))^2}{(3\cdot5^2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)^2+6\cdot5)^2}=-\frac{2015}{972}$$

Пример 1. Найдите производную по направлению l(20;21) в точке M(5;-1) от функции $z=\dfrac{6x^2y+6y}{3x^2y^2+3y^2+6x}$

3. Находим направляющие косинусы вектора направления

$$\cos(\alpha)=\frac{20}{\sqrt{20^2+21^2}}=\frac{20}{29};\ \cos(\beta)=\frac{21}{\sqrt{20^2+21^2}}=\frac{21}{29}$$

4. Находим значение производной по направлению (это число)

$$\frac{dz}{dl}=z'_x\Big|_M\cdot\cos(\alpha)+z'_y\Big|_M\cdot\cos(\beta)=-\frac{46}{81}\cdot\frac{20}{29}+\left(-\frac{2015}{972}\right)\cdot\frac{21}{29}=-\frac{17785}{9396}\approx-1.893$$

Пример 2. Найдите градиент функции $u = 21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}$ в точке (2;2;3)

1. Находим частные производные

$$\frac{du}{dx} = \left(21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = (21x^2y^z)' + \left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = 21y^z(x^2)' + \frac{3}{2y^3z^3} = (x^2)' = 2x\left(21y^z + \frac{3}{2y^3z^3}\right)$$

$$\frac{du}{dy} = \left(21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = (21x^2y^z)' + \left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = 21x^2\cdot(y^z)' + \frac{3x^2}{2z^3}\cdot\left(\frac{1}{y^3}\right)' = 21x^2zy^{z-1} - \frac{x^2}{2z^3y^4}$$

$$\frac{du}{dz} = \left(21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = (21x^2y^z)' + \left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}\right)' = 21x^2\cdot(y^z)' + \frac{3x^2}{2y^3}\cdot\left(\frac{1}{z^3}\right)' = \frac{21x^2y^z}{\ln(y)} - \frac{x^2}{2z^4y^3}$$

Пример 2. Найдите градиент функции $u = 21x^2y^z + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^3z^3}$ в точке M(2;2;3)

2. Находим значения частных производных в точке M

$$u'_x\Big|_M = 2\cdot 2\left(21\cdot 2^3 + \frac{3}{2\cdot 2^3\cdot 3^3}\right) = \frac{24193}{36} \approx 672.03$$

$$u'_y\Big|_M = 21\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2^{3-1} - \frac{2^2}{2\cdot 3^3\cdot 2^4} = \frac{217727}{216} \approx 1008.00$$

$$u'_z\Big|_M = \frac{21\cdot 2^2\cdot 2^3}{\ln(2)} - \frac{2^2}{2\cdot 3^4\cdot 2^3} = \frac{672}{\ln(2)} - \frac{1}{324} \approx 969.49$$

3. Записываем вектор градиента $grad\,u\Big|_M = l(672.03,\ 1008.00,\ 969.49)$