

2.4.	Случайные сигналы и их математические модели. 1. Случайные процессы и их вероятностные характеристики. 2. Случайные процессы и их числовые характеристики.	2							Слайды по теме 2	[1] [2] [12]	Устный опрос	АК1,4,5, 7,9, ПК-2,5,21, СЛК5-7
	3. Стационарные случайные процессы. 4. Свойства корреляционной функции и спектральная плотность мощности случайного процесса. (СР) 5. Широкополосные и узкополосные случайные процессы. (СР) 6. Законы распределения случайных величин. (СР)											
2.5.	Сигналы и помехи в системах связи. 1. Решение типовых задач. 2. Решение задач в соответствии с индивидуальным заданием. 3. Защита отчета по лабораторному занятию.		4						Метод. Указания к ПЗ	[4] [6] [9]	Защита ПЗ	
СР	Разновидности модулированных сигналов. 1. Общие сведения о модуляции. 2. Виды аналоговой модуляции. 3. Виды импульсной модуляции.						6			[3] [4] [11]		
3.	КОДИРОВАНИЕ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ.	6	8	4				8				
3.1.	Основное положение теории информации. 1. Энтропия как количественная мера степени неопределенности. 2. Производительность источников сообщений. 3. Понятие информации. 4. Информация в сложной системе.	2							Слайды по теме 5	[7] [8] [11] [12]	Устный опрос	АК1,4,5, 7,9, ПК-1-5,10,13, 21,26,31 СЛК5-7
3.2.	Основные положения теории информации. 1. Расчет основных информационных характеристики источников сообщений. 2. Защита отчета по практическому занятию.		4						Метод. указания	[7] [8] [11] [12]	Защита ПЗ	
3.3.	Характеристики источников сообщения. 1. Дифференциальная энтропия. 2. Скорость передачи информации. 3. Эпсилон-энтропия.	2							Слайды по теме 5	[7] [8] [11] [12]	Устный опрос	АК1,4,5, 7,9, ПК-1-5,10,13,

Случайные сигналы и их математические модели

1. Случайные процессы и их математические характеристики

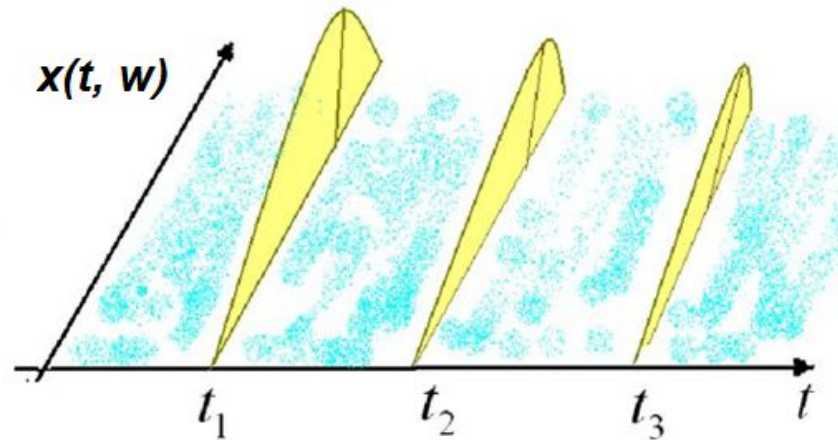
На практике все сигналы, которые предназначены для передачи информации, носят случайный характер. Именно в случайности изменения сигналов заложена информация, которую необходимо передать получателю.

Помимо этого, при передаче сигналов действуют помехи, которые также носят случайный характер.

В отличие от детерминированных сигналов значения случайного сигнала в некоторый момент времени невозможно предсказать точно. Вместе с тем, описание таких сигналов возможно в вероятностном смысле через усредненные (статистические) характеристики.

Математическими моделями случайных сигналов и помех являются случайные процессы. Случайным процессом называется изменение случайной величины во времени.

Случайный процесс есть семейство случайных величин $\{x(t, w)\}$,
где под параметром t понимается время.



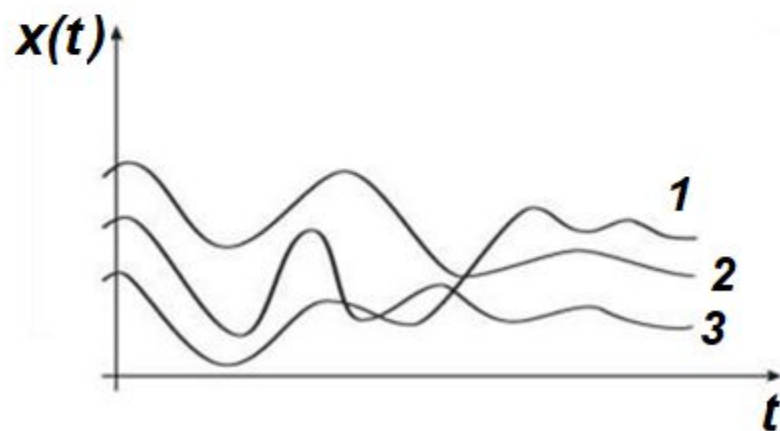
К случайным процессам относится большинство процессов, протекающих в радиотехнических устройствах, а также помехи, сопровождающие передачу сигналов по каналам связи.

Случайные процессы могут быть непрерывными, либо дискретными в зависимости от того, какая случайная величина непрерывная или дискретная, изменяется во времени.

Пусть имеется зафиксированный результат испытания w_0 .

Тогда **неслучайная функция** $x(t, w_0)$ (в которую превращается процесс в результате испытания) называется **реализацией** (траекторией, выборочной функцией) процесса.

С реализациями мы чаще всего имеем дело на практике. Таким образом, случайный процесс можно рассматривать как **совокупность всех возможных его реализаций**.



В теории вероятностей основным понятием является **случайное событие**, которое при проведении эксперимента может произойти, а может и не произойти.

Если, например, проводится эксперимент, включающий серию из n испытаний радиотехнического устройства, то результатом каждого испытания может быть либо рабочее состояние устройства, либо его отказ, которые представляют собой события. Но при каждом конкретном испытании отказ может произойти, а может и не произойти. В этом смысле отказ является случайным событием.

Обозначим случайное событие буквой **A**. Центральным в теории вероятностей является определение частоты наступления события **A**.

$$v(A) = \frac{n_A}{n}$$

где



- число испытаний, соответствующих наступлению события A



- общее число испытаний

При достаточно большом числе всех проведенных испытаний (теоретически при $n \rightarrow \infty$) частота наступления события **A** отождествляется с вероятностью

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

Отсюда следует, что $0 \leq p(A) \leq 1$ - т.е. вероятность является неотрицательной величиной, принимающей значение в диапазоне чисел от 0 до 1.

Если $p(A)=0$ то событие называется **НЕВОЗМОЖНЫМ**, если $p(A)=1$ то событие называется **ДОСТОВЕРНЫМ**.

Понятие вероятности можно применить и к группе событий $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$.

Если

$$p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_i) + \dots + p(A_n) = 1$$

то события образуют полную группу и в результате испытания одно из них наступит обязательно.

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого.

Если в результате эксперимента возможно одновременное наступление событий, они называются совместными.

Пример: радиоприемник исправен (событие **A**) и настроен на заданную частоту (событие **B**).

Вероятность наступления события **B** при условии, что произошло событие **A**, называется **условной вероятностью** $p(B/A)$.

Вероятность одновременного наступления совместных событий **A** и **B** определяется выражением

$$p(AB) = p(A)p\left(\frac{B}{A}\right) = p(B)p\left(\frac{A}{B}\right)$$

События **A** и **B** называются **независимыми**, если наступление одного из них не связано с наступлением другого. Вероятность наступления двух независимых совместных событий равна

$$p(AB) = p(A)p(B)$$

Отсюда следует, что для независимых совместных событий условная вероятность $p(B/A)=p(B)$, т.е. равна безусловной вероятности.

Вероятность события A , которое может наступить с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_j, \dots, H_N$, образующих полную группу несовместных событий, называемых гипотезами, определяется **формулой полной вероятности**

$$p(A) = \sum_{j=1}^N p(H_j)p(A/H_j)$$

Вероятность наступления гипотезы H_j , после того, как наступило событие A , определяется **формулой Байеса**

$$p(H_j/A) = \frac{p(H_j)p(A/H_j)}{p(A)}$$

Случайные события характеризуют эксперимент с качественной стороны.

На практике, как правило, требуется количественная оценка результата. Если в результате эксперимента наступает или не наступает событие A , этому случайному событию можно поставить в соответствие величину, принимающую только два значения: **1** или **0** в зависимости от того, произошло событие или нет.

Так как событие A случайно, случайной будет и величина, оценивающая результат эксперимента.

Обозначим случайную величину через X , а значения, которые она может принимать, – через x . Если случайная величина (СВ) X принимает значения из множества

$$\{x\} = \{x_0, x_1, \dots, x_K, \dots, x_N\}$$

возможных конкретных значений, то такая СВ называется **дискретной СВ**.

Если же множество значений X непрерывно, то такая величина называется **непрерывной СВ**.

Как дискретная, так и непрерывная СВ полностью характеризуются законами распределения.

Функцией распределения дискретной СВ называется зависимость

$$F(x_K) = p(X \leq x_K)$$

Функция распределения непрерывной СВ представляет собой зависимость

$$F(x) = p(X < x)$$

и является интегральным законом распределения непрерывной СВ

Плотностью распределения непрерывной СВ называется зависимость

$$w(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(\Delta x)}{\Delta x}$$

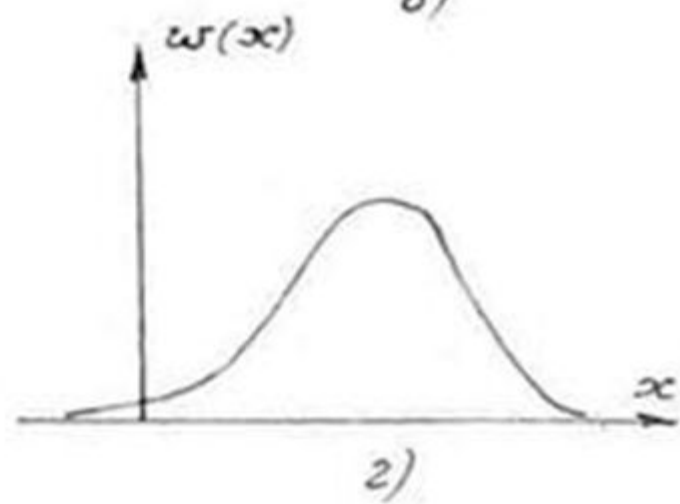
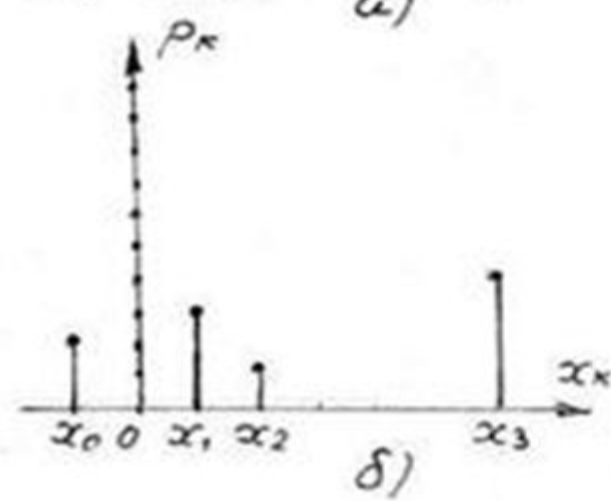
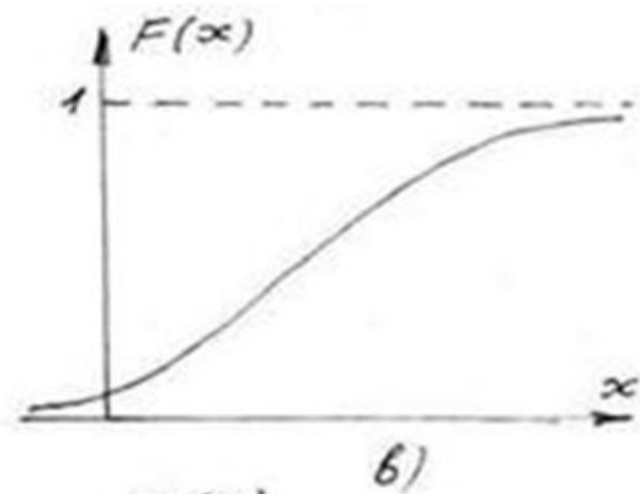
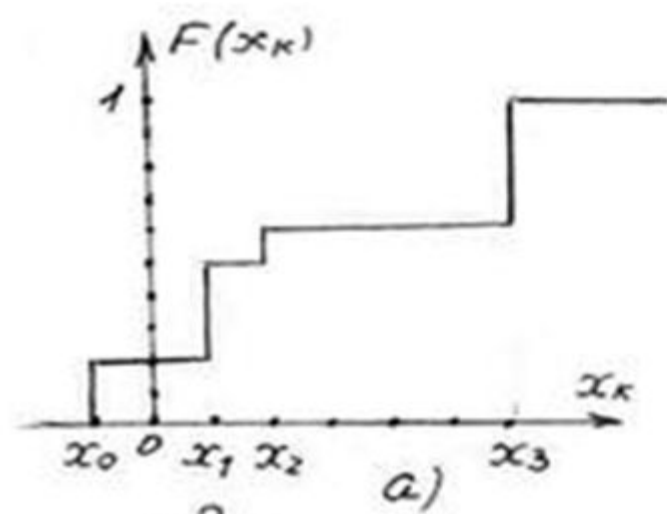
$$x = x_1 - x_2 - \Delta x$$

представляет собой отношение вероятности $p(\Delta x)$ того, что непрерывная СВ будет находиться в пределах элементарного интервала Δx к величине этого интервала.

Если функция $F(x)$ непрерывна, и интервал значений СВ составляет $(-\infty \leq x \leq \infty)$, то функция распределения и плотность распределения связаны между собой соотношениями

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx$$

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



Понятия законов распределения можно распространить и на совокупность случайных величин. Так, для двух случайных величин функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина не превзойдет значения

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Очевидно, что данная функция является двумерной.

Двумерная плотность распределения двух СВ

$$w(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Если случайные величины X и Y независимы, то

$$w(x, y) = w(x)w(y)$$

При наличии зависимости случайных величин

$$w(x, y) = w(x)w\left(\frac{y}{x}\right) = w(y)w\left(\frac{x}{y}\right)$$

2. Числовые характеристики случайных процессов

– вероятность попадания дискретной СВ в интервал (a,b) равна

$$p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

- вероятность попадания непрерывной СВ в интервал (a,b) равна

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b w(x) dx$$

- математическое ожидание дискретной СВ

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

- математическое ожидание непрерывной СВ

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x) dx$$

- математическое ожидание случайного процесса

$$m_x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, t_1) dx$$

- дисперсия дискретной СВ

$$M_x^2 = D_x = \sum_{k=0}^N (x_k - m_x)^2 p_k$$

- дисперсия непрерывной СВ

$$M_x^2 = D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 w(x) dx$$

- дисперсия случайного процесса

$$M_x^{(2)}(t_1) = D_x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t_1)]^2 w(x, t_1) dx$$

Для зависимых случайных величин имеет место **функция корреляции**

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) w(x, y) dx dy$$

характеризующая степень зависимости этих величин.

Важнейшей характеристикой случайного процесса служит **автокорреляционная функция (АКФ)**

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) w(x, y, \tau) dx dy$$

устанавливающая степень статистической связи между значениями СП в моменты времени t_1 и t_2

Взаимную связь между двумя случайными процессами устанавливает **взаимная корреляционная функция** (ВКФ).

$$B_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt$$

Взаимная корреляционная функция характеризует степень статистической связи между значениями случайных процессов в моменты времени t и $t+\tau$

Часто используют коэффициент взаимной корреляции

$$\rho_{xy} = \frac{B_{xy}(0)}{\sqrt{D_x D_y}}$$

Если $\rho=0$, то случайные процессы некоррелированы (независимы).

Представление СП в виде ансамбля реализаций приводит к понятию стационарности процесса. Случайный процесс является **стационарным**, если все начальные и центральные моменты не зависят от времени, т.е.

$$M_x^{(n)}(t_1) = M_x^{(n)}(t_2)$$

Это жесткие условия, поэтому при их выполнении СП считается стационаром в узком смысле

На практике используется понятие стационарности в широком смысле. Случайный процесс стационарен в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, т.е.:

$$m_x(t_1) = m_x(t_2) = m_x$$

$$D_x(t_1) = D_x(t_2) = D_x$$

а автокорреляционная функция определяется только интервалом $\tau = t_2 - t_1$ и не зависит от выбора t_1

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau)$$

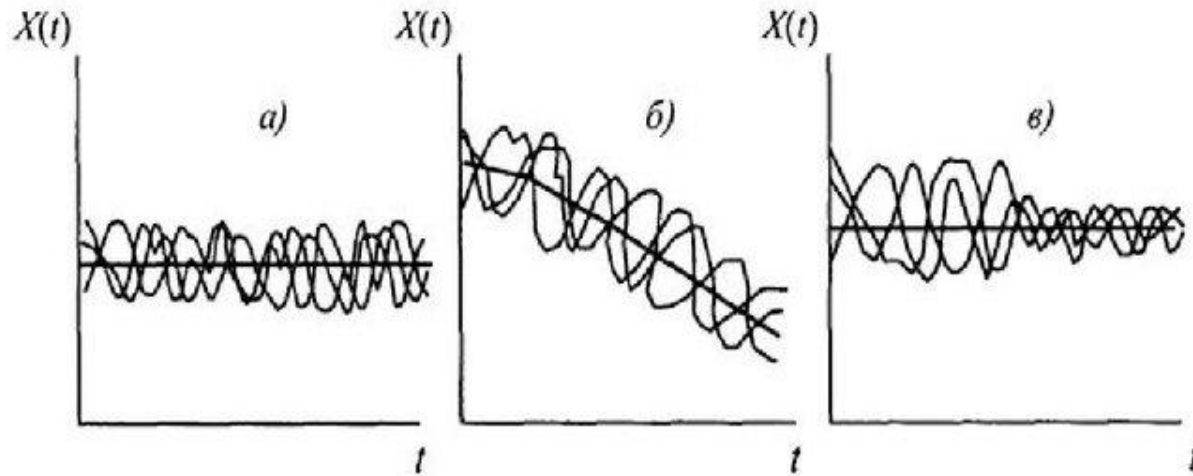
Стационарные случайные процессы

Стационарные СП – это СП, у которых все вероятностные характеристики не зависят от времени, то есть:

- $m_x = const$

- $D_x = const$

Отличие стационарных и нестационарных СП показано на рисунке



- а) стационарный СП
- б) нестационарный СП по МО
- с) нестационарный СП по дисперсии

Случайный процесс называется эргодическим, если его вероятностные характеристики, полученные усреднением по ансамблю, совпадают с вероятностными характеристиками, полученными усреднением по времени единственной реализации из этого ансамбля.

$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ - математическое ожидание – это среднее значение (постоянная составляющая) процесса.

$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt$ - дисперсия, имеет физический смысл средней мощности переменной составляющей процесса

$R_x(t_1, t_2) = B_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt$ - автокорреляционная функция

Использование выражений для нахождения характеристик эргодического СП требует реализации случайного процесса большой (теоретически бесконечной) протяженности.

При решении практических задач интервал времени T ограничен. При этом большинство процессов считают приблизительно эргодическими и вероятностные характеристики определяют в соответствии с выражениями

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$D_x = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt$$

$$B_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt$$

Случайные процессы, у которых исключено математическое ожидание, называются **центрированными**.

3. Законы распределения случайных величин

В практической радиотехнике наиболее широко используются следующие законы распределения, которые обычно описываются рядом распределения для дискретных СВ и плотностью вероятности – для непрерывных СВ.

Для дискретных СВ

– равномерный закон:

$$p(X = x_k) = p_k = \begin{cases} \frac{1}{x_N}, & \text{при } x_0 \leq X \leq x_N, \\ 0, & \text{при остальных } X; \end{cases}$$

- биномиальный закон определяет вероятность числа k появления случайного события при n независимых испытаниях (например, вероятность появления k единиц в кодовой комбинации из n разрядов):



где C_n^k – число сочетаний из n по k ,
 p – вероятность появления события (вероятность появления единицы в кодовой комбинации).

Для непрерывных СВ

– равномерный закон

$$w(x) = \frac{1}{b-a}$$

где (a, b) – область определения случайной величины;

- нормальный закон

$$w(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

где m_x – математическое ожидание,
 $D_x = \sigma_x^2$ – дисперсия случайной величины.

- закон Релея - определяет распределения модуля вектора на плоскости, составляющие которого по обеим осям независимы и распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

$$w(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина имеет равномерный закон распределения на (a, b) , если ее **плотность вероятности постоянна** на этом отрезке и равна 0 вне его.

Функция $P(X < x) = F(x)$ имеет вид

$$F(x) = 0 \quad \text{при } x \leq a$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{при } a < x \leq b$$

$$F(x) = 1 \quad \text{при } x > b$$

- Математическое ожидание: $M[x] = (a+b)/2$
- Дисперсия: $D[x] = (b-a)^2/12$

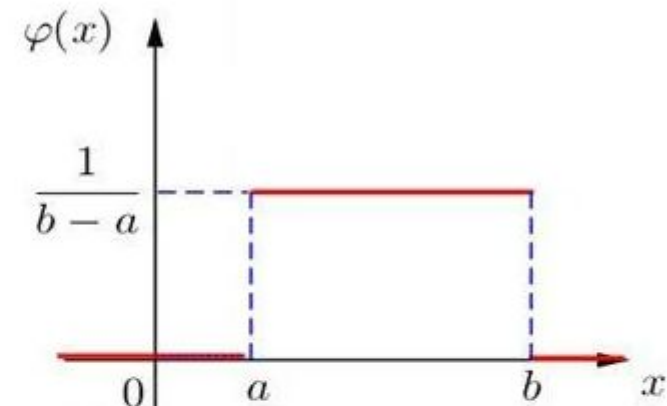


График плотности вероятности

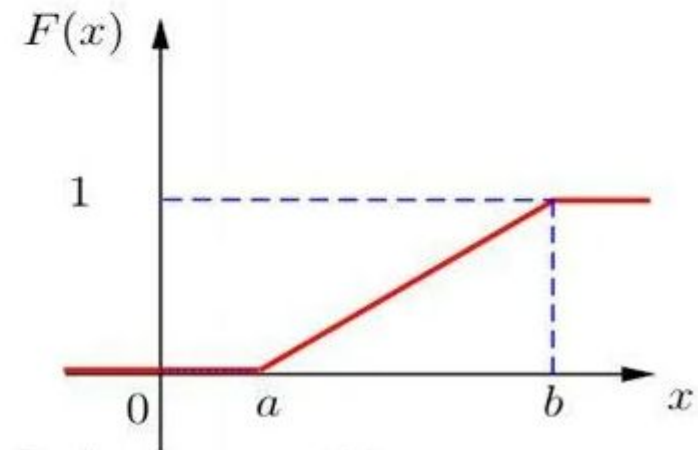


График интегральной функции распределения

Гауссовское (нормальное) распределение

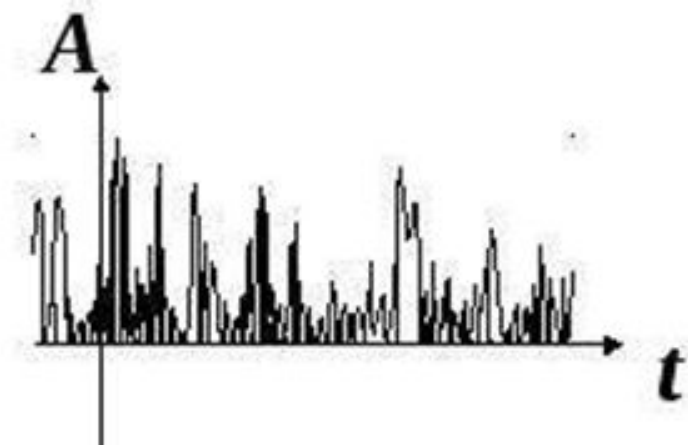
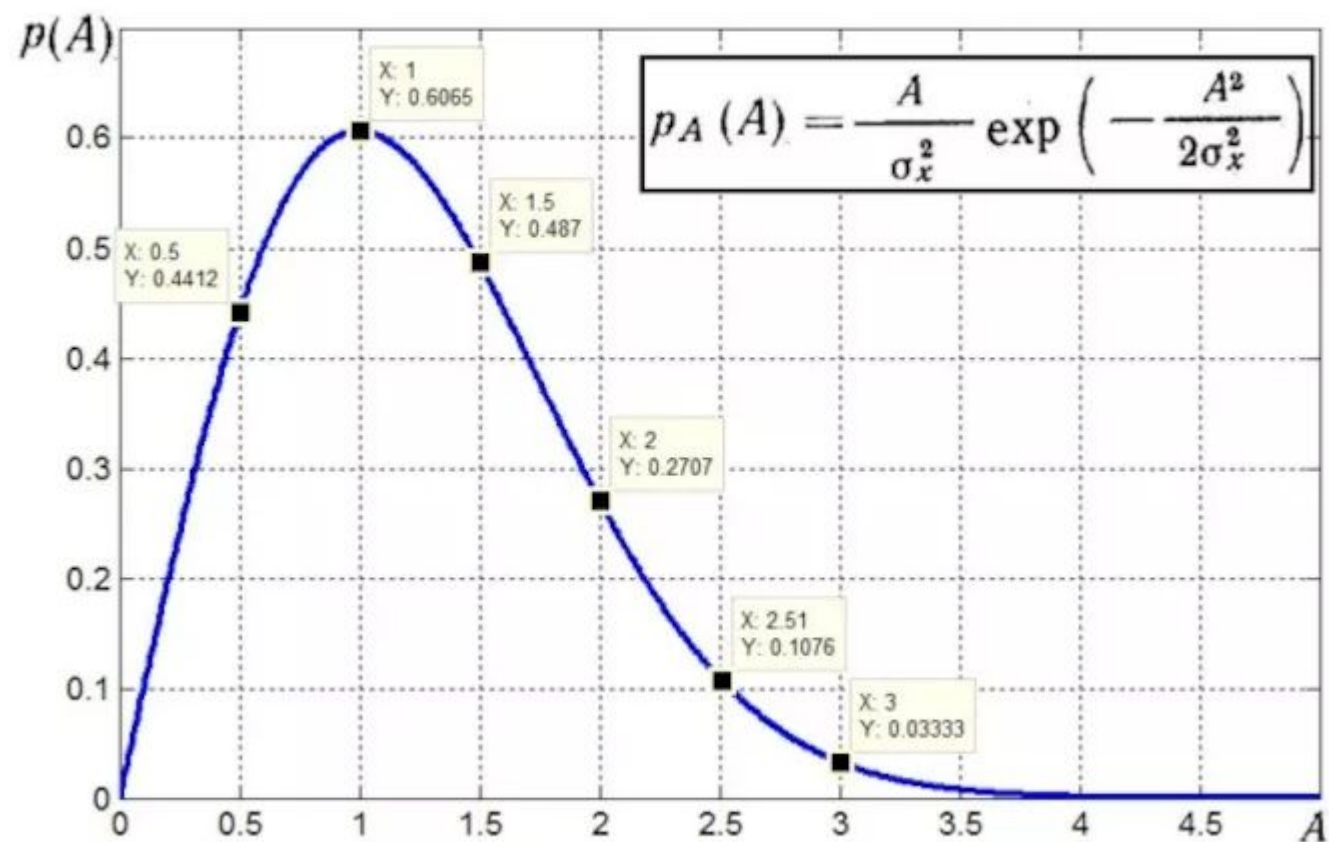
Плотность вероятности $p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx \quad - \text{ дисперсия}$$

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) p(x) dx \quad - \text{ математическое ожидание}$$



Распределение Рэля



4. Энергетический спектр случайного процесса

Передача информации в радиотехнических системах связана со спектральными преобразованиями сигналов.

Спектры **детерминированных** сигналов определяются преобразованием Фурье

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

где $s(t)$ – детерминированная функция, описывающая сигнал

$S(j\omega)$ – спектр, т.е. распределение комплексных амплитуд по частоте.

К реализации случайного процесса $x(t)$ можно формально применить преобразование Фурье и вычислить ее спектр

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Энергия реализации определяется выражением

$$\int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) d\omega$$

При таком подходе когда $T \rightarrow \infty$ энергия реализации неограниченно возрастает. Поэтому переходят от энергии реализации к средней мощности на интервале T

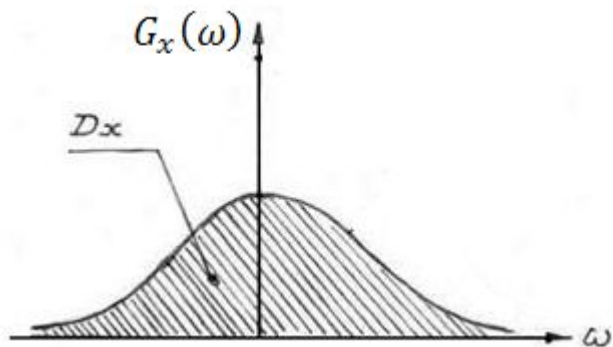
$$\bar{E} = P_T = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega)}{T} d\omega$$

где $S_x(\omega)/T$ - спектральная плотность средней мощности, т.е. средняя мощность, приходящаяся на единицу полосы частот.

Функция

$$G_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_x(\omega)}{T}$$

характеризует энергетический спектр, т.е. распределение средней мощности по частоте



Дисперсия процесса D_x равна площади под кривой

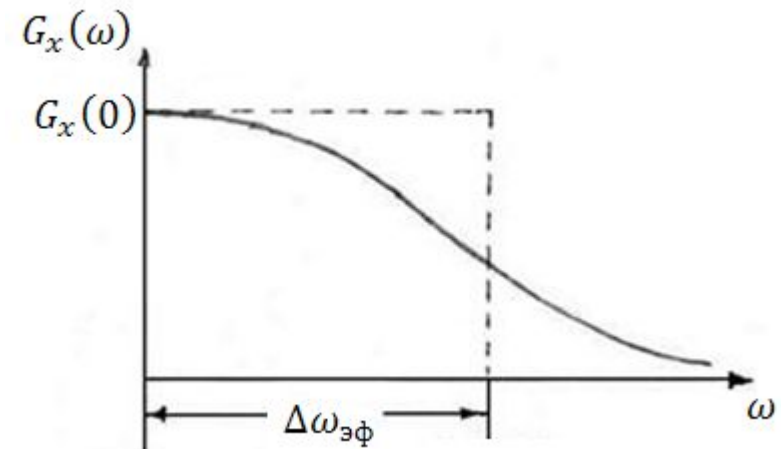
Энергетический спектр и автокорреляционная функция случайного процесса являются неслучайными функциями, связанными между собой прямым и обратным преобразованием Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Эффективная ширина энергетического спектра определяется выражением

$$\omega_{эф} = \frac{1}{G_x(0)} \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega$$



Автокорреляционная функция случайного процесса характеризует степень статистической связи между значениями процесса, разделенными интервалом времени τ

Значение τ , при котором значения случайного процесса $x(t)$ и $x(t+\tau)$ становятся статистически несвязанными, называется интервалом корреляции

Связь между эффективной шириной спектра и интервалом корреляции

$$\Delta\omega_{\text{эф}}\tau_{\text{к}} = \frac{1}{G_x(0)} \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega \frac{1}{B_x(0)} \int_0^{\infty} B_x(\tau) d\tau$$

Отсюда

$$\Delta\omega_{\text{эф}}\tau_{\text{к}} = \frac{\pi}{2} = \text{const}$$

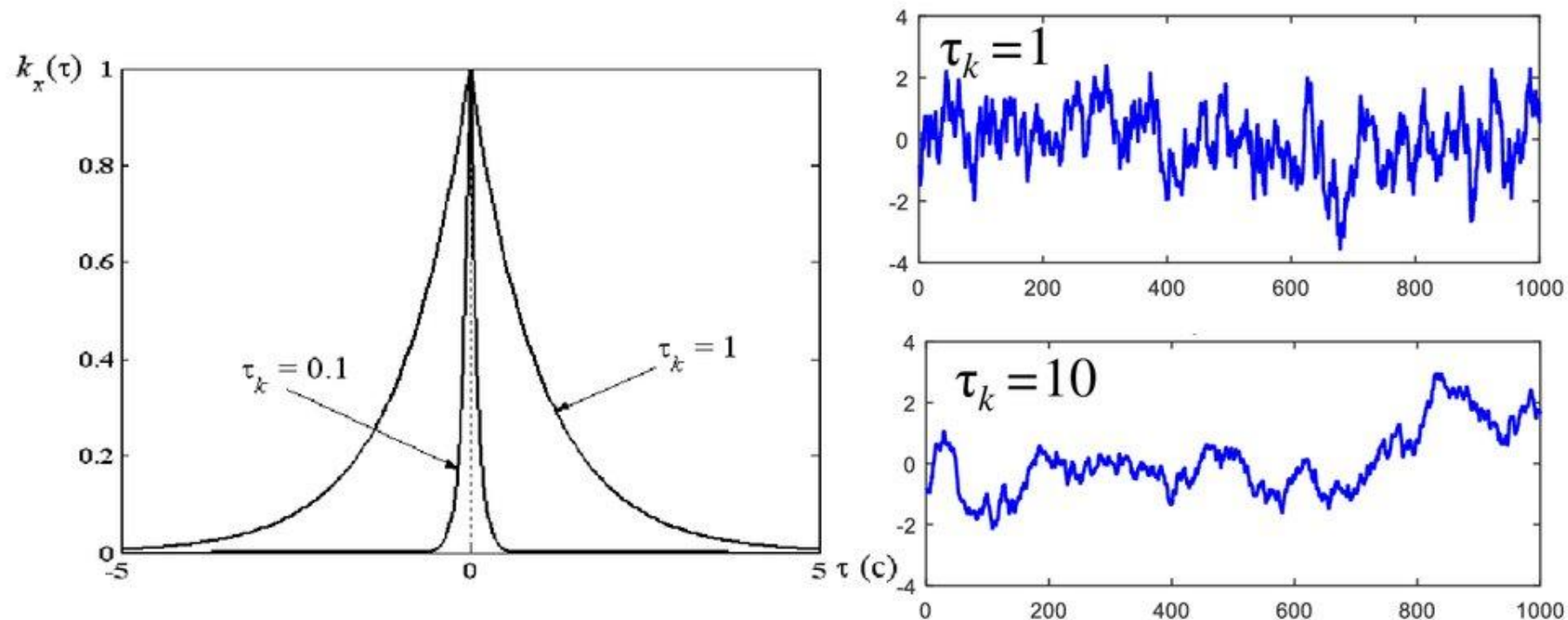
$$\Delta f_{\text{эф}}\tau_{\text{к}} = \frac{1}{4} = \text{const}$$

Экспоненциально-коррелированный процесс

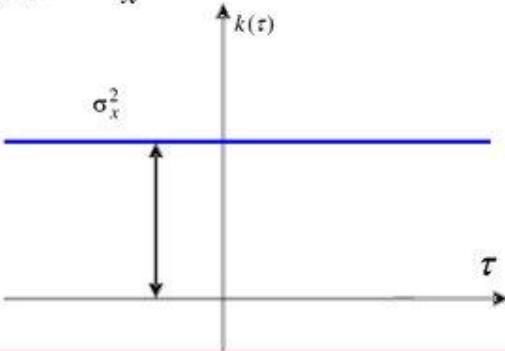
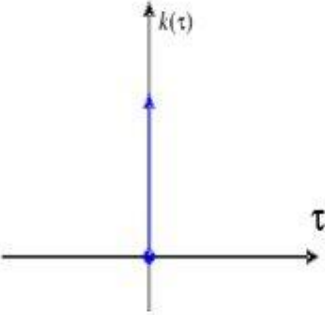
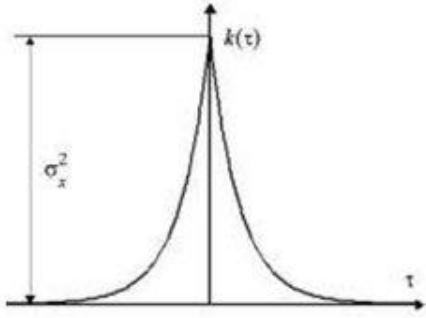
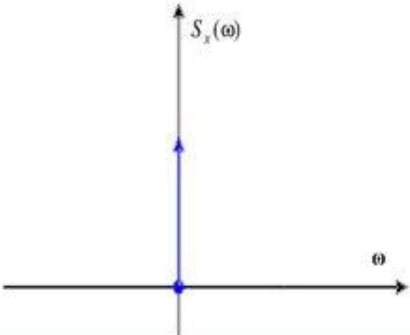
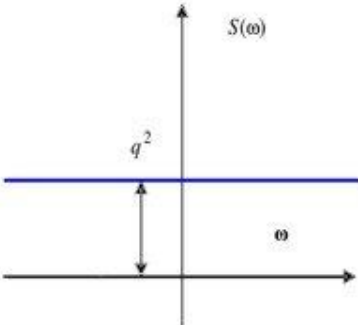
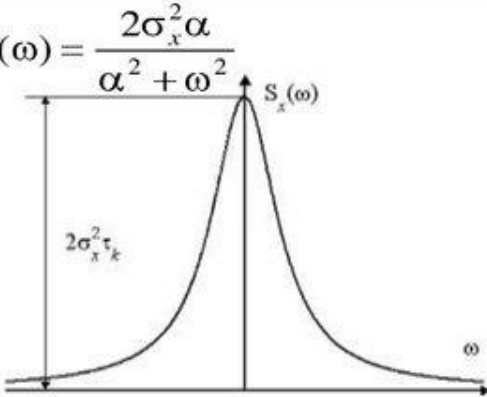
Рассмотри КФ стационарного процесса вида

$$k_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}. \quad (3)$$

– который называется **экспоненциально-коррелированным**. Здесь $k_x(0) = \sigma_x^2$ – дисперсия процесса, а $\tau_k = 1/\alpha$ – **интервал корреляции**.



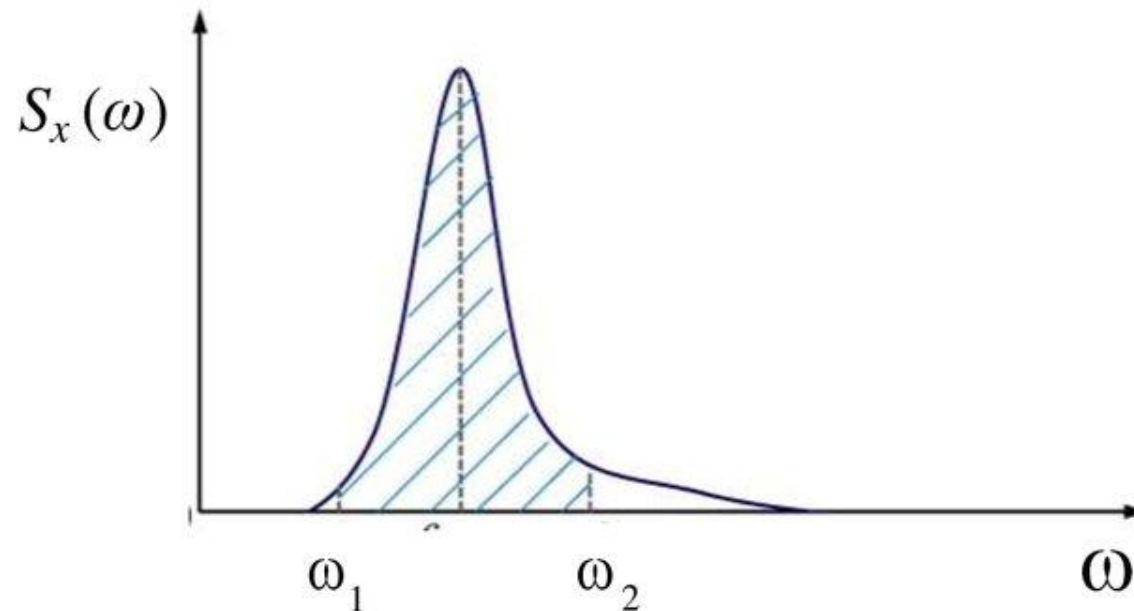
Примеры графиков корреляционных функций и спектральных плотностей простейших процессов

Случайная константа с дисперсией σ_x^2	Белый шум интенсивности q^2	Экспоненциально-коррелированный процесс
$k(\tau) = \sigma_x^2$ 	$k_x(\tau) = q^2 \delta(\tau)$ 	$k_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$ 
$S_x(\omega) = 2\pi\sigma_x^2\delta(\omega)$ 	$S_x(\omega) = q^2$ 	$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ 

Свойство спектральной плотности

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = k_x(0) = \sigma_x^2 \quad (10)$$

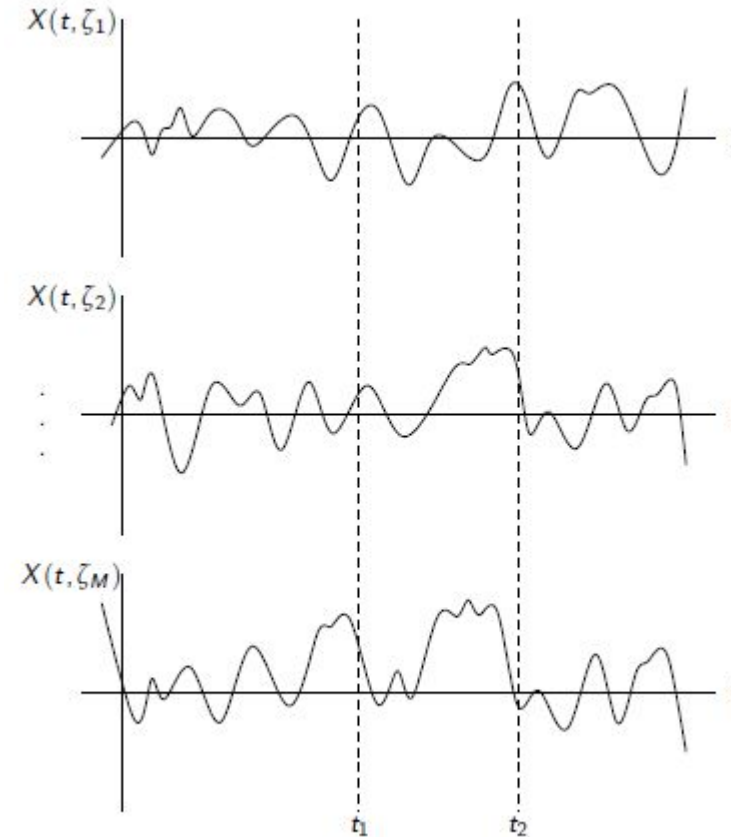
Область, ограниченная СП и осью абсцисс определяет дисперсию процесса с точностью до постоянного коэффициента



- We can NOT describe **all** of the parameters that contribute to a signal or sensor measurement
 - **Deterministic**: Can exactly model the relationship between the input (stimulus) and output (sensor meas)
 - **Random**: Can NOT exactly model the relationship
 - Can characterize attributes of the signal
 - *e.g.*, mean (μ), standard deviation (σ), probability density function (pdf), power spectral density (PSD), ...
 - *i.e.*, Noise (random signals)

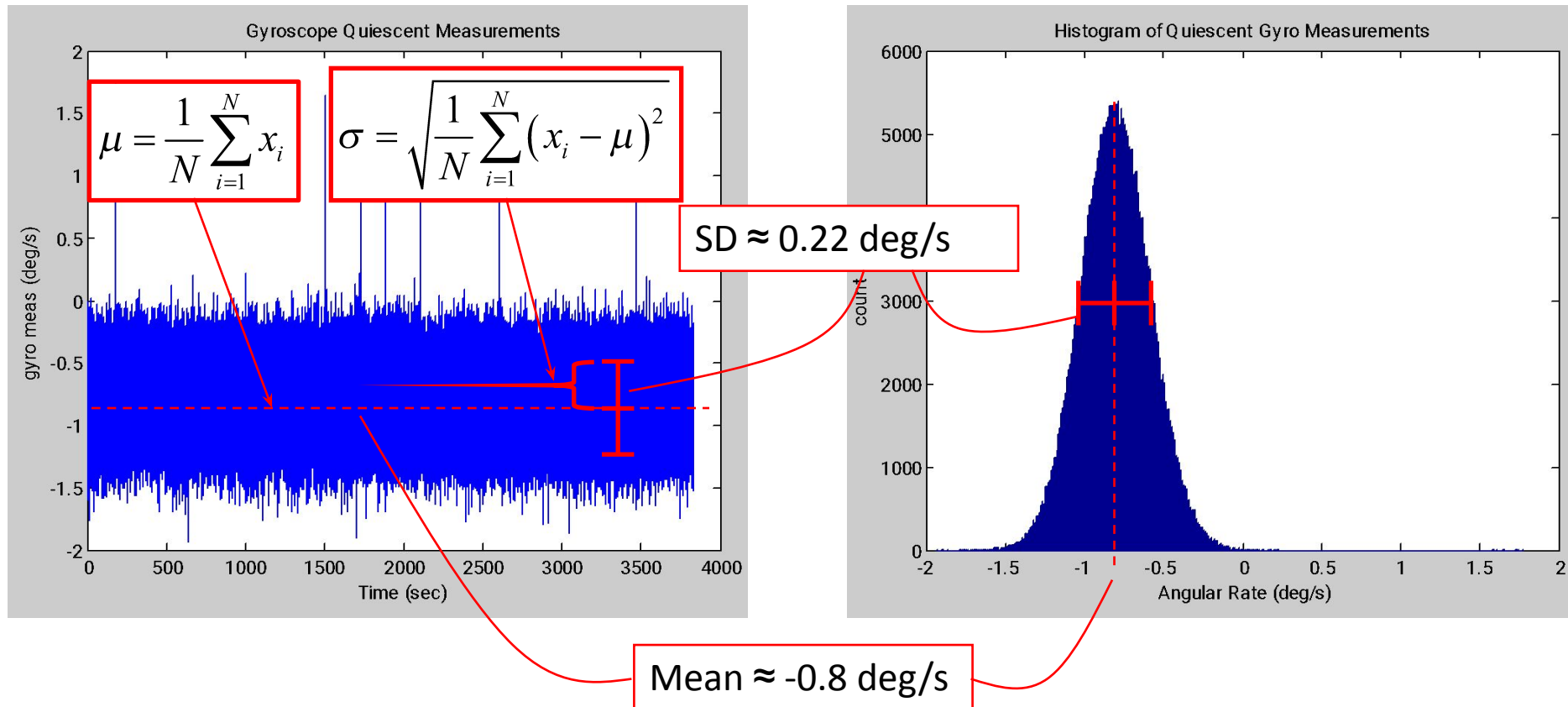
- A random process
 - A “family” of random variables
 - A function of both time and event
 - Can compute statistics across the ensemble or across time

If the time statistics and ensemble statistics are equal, then the random process is ergodic.



For example: Ensemble mean = time average!!

- An Example: A gyro sitting “still” on a lab bench
 - Mean = μ and Standard Deviation = σ



- Comparison of two random signals
 - Green signal has a lower standard deviation

