| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.4. | Случайные сигналы и их математические модели.<br>1.Случайные процессы и их вероятностные характеристики.<br>2. Случайные процессы и их числовые характеристики. | 2 | | | | | | | Слайды по теме 2 | [1]<br>[2]<br>[12] | Устный опрос | АК1,4,5,7,9, ПК-2,5,21, СЛК5-7 |
| | 3. Стационарные случайные процессы.<br>4. Свойства корреляционной функции и спектральная плотность мощности случайного процесса. (СР)<br>5. Широкополосные и узкополосные случайные процессы. (СР)<br>6. Законы распределения случайных величин. (СР) | | | | | | | | | | | |
| 2.5. | Сигналы и помехи в системах связи.<br>1. Решение типовых задач.<br>2. Решение задач в соответствии с индивидуальным заданием.<br>3. Защита отчета по лабораторному занятию. | | 4 | | | | | | Метод. Указания к ПЗ | [4]<br>[6]<br>[9] | Защита ПЗ | |
| СР | Разновидности модулированных сигналов.<br>1. Общие сведения о модуляции.<br>2. Виды аналоговой модуляции.<br>3. Виды импульсной модуляции. | | | | | | | 6 | | [3]<br>[4]<br>[11] | | |
| 3. | **КОДИРОВАНИЕ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ.** | **6** | **8** | **4** | | | | **8** | | | | |
| 3.1. | Основное положение теории информации.<br>1. Энтропия как количественная мера степени неопределенности.<br>2. Производительность источников сообщений.<br>3. Понятие информации.<br>4. Информация в сложной системе. | 2 | | | | | | | Слайды по теме 5 | [7]<br>[8]<br>[11]<br>[12] | Устный опрос | АК1,4,5,7,9, ПК-1-5,10,13, 21,26,31 СЛК5-7 |
| 3.2. | Основные положения теории информации.<br>1. Расчет основных информационных характеристики источников сообщений.<br>2. Защита отчета по практическому занятию. | | 4 | | | | | | Метод. указания | [7]<br>[8]<br>[11]<br>[12] | Защита ПЗ | |
| 3.3. | Характеристики источников сообщения.<br>1. Дифференциальная энтропия.<br>2. Скорость передачи информации.<br>3. Эпсилон-энтропия. | 2 | | | | | | | Слайды по теме 5 | [7]<br>[8]<br>[11]<br>[12] | Устный опрос | АК1,4,5,7,9, ПК-1-5,10,13, |

# Случайные сигналы и их математические модели

## 1. Случайные процессы и их математические характеристики

На практике все сигналы, которые предназначены для передачи информации, носят случайный характер. Именно в случайности изменения сигналов заложена информация, которую необходимо передать получателю.

Помимо этого, при передаче сигналов действуют помехи, которые также носят случайный характер.

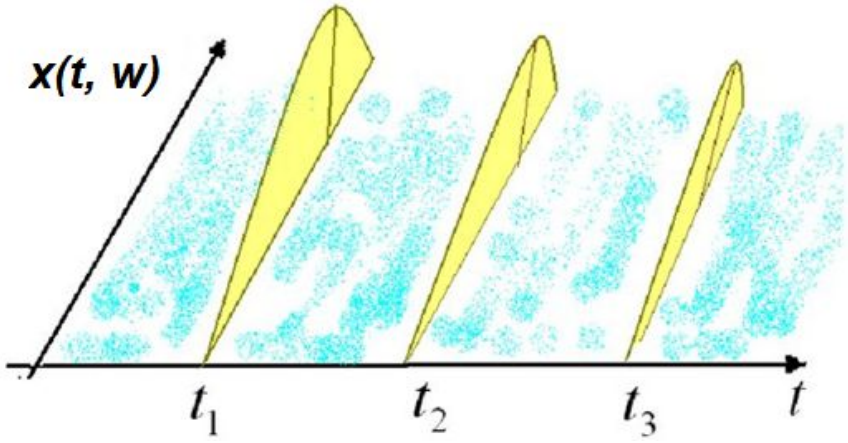
В отличие от детерминированных сигналов значения случайного сигнала в некоторый момент времени невозможно предсказать точно. Вместе с тем, описание таких сигналов возможно в вероятностном смысле через усредненные (статистические) характеристики.

Математическими моделями случайных сигналов и помех являются случайные процессы.

Случайным процессом называется изменение случайной величины во времени.

Случайный процесс есть семейство случайных величин $\{x(t, w)\}$ ,

где под параметром $t$ понимается время.




К случайным процессам относится большинство процессов, протекающих в радиотехнических устройствах, а также помехи, сопровождающие передачу сигналов по каналам связи.

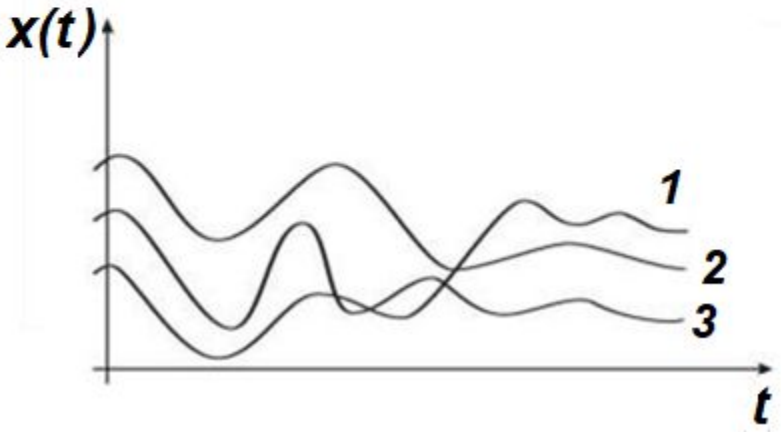
Случайные процессы могут быть непрерывными, либо дискретными в зависимости от того, какая случайная величина непрерывная или дискретная, изменяется во времени.

Пусть имеется зафиксированный результат испытания $w_0$.

Тогда неслучайная функция $x(t, w_0)$ (в которую превращается процесс в результате испытания) называется реализацией (траекторией, выборочной функцией) процесса.

С реализациями мы чаще всего имеем дело на практике.

Таким образом, случайный процесс можно рассматривать как совокупность всех возможных его реалиизаций.



В теории вероятностей основным понятием является ***случайное событие***, которое при проведении эксперимента может произойти, а может и не произойти.

Если, например, проводится эксперимент, включающий серию из n испытаний радиотехнического устройства, то результатом каждого испытания может быть либо рабочее состояние устройства, либо его отказ, которые представляют собой события. Но при каждом конкретном испытании отказ может произойти, а может и не произойти. В этом смысле отказ является случайным событием.

Обозначим случайное событие буквой ***A***. Центральным в теории вероятностей является определение частоты наступления события ***A***.

$$\nu(A) = \frac{n_A}{n}$$

где

$n_A$ - число испытаний, соответствующих наступлению события А

$n$ - общее число испытаний

При достаточно большом числе всех проведенных испытаний (теоретически при $n \to \infty$) частота наступления события ***A*** отождествляется с вероятностью

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Отсюда следует, что $0 \le p(A) \le 1$ **-** т.е. вероятность является неотрицательной величиной, принимающей значение в диапазоне чисел от 0 до 1.

Если $p(A)=0$ то событие называется невозможным, если $p(A)=1$ то событие называется достоверным.

Понятие вероятности можно применить и к группе событий $A_1, A_2, \ldots, A_i \ldots, A_n$.

Если

$$p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_i) + \cdots + p(A_n) = 1$$

то события образуют полную группу и в результате испытания одно из них наступит обязательно.

События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого.

Если в результате эксперимента возможно одновременное наступление событий, они называются совместными.

*Пример*: радиоприемник исправен (событие ***A***) и настроен на заданную частоту (событие ***B***).

Вероятность наступления события ***B*** при условии, что произошло событие ***A***, называется ***условной вероятностью p(B/A)***.

Вероятность одновременного наступления совместных событий ***A*** и ***B*** определяется выражением

$$p(AB) = p(A)p\left({}^{B}/_{A}\right) = p(B)p\left({}^{A}/_{B}\right)$$

События ***A*** и ***B*** называются ***независимыми***, если наступление одного из них не связано с наступлением другого. Вероятность наступления двух независимых совместных событий равна

$$p(AB) = p(A)p(B)$$

Отсюда следует, что для независимых совместных событий условная вероятность ***p (B/A)=p(B),*** т.е. равна безусловной вероятности.

Вероятность события ***A***, которое может наступить с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_j \ldots, H_N$, образующих полную группу несовместных событий, называемых гипотезами, определяется ***формулой полной вероятности***

$$p(A) = \sum_{j=1}^{N} p(H_j) p(A/H_j)$$

Вероятность наступления гипотезы $H_j$, после того, как наступило событие ***A***, определяется ***формулой Байеса***

$$p\left(H_j/A\right) = \frac{p(H_j)p(A/H_j)}{p(A)}$$

Случайные события характеризуют эксперимент с качественной стороны.

На практике, как правило, требуется количественная оценка результата. Если в результате эксперимента наступает или не наступает событие ***A***, этому случайному событию можно поставить в соответствие величину, принимающую только два значения: **1** или **0** в зависимости от того, произошло событие или нет.

Так как событие ***A*** случайно, случайной будет и величина, оценивающая результат эксперимента.

Обозначим случайную величину через ***X***, а значения, которые она может принимать,– через $x$. Если случайная величина (СВ) ***X*** принимает значения из множества

$$\{x\} = \{x_0, x_1, \dots, x_K, \dots, x_N\}$$

возможных конкретных значений, то такая СВ называется ***дискретной СВ***.

Если же множество значений ***X*** непрерывно, то такая величина называется ***непрерывной СВ.***

Как дискретная, так и непрерывная СВ полностью характеризуются законами распределения.

***Функцией распределения*** дискретной СВ называется зависимость

$$\boxed{F(x_K) = p(X \le x_K)}$$

Функция распределения непрерывной СВ представляет собой зависимость

$$F(x) = p(X < x)$$

и является интегральным законом распределения непрерывной СВ

***Плотностью распределения*** непрерывной СВ называется зависимость

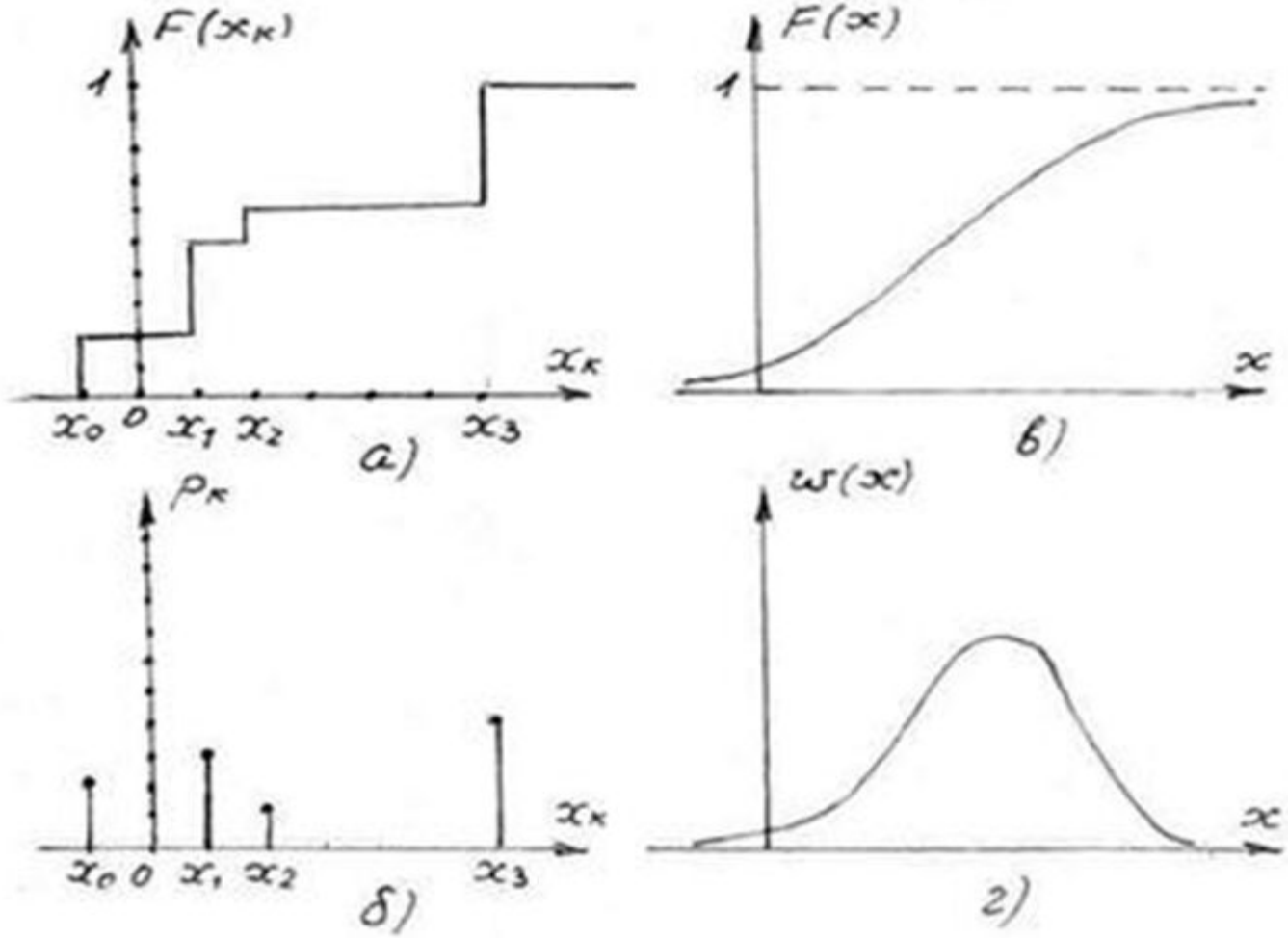
$$\boxed{w(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(\Delta x)}{\Delta x}}$$

представляет собой отношение вероятности $p(\Delta x)$ того, что непрерывная СВ будет находиться в пределах элементарного интервала $\Delta x$ к величине этого интервала.

Если функция $F(x)$ непрерывна, и интервал значений СВ составляет ($-\infty \le x \le \infty$), то функция распределения и плотность распределения связаны между собой соотношениями

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx}$$

$$\boxed{w(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$$


F(x_k)
1
x_k
x_0 0 x_1 x_2 x_3
а)
F(x)
1
x
в)
p_k
x_k
x_0 0 x_1 x_2 x_3
б)
w(x)
x
г)

Понятия законов распределения можно распространить и на совокупность случайных величин. Так, для двух случайных величин функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина не превзойдет значения

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

Очевидно, что данная функция является двумерной.

Двумерная плотность распределения двух СВ

$$w(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Если случайные величины ***X*** и ***Y*** независимы, то $w(x,y) = w(x)w(y)$

При наличии зависимости случайных величин $w(x,y) = w(x)w(y/x) = w(y)w(x/y)$

# 2. Числовые характеристики случайных процессов

– вероятность попадания дискретной СВ в интервал (a,b) равна

$$p(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

- вероятность попадания непрерывной СВ в интервал (a,b) равна

$$p(a \le X \le b) = \int_a^b w(x)dx$$

- математическое ожидание дискретной СВ

$$m_x = \sum_i x_i p_i$$

- математическое ожидание непрерывной СВ

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx$$

- математическое ожидание случайного процесса

$$m_x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, t_1)dx$$

- дисперсия дискретной СВ

$$\sigma^2 = D_x = \sum_{k=0}^{N} (x_k - m_x)^2 p_k$$

- дисперсия непрерывной СВ

$$M_x^2 = D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 w(x) dx$$

- дисперсия случайного процесса

$$M_x^{(2)}(t_1) = D_x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t_1)]^2 w(x, t_1) dx$$

Для зависимых случайных величин имеет место ***функция корреляции***

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) w(x, y) dx dy$$

характеризующая степень зависимости этих величин.

Важнейшей характеристикой случайного процесса служит **<u>автокорреляционная функция</u> (АКФ)**

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t_1)][x - m_x(t_2)] w(x, t_1, t_2) dx dx$$

устанавливающая степень статистической связи между значениями СП в моменты времени $t_1$ и $t_2$

Взаимную связь между двумя случайными процессами устанавливает **взаимная корреляционная функция** (ВКФ).

$$\boxed{B_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)\,dt}$$

Взаимная корреляционная функция характеризует степень статистической связи между значениями случайных процессов в моменты времени $t$ и $t+\tau$

Часто используют коэффициент взаимной корреляции

$$\boxed{\rho_{xy} = \frac{B_{xy}(0)}{\sqrt{D_x D_y}}}$$

**Если ρ=0, то случайные процессы некоррелированны (независимы).**

Представление СП в виде ансамбля реализаций приводит к понятию стационарности процесса. Случайный процесс является **стационарным**, если все начальные и центральные моменты не зависят от времени, т.е.

$$m_x^{(n)}(t_1) = m_x^{(n)}(t_2)$$

$$M_x^{(n)}(t_1) = M_x^{(n)}(t_2)$$

Это жесткие условия, поэтому при их выполнении СП считается стационаром в узком смысле

На практике используется понятие стационарности в широком смысле. Случайный процесс стационарен в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, т.е.:

$$m_x(t_1) = m_x(t_2) = m_x$$

$$D_x(t_1) = D_x(t_2) = D_x$$

а автокорреляционная функция определяется только интервалом $\tau = t_2 - t_1$ и не зависит от выбора $t_1$

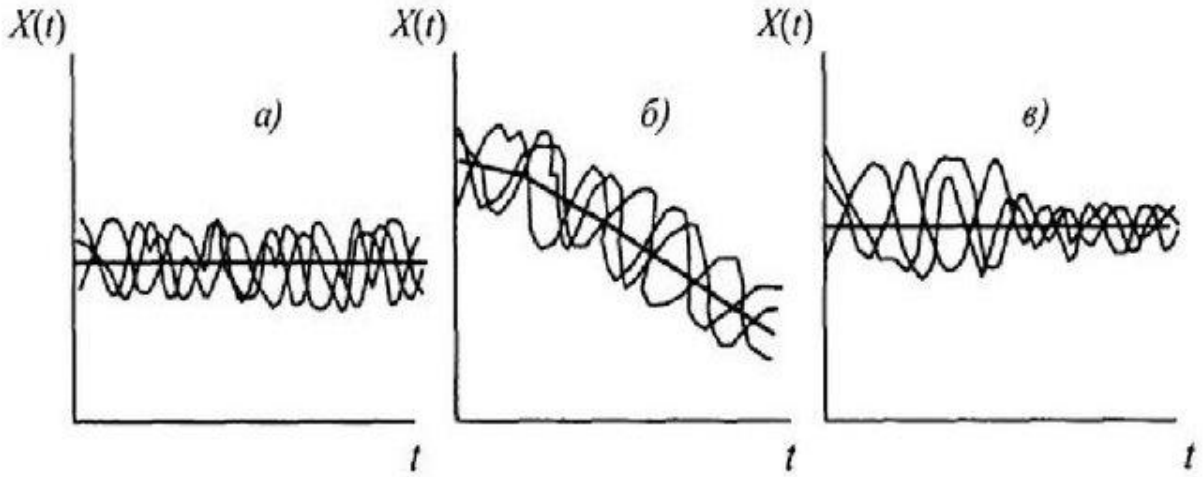
$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau)$$

# *Стационарные случайные процессы*

***Стационарные СП*** – это СП, у которых все вероятностные характеристики не зависят от времени, то есть:

- $m_x = const$
- $D_x = const$

Отличие стационарных и нестационарных СП показано на рисунке




а) стационарный СП
б) нестационарный СП по МО
с) нестационарный СП по дисперсии

Случайный процесс называется **эргодическим**, если его вероятностные характеристики, полученные усреднением по ансамблю, совпадают с вероятностными характеристиками, полученными усреднением по времени единственной реализации из этого ансамбля.

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

- математическое ожидание – это среднее значение (постоянная составляющая) процесса.

$$D_x = \lim_{T\to\infty} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt$$

- дисперсия, имеет физический смысл средней мощности переменной составляющей процесса

$$(t_1, t_2) = B_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x]dt = B_x$$

- автокорреляционная функция

Использование выражений для нахождения характеристик эргодического СП требует реализации случайного процесса большой (теоретически бесконечной) протяженности.

При решении практических задач интервал времени Т ограничен. При этом большинство процессов считают приблизительно эргодическими и вероятностные характеристики определяют в соответствии с выражениями

$$m_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$D_x = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt$$

$$B_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x]\, dt$$

Случайные процессы, у которых исключено математическое ожидание, называются центрированными.

# 3. Законы распределения случайных величин

В практической радиотехнике наиболее широко используются следующие законы распределения, которые обычно описываются рядом распределения для дискретных СВ и плотностью вероятности – для непрерывных СВ.

Для дискретных СВ

− равномерный закон:

$$p(X = x_k) = p_k = \begin{cases} \frac{1}{x_N}, \text{при } x_0 \le X \le x_N, \\ 0, \text{при остальных } X; \end{cases}$$

- биномиальный закон определяет вероятность числа k появления случайного события при n независимых испытаниях (например, вероятность появления k единиц в кодовой комбинации из n разрядов):

[illegible]

где $C_n^k$ – число сочетаний из n по k,

p – вероятность появления события (вероятность появления единицы в кодовой комбинации).

Для непрерывных СВ

− равномерный закон

$$w(x) = \frac{1}{b-a}$$

где (a, b) – область определения случайной величины;

- нормальный закон

$$w(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

где $m_x$ – математическое ожидание,
$D_x = \sigma_x^2$ – дисперсия случайной величины.

- закон Релея - определяет распределения модуля вектора на плоскости, составляющие которого по обеим осям независимы и распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2$.

$$w(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

# Равномерное распределение

**Непрерывная** случайная величина имеет равномерный закон распределения на (a,b), если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке и равна 0 вне его.

Функция P(X<x)=F(X) имеет вид

F(x)=0 при x≤a

F(x)=(x-a)/(b-a) при a<x≤b

F(x)=1 при x>b

- Математическое ожидание: M[x]=(a+b)/2
- Дисперсия: D[x]=(b-a)$^2$/12

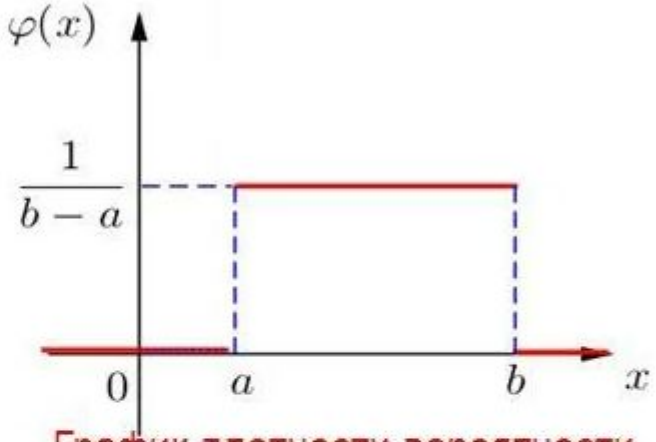


График плотности вероятности

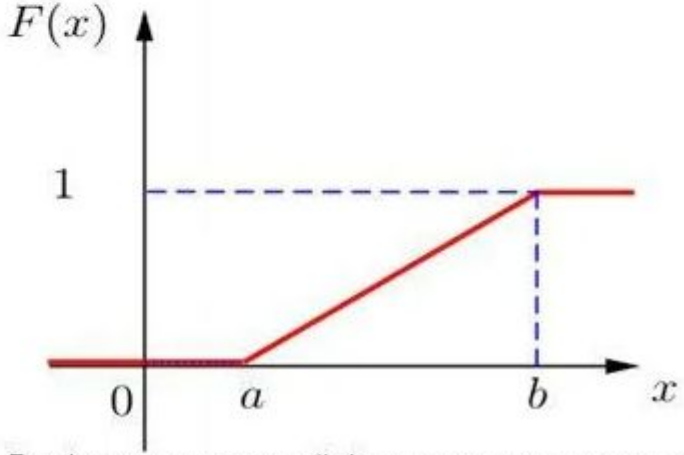


График интегральной функции распределения

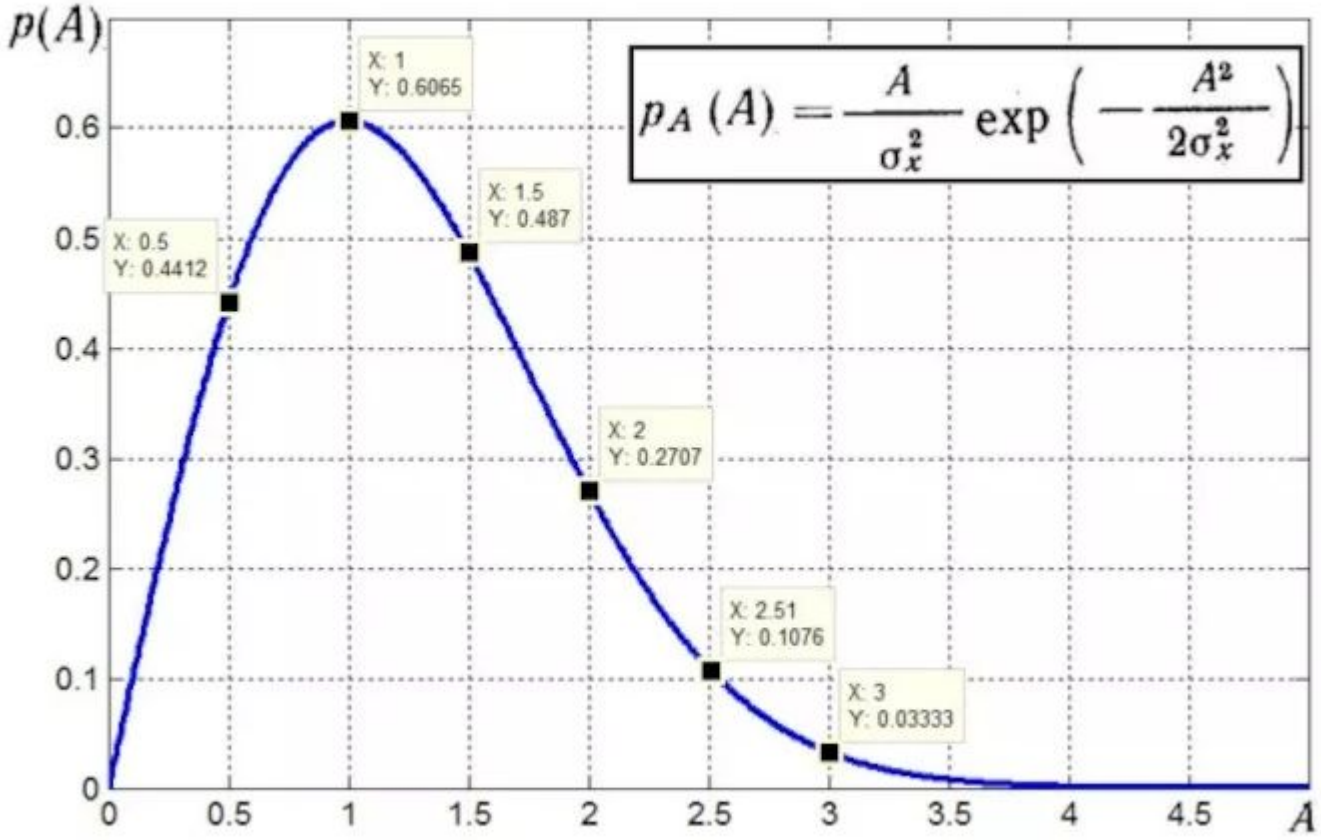
# Гауссовское (нормальное) распределение

Плотность вероятности $$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

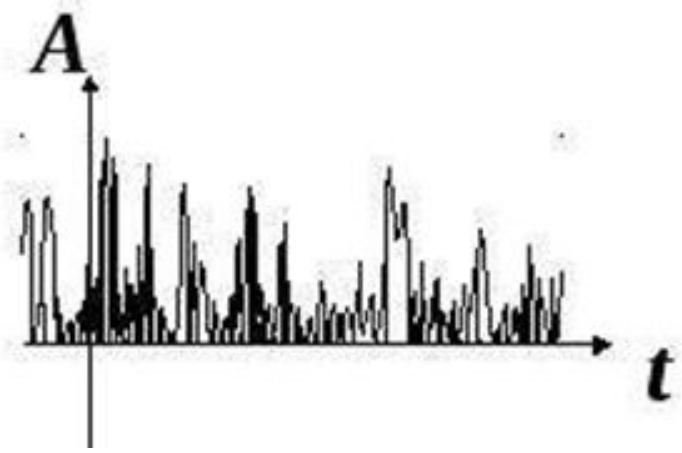
$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 p(x)dx$$ - дисперсия

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x) p(x)dx$$ - математическое ожидание

# Распределение Рэлея




$$p_A(A) = \frac{A}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)$$



# 4. Энергетический спектр случайного процесса

Передача информации в радиотехнических системах связана со спектральными преобразованиями сигналов.

Спектры детерминированных сигналов определяются преобразованием Фурье

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt,$$

где ***s(t)*** – детерминированная функция, описывающая сигнал

***S(jω)*** – спектр, т.е. распределение комплексных амплитуд по частоте.

К реализации случайного процесса ***x(t)*** можно формально применить преобразование Фурье и вычислить ее спектр

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Энергия реализации определяется выражением

$$= \int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega)\,d\omega = \mathcal{E}_x$$

При таком подходе когда $T \to \infty$ энергия реализации неограниченно возрастает. Поэтому переходят от энергии реализации к средней мощности на интервале $T$

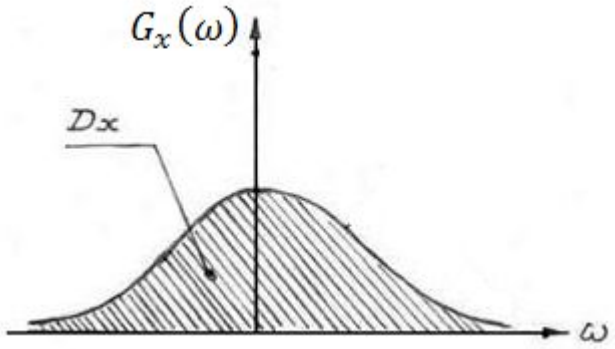
$$= P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{T}\,d\omega_T$$

где $S_x(\omega)/T$ - <u>спектральная</u> плотность средней мощности, т.е. средняя мощность, приходящаяся на единицу полосы частот.

Функция

$$(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{S^2(\omega)}{T}$$

характеризует энергетический спектр, т.е. распределение средней мощности по частоте




Дисперсия процесса $D_x$ равна площади под кривой

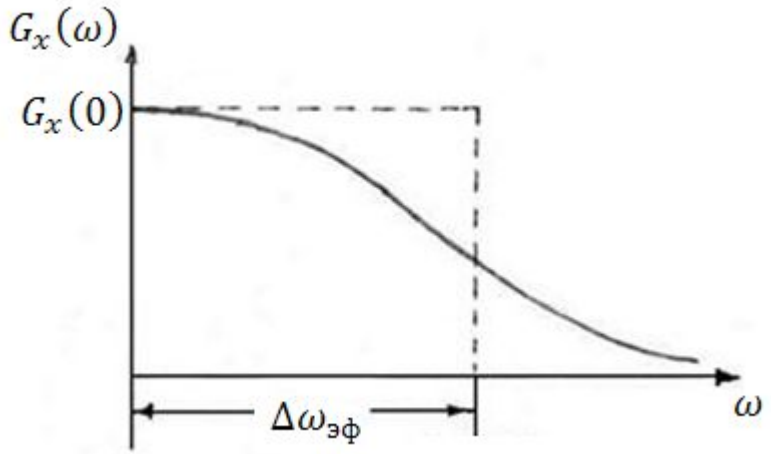
Энергетический спектр и автокорреляционная функция случайного процесса являются неслучайными функциями, связанными между собой прямым и обратным преобразованием Фурье

$$[illegible] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad [illegible]$$

$$[illegible] = \int_{-\infty}^{\infty} [illegible] = [illegible]$$

Эффективная ширина энергетического спектра определяется выражением

$$\omega_{эф} = \frac{1}{G_{x\,max}} \int_{0}^{\infty} G_x(\omega) d\omega$$



Автокорреляционная функция случайного процесса характеризует степень статистической связи между значениями процесса, разделенными интервалом времени $\boldsymbol{\tau}$

Значение $\boldsymbol{\tau}$, при котором значения случайного процесса $x(t)$ и $x(t+\boldsymbol{\tau})$ становятся статистически несвязанными, называется <u>интервалом</u> <u>корреляции</u>

Связь между эффективной шириной спектра и интервалом корреляции

$$\Delta\omega_{эф}\tau_к = \frac{1}{G_x(0)}\int_0^\infty G_x(\omega)\,d\omega\,\frac{1}{B_x(0)}\int_0^\infty B_x(\tau)\,d\tau$$

Отсюда

$$\Delta\omega_{эф}\tau_к = \frac{\pi}{2} = const$$

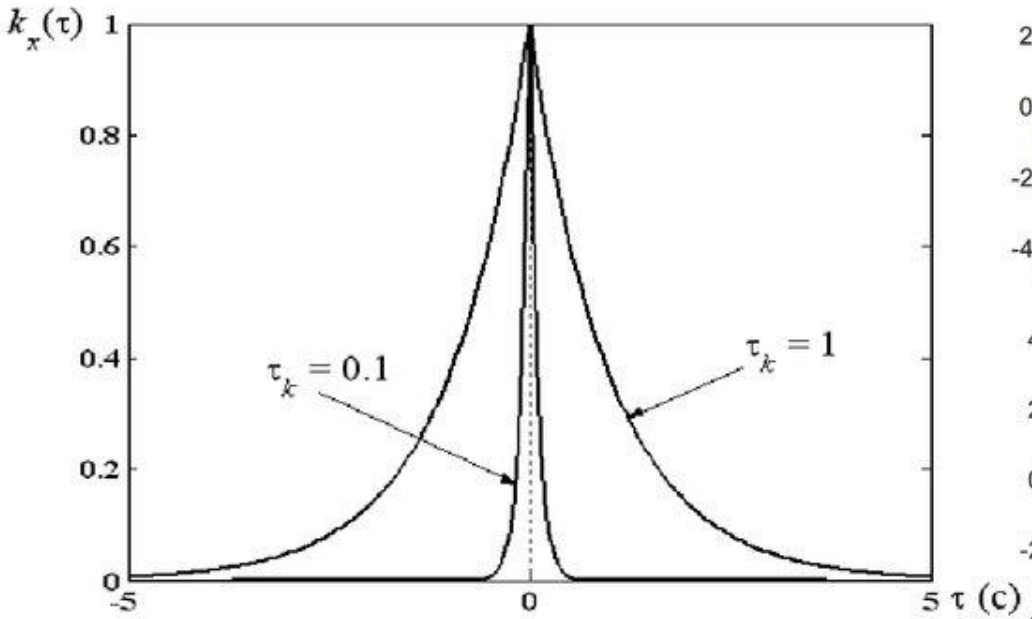
$$\Delta f_{эф}\tau_к = \frac{1}{4} = const$$

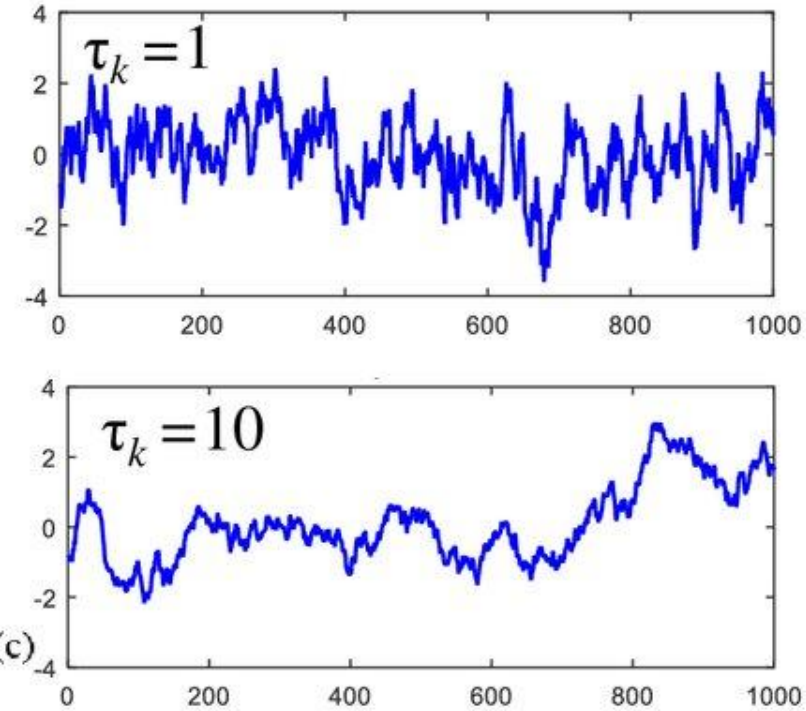
## Экспоненциально-коррелированный процесс

Рассмотри КФ стационарного процесса вида

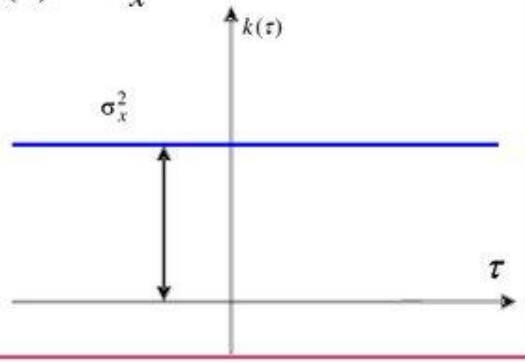
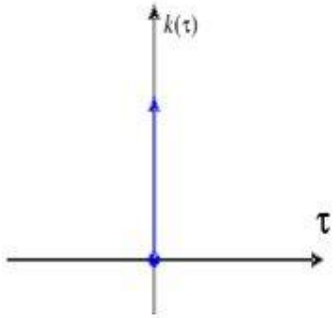
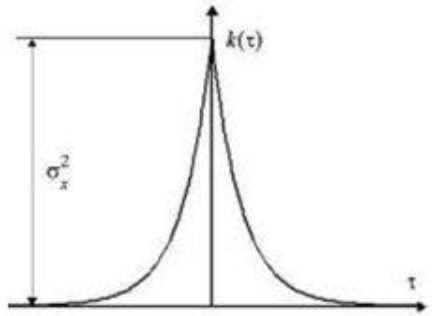
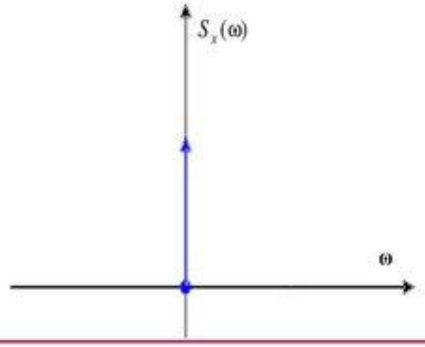
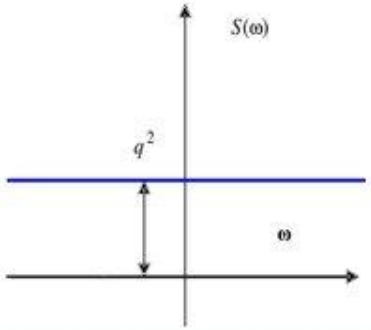
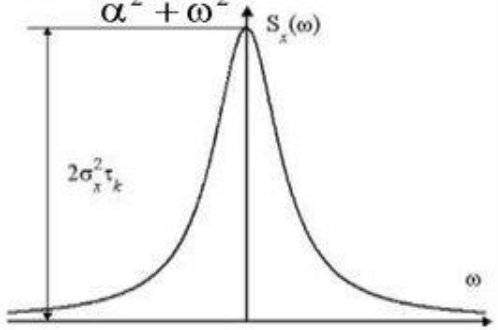
$$k_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}. \qquad (3)$$

– который называется **экспоненциально-коррелированным**. Здесь $k_x(0)=\sigma_x^2$ – дисперсия процесса, а $\tau_k = 1/\alpha$ – **интервал корреляции**.



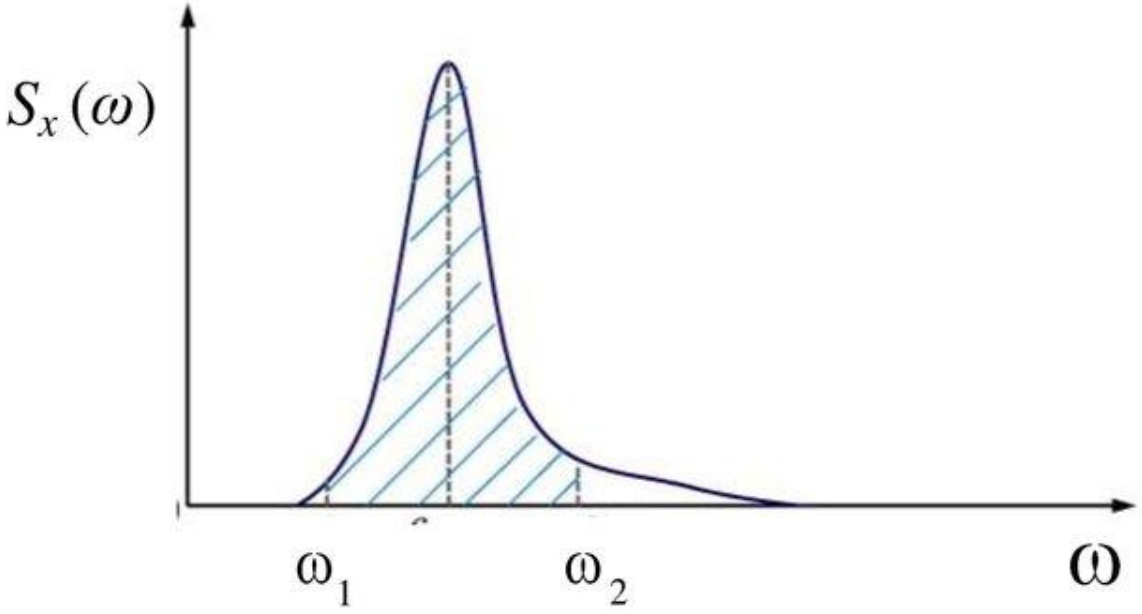
## Примеры графиков корреляционных функций и спектральных плотностей простейших процессов

| Случайная константа с дисперсией $\sigma_x^2$ | Белый шум интенсивности $q^2$ | Экспоненциально-коррелированный процесс |
|---|---|---|
| $k(\tau)=\sigma_x^2$   | $k_x(\tau)=q^2\delta(\tau)$   | $k_x(\tau)=\sigma_x^2 e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$   |
| $S_x(\omega)=2\pi\sigma_x^2\delta(\omega)$   | $S_x(\omega)=q^2$   | $S_x(\omega)=\dfrac{2\sigma_x^2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$   |

## Свойство спектральной плотности

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega = k_x(0) = \sigma_x^2 \qquad (10)$$

Область, ограниченная СП и осью абсцисс определяет дисперсию процесса с точностью до постоянного коэффициента

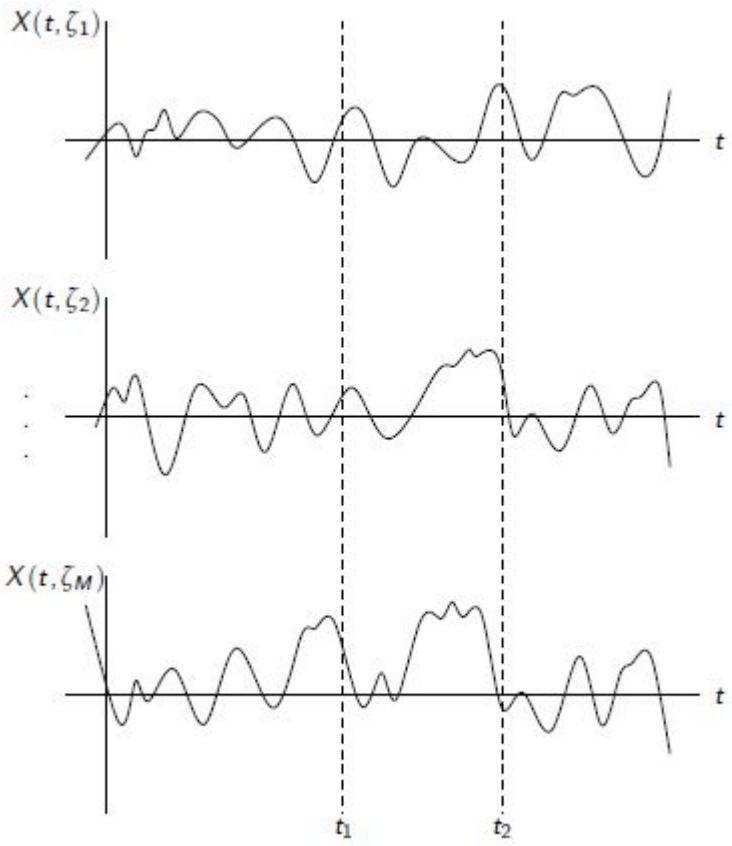


# Noise & Random Processes

- We can NOT describe **all** of the parameters that contribute to a signal or sensor measurement
  - **<u>Deterministic</u>**: Can exactly model the relationship between the input (stimulus) and output (sensor meas)
  - **<u>Random</u>**: Can NOT exactly model the relationship
    - Can characterize attributes of the signal
      - *e.g.*, mean (μ), standard deviation (σ), probability density function (pdf), power spectral density (PSD), …
    - *i.e.*, Noise (random signals)

# Noise & Random Processes

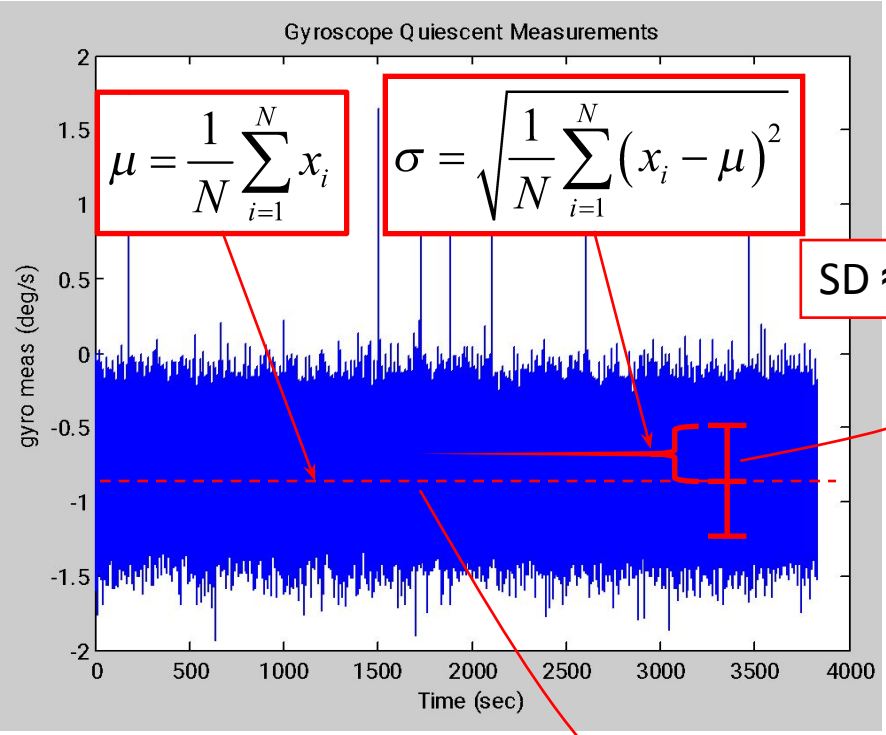
- A random process
  - A "family" of random variables
  - A function of both time and event
  - Can compute statistics across the ensemble or across time




If the time statistics and ensemble statistics are equal, then the random process is ergodic.

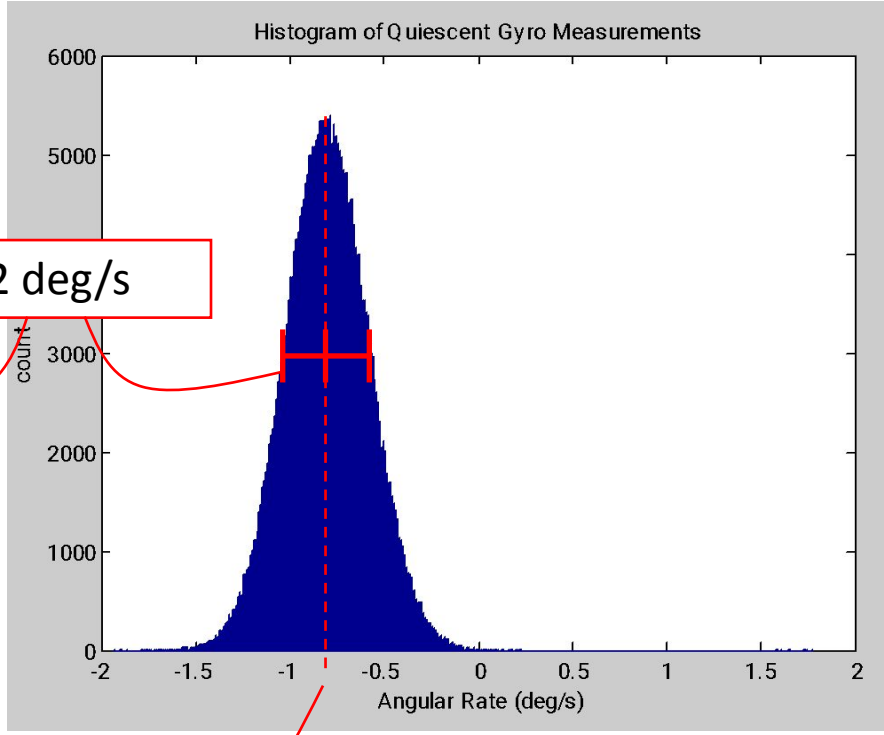
For example: Ensemble mean = time average!!

- An Example: A gyro sitting "still" on a lab bench
  - Mean = μ and Standard Deviation = σ



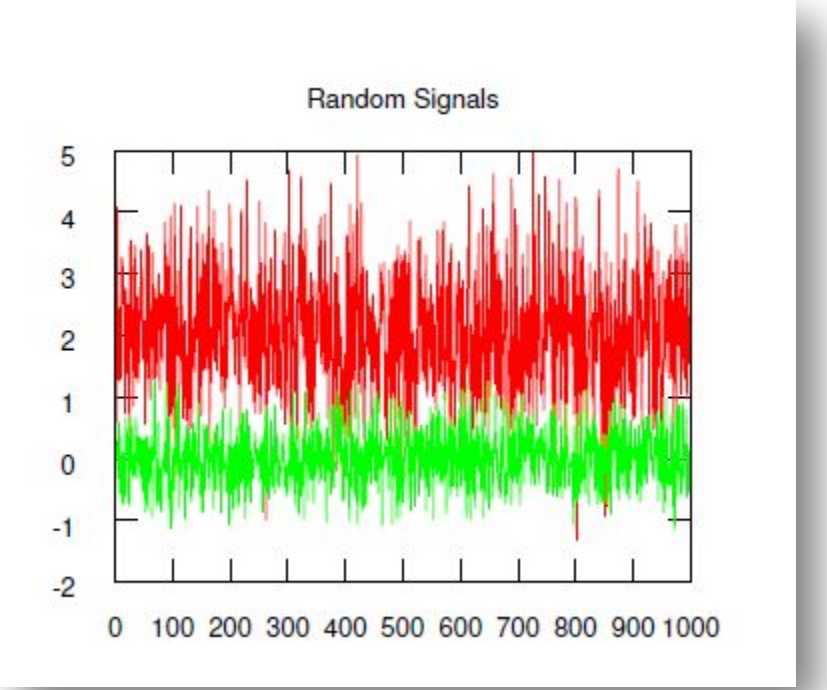
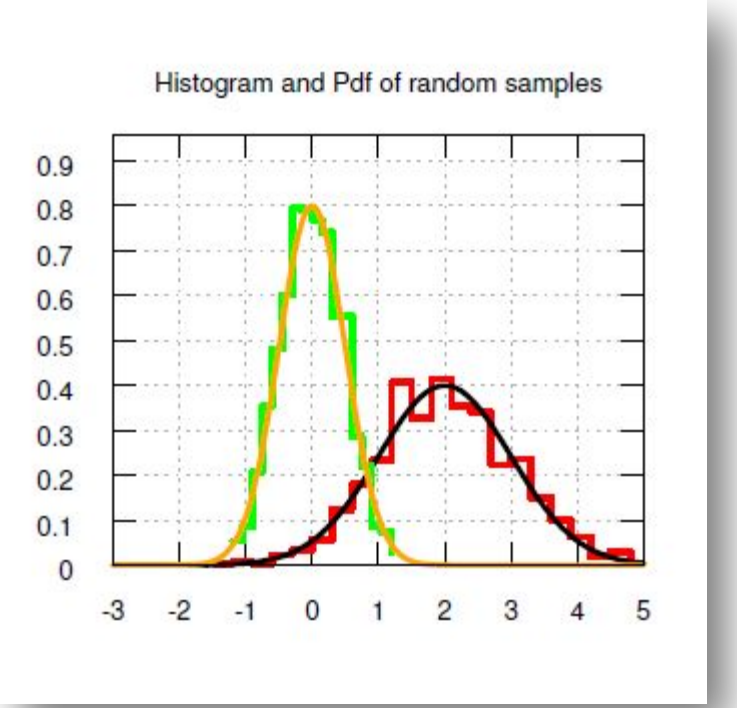

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$




SD ≈ 0.22 deg/s

Mean ≈ -0.8 deg/s

# Noise & Random Processes

- Comparison of two random signals
  - Green signal has a lower standard deviation