Здравствуйте!

Лекция №3

6.6 Разложение полиномов (многочленов) на сомножители

Выражение

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

называется полиномом или многочленом от переменной z степени n. Полином степени 0 – это константа ($P_0(z) = a_0$). Если $P(z) \equiv 0$, то полином называется **нулевым полиномом**. Его степень не определена.

В дальнейшем мы будем считать, что переменная $z = x + iy$ **комплексная,** а коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – **действительные** числа.

Пусть $Q_m(z)$ есть полином от переменной z степени $m<n$. Тогда имеет место представление

$$P_n(z) = Q_m(z)\varphi(z) + R(z),$$

где полином $\varphi(z)$ (его степень равна $n-m$) называется **частным** полиномов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$, а полином $R(z)$ – **остатком** от деления $P_n(z)$ на $Q_m(z)$. Степень остатка **не выше** $m-1$**, либо остаток есть нулевой полином.** Обычно операция деления осуществляется столбиком, и как это делать – учат в школе.

Если $R(z) \equiv 0$, то говорят, что полином $P_n(z)$ делится на $Q_m(z)$.

Корни полинома

Определение. Число b (действительное или комплексное) называется **корнем** полинома $P_n(z)$, если $P_n(b) = 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы *b* было корнем полинома $P_n(z)$, **необходимо и достаточно, чтобы** $P_n(z)$ делилось на $z-b$.

Доказательство.

По сказанному выше, имеем

$$P_n(z)=(z-b)\varphi(z)+c,$$

где c – полином степени 0, то есть константа. Тогда

1. Если b есть корень $P_n(z)$, то $P_n(b)=0$, откуда следует, что $c=0$ и $P_n(z)$ делится на $z-b$.

2. Если $P_n(z)$ делится на $z-b$, то $P_n(z)=(z-b)\varphi(z)$ и тогда $P_n(b)=0$, то есть b корень полинома $P_n(z)$. ■

Теорема 2. Пусть корень полинома b есть комплексное число. Тогда комплексно сопряженное число $\bar{b}$ также является корнем этого полинома.

Доказательство.

1. Докажем сначала, что $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$. Имеем

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\overline{z^n} = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

С другой стороны

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

$$(\bar{z})^n = r^n(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) = \overline{z^n}.$$

2. Так как по условию все коэффициенты полинома есть действительные числа, то $\forall k = \overline{0,n}\ \ \overline{a}_k = a_k$.

3. Поэтому, если

$$P_n(b) = a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

то

$$\overline{P_n(b)} = a_0 \overline{b^n} + a_1 \overline{b^{n-1}} + a_2 \overline{b^{n-2}} + \ldots + a_n =$$

$$= a_0 \overline{b}^{\,n} + a_1 \overline{b}^{\,n-1} + a_2 \overline{b}^{\,n-2} + \ldots + a_n = \overline{0} = 0$$

и $\overline{b}$ также есть корень полинома $P_n(z)$.

Таким образом, комплексные корни полинома всегда «ходят парами»: если $b = b_1 + ib_2$ есть корень, то $\overline{b} = b_1 - ib_2$ – тоже корень.

<u>Основная теорема алгебры</u>. Всякий полином степени $n \geq 1$ имеет хотя бы один корень (действительный или комплексный).

Доказывать эту теорему мы не будем – все-таки это курс математического анализа, а не алгебры.

Теорема 3. Полином степени *n* имеет ровно *n* корней.

Доказательство.

Рассмотрим полином $P_n(z)$. Тогда, по основной теореме алгебры, $\exists b_1$ такое, что $P_n(b_1)=0$ и поэтому имеет место разложение $P_n(z)=(z-b_1)P_{n-1}(z)$.

Рассмотрим полином $P_{n-1}(z)$. Тогда, по основной теореме алгебры, $\exists b_2$ такое, что $P_{n-1}(b_2)=0$ и поэтому имеет место разложение $P_{n-1}(z)=(z-b_2)P_{n-2}(z)$.

Рассмотрим полином $P_{n-2}(z)$. Тогда, по основной теореме алгебры, $\exists b_3$ такое, что $P_{n-2}(b_3)=0$ и поэтому имеет место разложение $P_{n-2}(z)=(z-b_3)P_{n-3}(z)$.

И т.д., и т.д., и т.д.

Заметим, что каждый раз степень полинома уменьшается на 1. В конце концов, на n-м шаге мы дойдем до полинома степени 0 и получим такое разложение

$$P_n(z) = a_0(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n).$$

Других корней у этого полинома **нет**, так если z не совпадает с каким-то из b_k, то все сомножители вида $(z-b_k)$ отличны от нуля и $P_n(z) \neq 0$.

Определение. Если в разложении $P_n(z)$ на сомножители бином $(z-b)$ повторяется k раз, то говорят, что корень b имеет **кратность** k.

Если $k = 1$, то корень называется **простым**.

Заметим еще, что в паре комплексно сопряженных корней оба корня имеют одинаковую кратность.

Разложение полинома на сомножители

Теперь мы можем окончательно решить вопрос о разложении полинома на сомножители. Рассмотрим полином $P_n(z)$. Пусть он имеет **действительные** корни $b_1, b_2, \ldots, b_m$ с кратностями $k_1, k_2, \ldots, k_m$ соответственно. Далее, пусть он имеет **пары комплексно сопряженных** корней $(a_1, \overline{a}_1)$**,** $(a_2, \overline{a}_2)$**, ... ,** $(a_r, \overline{a}_r)$ с кратностями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ соответственно. Заметим, что при этом выполняется условие

$k_1 + k_2 + \ldots + k_m + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r) = n$.

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с полиномами от действительной переменной, поэтому будем писать всюду вместо z **действительную** переменную x. Тогда имеет место разложение

$$P_n(x) = a_0 \cdot \prod_{j=1}^{m} (x - b_j)^{k_j} \cdot \prod_{s=1}^{r} (x - a_s)^{\lambda_s} (x - \overline{a}_s)^{\lambda_s} .$$

Рассмотрим пару $a_s = u_s + iv_s$, $\bar{a}_s = u_s - iv_s$. Для нее имеем

$$(x-a_s)(x-\bar{a}_s) = (x-u_s-iv_s)(x-u_s+iv_s) =$$
$$= (x-u_s)^2 + v_s^2 = x^2 - 2xu_s + u_s^2 + v_s^2.$$

Обозначим $-2u_s = p_s$, $u_s^2 + v_s^2 = q_s$. Тогда

$$(x-a_s)(x-\bar{a}_s) = x^2 + p_s x + q_s.$$

Заметим, что в этом случае должно выполняться условие $p_s^2 - 4q_s < 0$.

Тогда полином $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0 \cdot \prod_{j=1}^{m} (x-b_j)^{k_j} \cdot \prod_{s=1}^{r} (x^2 + p_s x + q_s)^{\lambda_s}.$$

Сомножитель $(x-b_j)^{k_j}$ соответствует действительному корню b_j кратности k_j; сомножитель $(x^2 + p_s x + q_s)^{\lambda_s}$ – паре комплексно сопряженных корней кратности λ_s.

Разложение рациональных дробей на простейшие

Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ есть полиномы действительной переменной x. Функция вида $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ называется **дробно рациональной функцией,** или, короче, **рациональной дробью**. Если $m < n$, то рациональная дробь называется **правильной**.

Если $m \geq n$, то можно всегда поделить столбиком и представить рациональную дробь в виде

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \varphi_{m-n}(x) + \frac{R_{n-1}(x)}{P_n(x)}.$$

Теорема 1. Пусть $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ **– правильная рациональная дробь и** ***b*** **есть действительный корень полинома** $P_n(x)$ **кратности** ***k*****, то есть** $P_n(x) = (x-b)^k \varphi(x)$, $\varphi(b) \neq 0$. **Тогда имеет место разложение**

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{(x-b)^k} + \frac{\psi(x)}{(x-b)^{k-s}\varphi(x)},$$

где $s \geq 1$, **а** $\psi(x)$ **– полином такой степени, что второе слагаемое есть правильная рациональная дробь.**

Доказательство.

Возьмем $A = \dfrac{Q_m(b)}{\varphi(b)}$ и рассмотрим разность

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} - \frac{A}{(x-b)^k} = \frac{Q_m(x)}{(x-b)^k \varphi(x)} - \frac{A}{(x-b)^k} =$$

$$= \frac{Q_m(x) - A\varphi(x)}{(x-b)^k \varphi(x)}.$$

$Q_m(b) - A\varphi(b) = 0$, то есть b есть корень полинома $Q_m(x) - A\varphi(x)$. Пусть его кратность равна s. Тогда

$$Q_m(x) - A\varphi(x) = (x-b)^s \psi(x),$$

и

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} - \frac{A}{(x-b)^k} = \frac{(x-b)^s \psi(x)}{(x-b)^k \varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(x-b)^{k-s} \varphi(x)},$$

что и требовалось доказать.

Следствие.

Продолжая разложение дальше, получим

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_k}{(x-b)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-b)^{k-1}} + \frac{A_{k-2}}{(x-b)^{k-2}} + \ldots + \frac{A_1}{x-b} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}.$$

Некоторые из $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ могут быть равны нулю, но $A_k \neq 0$.