

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ АЛГОРИТМА

Подготовил: ученик 9 класса Хайновский И.Г.

- Вычислительная сложность алгоритма Евклида изучена полностью.[17] Эта сложность может быть описана произведением количества шагов деления, требуемых алгоритмом, на вычислительную сложность одного шага. Первый известный анализ алгоритма Евклида был предложен Рейнаудом в 1811.[18] Он показал, что число шагов алгоритма для пары чисел  $(u, v)$  ограничено  $v$ . Позже он улучшил оценку до  $v/2 + 2$ . Эмиль Леже, в 1837 году, изучил наихудший случай, когда для вычисления НОД подаются последовательные числа Фибоначчи.[19] Затем, в 1841 году, Пьер Жозеф Финк показал,[20] что количество шагов алгоритма не превышает  $2 \log_2 v + 1$ . Следовательно алгоритм работает за полиномиальное время от размера меньшего из пары чисел  $(u, v)$ . [19] Анализ Финка был уточнён Габриэлем Ламе в 1844 году.[21] Он показал, что количество шагов, необходимых для завершения алгоритма, не более чем в пять раз превышает  $n$  — количество цифр в десятичном представлении меньшего из пары чисел  $(u, v)$ . [22][23]
- Когда НОД вычисляется для чисел, которые вписываются в одно машинное слово, каждый шаг алгоритма занимает постоянное время. В данном случае анализ Ламе предполагает, что вычислительная сложность оценивается как  $O(n)$ . Однако в модели расчёта, подходящей для вычислений с числами больше одного машинного слова, оценка сложности вычисления одного остатка может быть  $O(n^2)$ . [24] В этом случае общее время для всех этапов алгоритма можно проанализировать с помощью телескопического ряда, показав что это также  $O(n^2)$ . Для ускорения алгоритма Евклида могут быть использованы современные алгоритмические методы, основанные на методе Шёнхаге — Штрассена для быстрого целочисленного умножения. Это приводит к квазиполиномиальному времени. [25]

# КОЛИЧЕСТВО ШАГОВ

- Число шагов для вычисления НОД двух натуральных чисел  $a$  и  $b$  обозначим как  $T(a, b)$ . Если  $g$  — это наибольший общий делитель  $a$  и  $b$ , тогда  $a = mg$  и  $b = ng$  для двух взаимно простых чисел  $m$  и  $n$ . Тогда  $T(a, b) = T(m, n)$ , что можно заметить, если разделить уравнения, полученные при вычислении НОД для пары  $(a, b)$ , на  $g$ . [26] Используя тот же принцип, число шагов алгоритма остаётся неизменным, если  $a$  и  $b$  умножаются на общий множитель  $w$ , что эквивалентно равенству  $T(a, b) = T(wa, wb)$ . Следовательно, количество шагов  $T$  может сильно различаться между соседними парами чисел, такими как  $(a, b)$  и  $(a, b+1)$ , так как данная величина зависит от НОД.
- Рекурсивный характер алгоритма Евклида даёт следующее уравнение  $T(a, b) = 1 + T(b, r_0) = 2 + T(r_0, r_1) = \dots = N + T(r_{N-2}, r_{N-1}) = N + 1$ , где  $T(x, 0) = 0$  по предположению. [17]

# НАИХУДШИЙ СЛУЧАЙ

- Если для алгоритма Евклида требуются  $N$  шагов для пары натуральных чисел  $a > b > 0$ , наименьшие значения  $a$  и  $b$ , для которых это выполняется — числа Фибоначчи  $F_{N+2}$  и  $F_{N+1}$  соответственно.[27] Тогда, если алгоритм Евклида требует  $N$  шагов для пары чисел  $(a,b)$ , где  $a > b$ , выполняются следующие неравенства  $a \geq F_{N+2}$  и  $b \geq F_{N+1}$ . Доказать это можно по математической индукции. Если  $N = 1$ , тогда  $a$  делится на  $b$  без остатка. Наименьшие натуральные числа, для которых это верно, равны  $b = 1$  и  $a = 2$ , соответственно  $F_2$  и  $F_3$ . Предположим теперь, что результат выполняется для всех значений  $N$  до  $M - 1$ . Первый шаг алгоритма Евклида с  $M$  шагами  $a = q_0b + r_0$ , и алгоритм Евклида для пары чисел  $(b,r_0)$ , где  $b > r_0$ , требует  $M - 1$  шагов. По предположению индукции имеем  $b \geq F_{M+1}$  и  $r_0 \geq F_M$ . Следовательно,  $a = q_0b + r_0 \geq b + r_0 \geq F_{M+1} + F_M = F_{M+2}$ , что является искомым неравенством. Это доказательство, опубликованное Габриэлем Ламе в 1844 году, представляет собой начало теории сложности вычислений,[28] а также первое практическое применение чисел Фибоначчи.[27]

# ТЕОРЕМА ЛАМЕ

- Число делений с остатком в процессе применения алгоритма Евклида не превосходит упятеренного количества цифр меньшего числа  $\{ \text{DISPLAYSTYLE } b \}$ , записанного в десятичной системе.[29]

# СРЕДНЕЕ

- Существуют различные способы вычисления среднего количества шагов алгоритма. Первый способ вычисления — среднее время  $T(a)$ , необходимое для вычисления НОД заданного числа  $a$  и меньшего натурального числа  $b$ , выбранного с равной вероятностью из целых чисел от  $0$  до  $a - 1$ . [17]
- $$T(a) = \frac{1}{a} \sum_{0 \leq b < a} T(a, b)$$
- Однако, поскольку  $T(a, b)$  сильно колеблется в зависимости от НОД двух чисел, усреднённая функция  $T(a)$  также является «шумной». [30] Для того, чтобы уменьшить этот шум, второе среднее  $T(a)$  берётся по всем взаимно простым числам  $c$   $a$ .
- $$\tau(a) = \frac{1}{\varphi(a)} \sum_{\substack{0 \leq b < a \\ \gcd(a, b) = 1}} T(a, b)$$
- где  $\varphi(a)$  функция Эйлера. Это среднее плавно растёт с ростом  $a$ . [31]
- $$\tau(a) = \frac{12}{\pi^2} \ln^2 \ln a + C + O(a^{-1/6 - \varepsilon})$$
- Константа (константа Портера [32]) в этой формуле  $C \approx 1.467$ ,  $\varepsilon$  является бесконечно малым.
- Третье среднее значение  $Y(n)$  определяется как среднее число шагов, требуемых, когда  $a$  и  $b$  выбираются случайным образом (с равномерным распределением) от  $1$  до  $n$ .
- $$Y(n) = \frac{1}{n^2} \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n T(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^n T(a)$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ШАГА

- На каждом шаге алгоритма Евклида вычисляется коэффициент  $q_k$  и остаток  $r_k$  для заданной пары целых чисел  $r_{k-2}$  и  $r_{k-1}$ . Эти величины связаны следующим соотношением:

$$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$$

- Вычислительная сложность каждого шага связана главным образом с нахождением  $q_k$ , так как остаток  $r_k$  можно быстро вычислить используя  $r_{k-2}$ ,  $r_{k-1}$ , и  $q_k$

$$r_k = r_{k-2} - q_k r_{k-1}$$

- Вычислительная сложность операции деления чисел размером  $n$  бит оценивается как  $O(n^{\epsilon+1})$ , где  $\epsilon$  — размер частного.[24]

- Для сравнения, исходный алгоритм Евклида, с использованием вычитания, может быть намного медленнее. В большинстве случаев коэффициент  $q_k$  является малым числом. Вероятность данного частного  $q$  примерно равна  $\ln|u|/(u-1)$ , где  $u = (q+1)^2$ . [33] Для иллюстрации вероятность частного 1, 2, 3 или 4 составляет примерно 41,5%, 17,0%, 9,3% и 5,9% соответственно. Так как операция вычитания быстрее, чем деление, особенно для чисел больше одного машинного слова, [34] алгоритм Евклида с использованием вычитания может быть более конкурентоспособным в сравнении с алгоритмом, использующим деление. [35] Это используется в бинарном алгоритме вычисления НОД. [36]

- Оценка сложности алгоритма вычисляется как произведение количества шагов на время выполнения одного шага. Она показывает, что алгоритм Евклида растёт квадратично  $O(n^2)$ , где  $n$  — среднее число цифр в двух начальных числах  $a$  и  $b$  в десятичной записи. Пусть  $n_0, n_1, \dots, n_{N-1}$  представляют число цифр в последовательных остатках  $r_0, r_1, \dots, r_{N-1}$ . Так как число шагов  $N$  растёт линейно с  $n$ , время работы ограничено следующим выражением:

$$\{ \text{\textbackslash displaystyle } O \{ \text{\textbackslash Big } \{ \text{\textbackslash sum } _{i < N} n_i (n_{i-1} - n_{i+1} + 2) \} \} \} \text{\textbackslash subseteq } O \{ \text{\textbackslash Big } \{ n \text{\textbackslash sum } _{i < N} (n_{i-1} - n_{i+1} + 2) \} \} \} \text{\textbackslash subseteq } O(n(n_0 + 2N)) \text{\textbackslash subseteq } O(n^2). \}$$