

---

# Модели полос поглощения



Richard M. Goody Walter M. Elsasser

Будак Владимир Павлович,  
Национальный исследовательский  
университет «МЭИ»  
кафедра светотехники

---

☐: +7 (495) 763-5239

[BudakVP@mpei.ru](mailto:BudakVP@mpei.ru)



# Поглощение отдельной линии

$$L_v = L_{0v} e^{-\kappa_v l_0} \Rightarrow \kappa_v l_0 = 1: L_v \cong L_{0v};$$

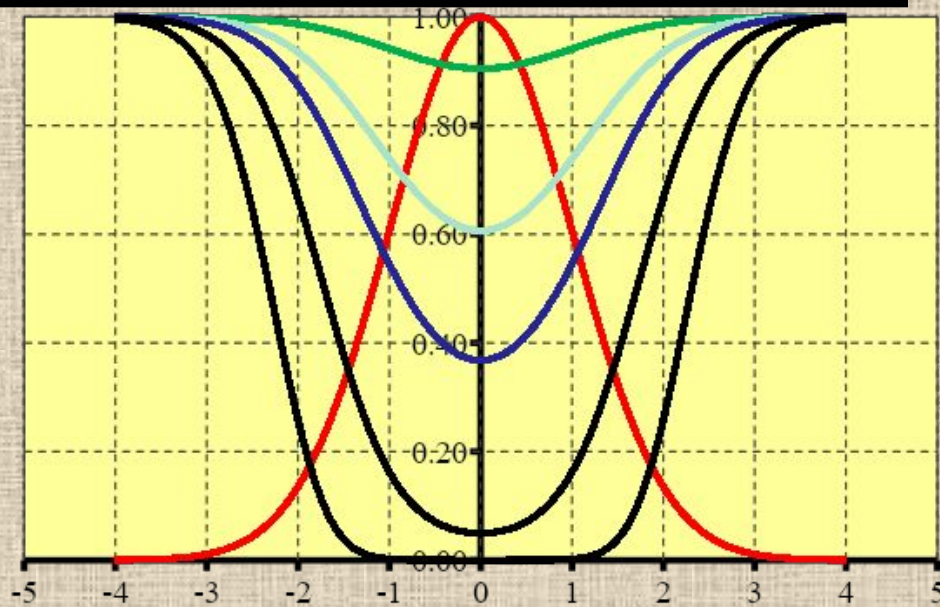
$$\kappa_v l_0 \ll 1: L_v \cong 0$$

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla) L_v(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = -\kappa_v(\mathbf{r}) L_v(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \kappa_v(\mathbf{r}) L_{sv}(\mathbf{r})$$

$$\frac{d}{d\tau} L_v(\tau, \hat{\mathbf{l}}) + L_v(\tau, \hat{\mathbf{l}}) = L_{sv}(\tau)$$

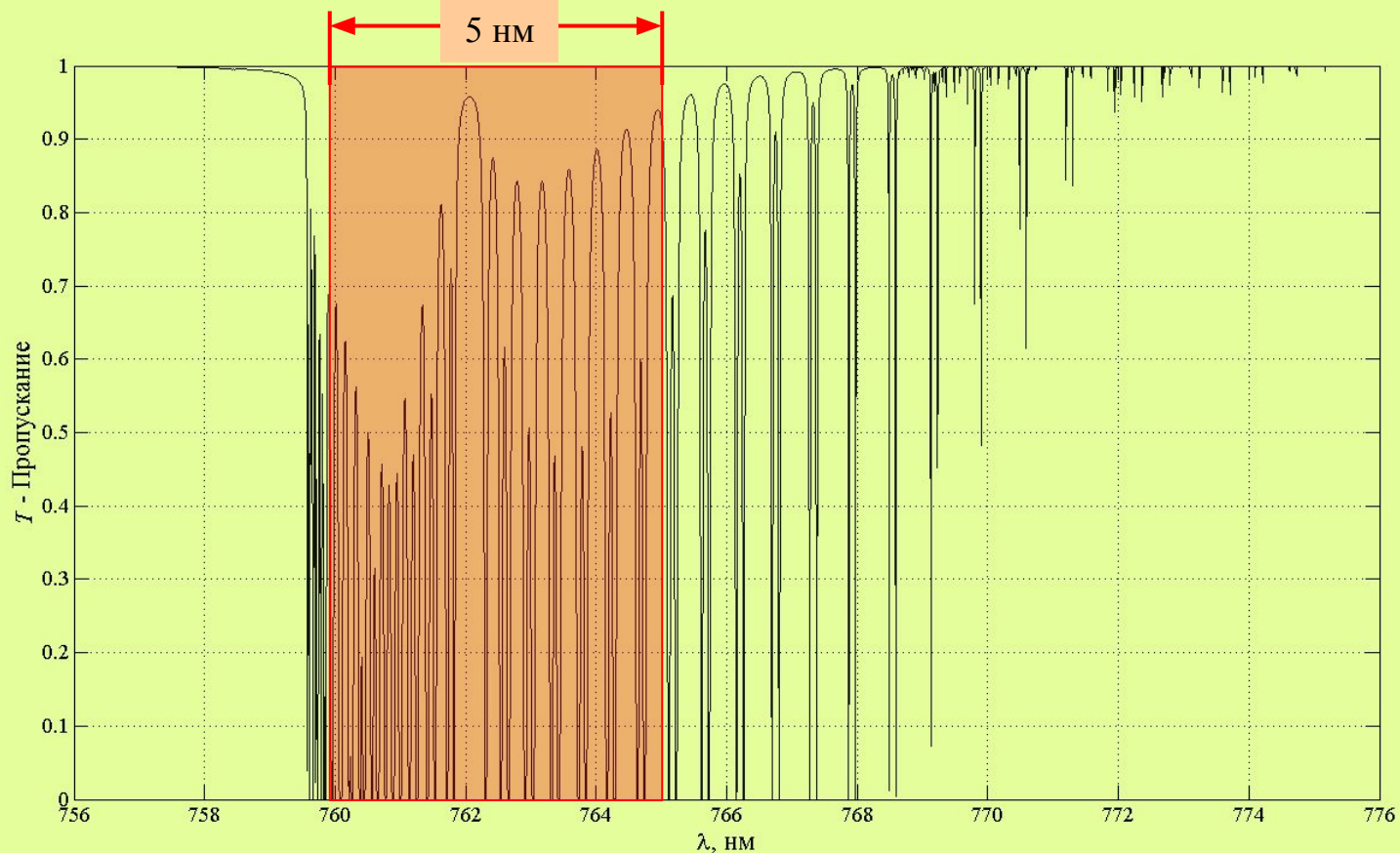
$$L_v(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \int_0^{l_0} L_{sv}(\mathbf{r} - \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) \kappa_v(\mathbf{r} - \zeta \hat{\mathbf{l}}) \exp\left\{-\int_0^{\zeta} \kappa_v(\mathbf{r} - \xi \hat{\mathbf{l}}) d\xi\right\} d\zeta = L_{sv} \int_0^{l_0} \kappa_v e^{-\kappa_v \zeta} d\zeta = L_{sv} (1 - e^{-\kappa_v l_0})$$

$$\kappa_v l_0 = 1: L_v \cong L_{sv} \kappa_v; \quad \kappa_v l_0 \ll 1: L_v \cong L_{sv}$$



*Самообращение линии – дальнейшее увеличении толщины центр линии не оказывает влияние на общее поглощение*

# Неразрешенные линии поглощения



*Реальные ОЭП не разрешают линий поглощения,  
измеряется среднее за полосу пропускание*

# Интегральное пропускание и поглощение

$$T_{\Delta v} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} L(v) dv}{\int_{v_1}^{v_2} L_0(v) dv} = \frac{1}{\Delta v} \int_{v_1}^{v_2} e^{-\kappa_v l} dv; \quad A_{\Delta v} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} [L_0(v) - L(v)] dv}{\int_{v_1}^{v_2} L_0(v) dv} = \frac{1}{\Delta v} \int_{v_1}^{v_2} (1 - e^{-\kappa_v l}) dv$$

$$L(v) = L_0(v) e^{-\kappa_v l}, \quad A_{\Delta v} = 1 - T_{\Delta v}$$

Лоренцевский контур линии:  $\kappa_v l = \frac{1}{\pi} \frac{S \Delta v_L l}{\Delta v_L^2 + (v - v_0)^2} = \frac{Sl}{\pi \Delta v_L} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 2u \frac{y^2}{x^2 + y^2}$

$$x = (v - v_0) / \Delta v, \quad y = \Delta v_L / \Delta v, \quad u = Sl / (2\pi \Delta v_L), \quad y \gg 1, \quad x \leq 1$$

$$A_L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \exp\left(-2u \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \right] dx$$

*В общем случае не интегрируется, рассмотрим частные случаи слабого и сильного поглощения*

# Частные случаи:

1. поглощение слабой линией:

$$u \ll 1: 1 - \exp\left(-2u \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \approx 1 - \left(1 - 2u \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) = 2u \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

$$A_L = \int_{-\infty}^{\infty} 2u \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx = 2uy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2uy \operatorname{arctg} t \Big|_{-1/y}^{1/y} \approx 2\pi u y$$

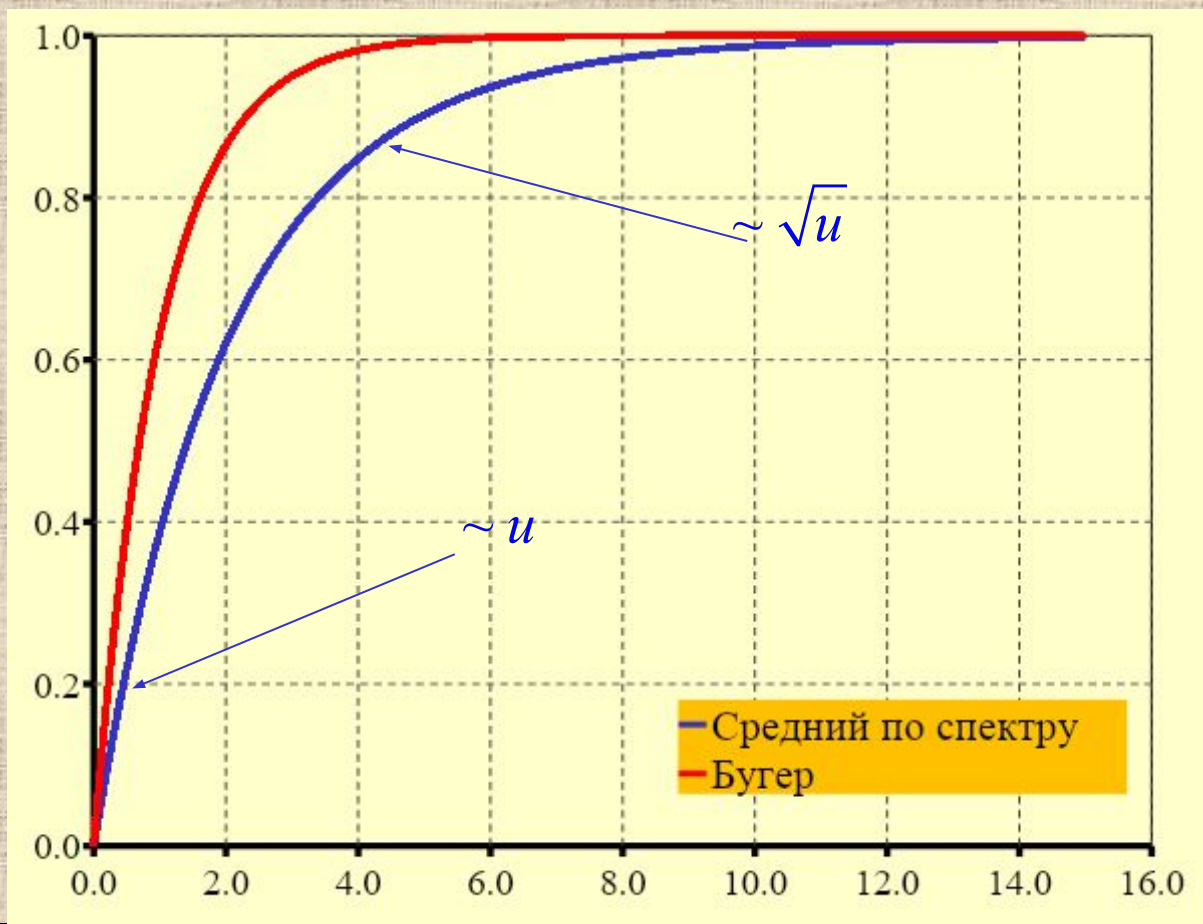
2. поглощение сильной линией  $u \gg 1$  и  $x \gg y$ :

$$A_L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \exp\left(-2u \frac{y^2}{x^2}\right) \right] dx \Bigg|_{\xi^2 = 2u \frac{y^2}{x^2}, x = \sqrt{2u} \frac{y}{\xi}, dx = -\sqrt{2u} \frac{y}{\xi^2} d\xi} = y\sqrt{2u} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-\xi^2}) \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = 1 - e^{-\xi^2} \\ dv = \frac{d\xi}{\xi^2} \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} du = 2\xi e^{-\xi^2} d\xi \\ v = -\frac{1}{\xi} \end{array} \right\} = y\sqrt{2u} \left\{ \frac{1 - e^{-\xi^2}}{\xi} \Big|_{\infty}^{-\infty} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right\} = 2y\sqrt{2\pi u}$$

$$\Delta\lambda_D = 0.1 \text{ \AA}$$

# Зависимость поглощения от толщи



*Зависимость поглощения от толщи для неразрешенной линии отличается от закона Bouguer*

# Line-by-line (полинейный) метод

---

Наиболее строгий путь – непосредственное вычисление коэффициентов поглощения и пропускания по трассе:

$$T_{\Delta\nu} = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \exp\left(-l \sum_i S_i f_i(\nu)\right) d\nu$$

Для этого необходимо:

- иметь базу данных по силам линии
- иметь базу данных по уширениям
- концентрациям и составу атмосферы
- уметь быстро вычислять контур Voigt линии

Такой подход получил название **LBLRTM** – line by line radiative transfer model

Основные базы данных:

- HITRAN – **h**igh-resolution **trans**mission molecular absorption database
- GEISA – **G**estion et **E**tude des **I**nformations **S**pectroscopiques  
Atmosphériques: Management and Study of Atmospheric Spectroscopic Information

---

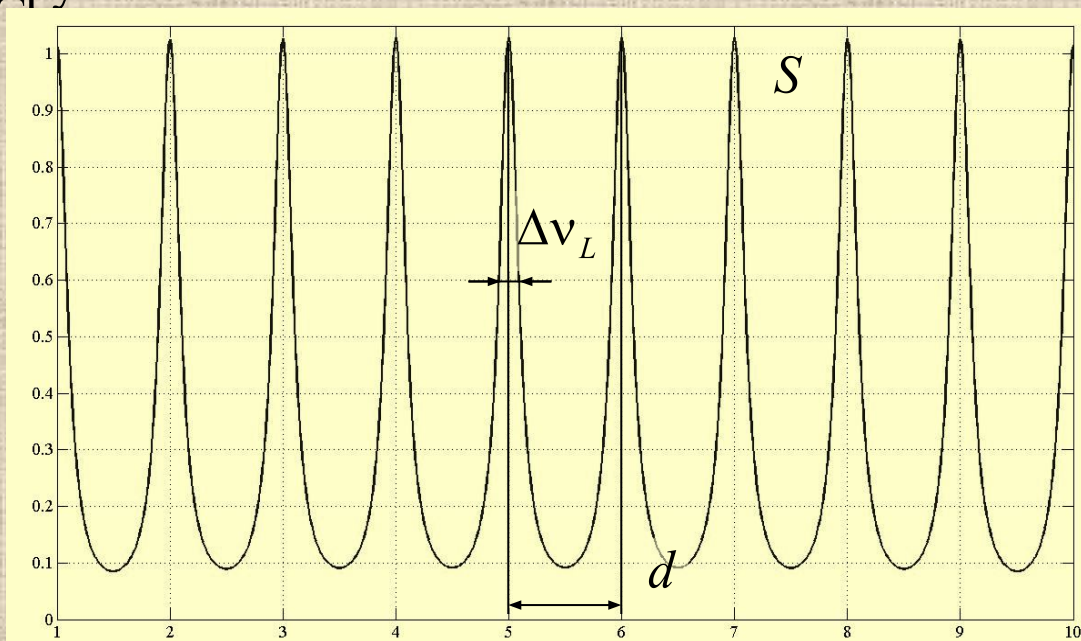
*GOSAT (Greenhouse gases Observing SATellite, IBUKI) :*  
*[http://www.gosat.nies.go.jp/index\\_e.html](http://www.gosat.nies.go.jp/index_e.html) - 18500 линий*

# Модель Elsasser

Бесконечное число линий с одинаковыми параметрами  $S$ ,  $\Delta\nu_L$ , расположенных на одинаковом расстоянии  $d$  друг от друга.

В случае контура Lorentz имеем для коэффициента поглощения:

$$\begin{aligned} \kappa_\nu l &= \frac{Sl}{\pi\Delta\nu_L} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{y^2}{y^2 + (x-n)^2} \\ &= 2\pi u y^2 \frac{\text{sh } 2\pi u}{\text{ch } 2\pi u - \cos 2\pi x} \end{aligned}$$



$$A_E = \int_{-1/2}^{1/2} \left[ 1 - \exp \left( -2\pi u y^2 \frac{\text{sh } 2\pi u}{\text{ch } 2\pi u - \cos 2\pi x} \right) \right] dx$$

*Разнесение линий  $d \rightarrow \infty$  должно приводить к поглощению отдельной линией, а учащение  $d \rightarrow 0$  – к серому поглощению*



# Частные случаи:

Случай редко расположенных линий:

$$\operatorname{sh} 2\pi y \approx 2\pi y, \quad \operatorname{ch} 2\pi y \approx 1 + (2\pi y)^2 / 2, \quad \cos 2\pi x \approx 1 - (2\pi x)^2 / 2$$

$$A_E \approx \int_{-1/2}^{1/2} \left[ 1 - \exp \left( -2\pi i u y^2 \frac{2 \cdot 2\pi y}{(2\pi y)^2 + (2\pi x)^2} \right) \right] dx = \int_{-1/2}^{1/2} \left[ 1 - \exp \left( -2i u y^2 \frac{1}{y^2 + x^2} \right) \right] dx \equiv A_L$$

Случай часто расположенных линий:

$$y \gg 1, \quad \operatorname{sh} 2\pi y \approx \operatorname{ch} 2\pi y \approx |\cos 2\pi x| \leq 1$$

$$A_E = \int_{-1/2}^{1/2} \left[ 1 - \exp(-2\pi i u y^2) \right] dx = 1 - \exp(-2\pi i u y^2)$$

*Модель Elsasser соответствует колебательному спектру, который в атмосфере характерен для паров воды*

# Случайная модель Goody

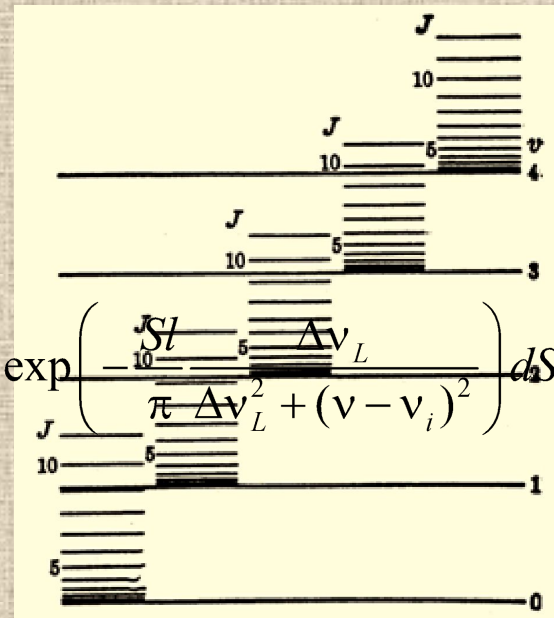
Пусть  $n$  линий располагаются на интервале шириной  $nd$  равномерно. Тогда вероятность данной реализации спектра имеет вид

$$dw(\nu, S) = \prod_{i=1}^n \frac{d\nu_i}{(nd)^n} p(S, S_0) dS = \prod_{i=1}^n \frac{d\nu_i}{nd} p(S, S_0) dS$$

$$T_G = \int_{\nu_0}^{\nu_0+nd} \exp\left(-\frac{Sl}{\pi} \frac{\Delta\nu_L}{\Delta\nu_L^2 + (\nu - \nu_i)^2}\right) dw(\nu, S) = \int_{\nu_0}^{\nu_0+nd} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{p(S, S_0)}{nd} \exp\left(-\frac{Sl}{\pi} \frac{\Delta\nu_L}{\Delta\nu_L^2 + (\nu - \nu_i)^2}\right) dS d\nu_i$$

$$T_G = \left\{ \frac{1}{nd} \int_0^\infty p(S, S_0) \int_{-nd/2}^{nd/2} \exp\left(-\frac{Sl}{\pi} \frac{\Delta\nu_L}{\Delta\nu_L^2 + x^2}\right) dx dS \right\}^n$$

$$\frac{1}{nd} \int_0^\infty p(S, S_0) \int_{-nd/2}^{nd/2} dx dS = 1 \quad T_G = \left\{ 1 - \frac{1}{nd} \int_0^\infty p(S, S_0) \int_{-nd/2}^{nd/2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Sl}{\pi} \frac{\Delta\nu_L}{\Delta\nu_L^2 + x^2}\right) \right] dx dS \right\}^n$$



Допустим, что число линий в полосе очень велико:  $n \rightarrow \infty$ .

# Бесконечное число линий в модели Goody

Второй замечательный предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow e^{-a}$

$$T_G = \left\{ 1 - \frac{1}{nd} \int_0^\infty p(S, S_0) \int_{-nd/2}^{nd/2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Sl}{\pi} \frac{\Delta v_L}{\Delta v_L^2 + x^2}\right) \right] dx dS \right\}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$\rightarrow \exp \left\{ \frac{1}{d} \int_0^\infty p(S, S_0) \int_{-\infty}^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Sl}{\pi} \frac{\Delta v_L}{\Delta v_L^2 + x^2}\right) \right] dx dS \right\}$$

1)  $p(S, S_0) = \delta(S - S_0) \delta(S - S_0)$  интенсивности

$$T_G = \exp \left\{ \frac{1}{d} \int_{-\infty}^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Sl}{\pi} \frac{\Delta v_L}{\Delta v_L^2 + x^2}\right) \right] dx \right\} = \exp(-A_L)$$

2)  $p(S, S_0) = \exp(-\frac{S}{d}) \delta(S - S_0)$  деление

1. внутри групп линий по Elsasser, а группы случайно;
2. спектр разбивается на интервалы, внутри линии по Goody.

# Неоднородные трассы. Модель Curtis-Godson

- однородные трассы – изометрические и изобарическим
- неоднородная трасса заменяется эффективной однородной
- в случаях слабого и сильного поглощений совпадает с точными формулами
- на примере поглощения с линией Lorentz:

$$A_{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v} \int_{(\Delta v)} \left[ 1 - \exp \left( - \int_0^l \sum_n \frac{S_n(z)}{\pi} \frac{\Delta v_n(z)}{(v - v_n)^2 + (\Delta v_n(z))^2} dz \right) \right] dv$$

$$\langle A_{\Delta v} \rangle = \frac{1}{\Delta v} \int_{(\Delta v)} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{l}{\pi} \sum_n \frac{\langle S_n \rangle \langle \Delta v_n \rangle}{(v - v_n)^2 + \langle \Delta v_n \rangle^2} \right) \right] dv$$

Случай слабого поглощения

$$A_{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v} \int_{(\Delta v)} \int_0^l \sum_n \frac{S_n(z)}{\pi} \frac{\Delta v_n(z)}{(v - v_n)^2 + (\Delta v_n(z))^2} dz dv$$

$$= \int_0^l \sum_n S_n(z) \frac{1}{\pi \Delta v} \int_{(\Delta v)} \frac{\Delta v_n(z)}{(v - v_n)^2 + (\Delta v_n(z))^2} dv dz = \int_0^l \sum_n S_n(z) dz$$

*Аналогично распишем для выражения через эффективные параметры:*

$$\langle A_{\Delta v} \rangle = l \sum_n \langle S_n \rangle$$

# Случай сильного поглощения

Сравнивая оба выражения получим:

$$\langle S_n \rangle = \frac{1}{l} \int_0^l S_n(z) dz$$

При сильной линии поглощение происходит “крыльями” линии и можно допустить, что  $(v - v_n)^2 \propto \Delta v_n^2(z)$ :

$$A_{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v} \int_{(\Delta v)} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{(v - v_n)^2} \int_0^l S_n(z) \Delta v_n(z) dz \right) \right] dv$$

$$A_{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v} \int_{(\Delta v)} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{(v - v_n)^2} \langle S_n \rangle \langle \Delta v_n \rangle l \right) \right] dv$$

Сравнивая выражения

$$\langle \Delta v_n \rangle = \frac{1}{\langle S \rangle l} \int_0^l S_n(z) \Delta v_n(z) dz = \frac{\int_0^l S_n(z) \Delta v_n(z) dz}{\int_0^l S_n(z) dz}$$

*Неоднородные трассы с неразрешенными линиями поглощения считаются с помощью таблиц*