2.4.	Случайные сигналы и их математические модели. 1.Случайные процессы и их вероятностные характеристики. 2. Случайные процессы и их числовые характеристики. 3. Стационарные случайные процессы. 4. Свойства корреляционной функции и спектральная плотность мощности случайного процесса. (СР) 5. Широкополосные и узкополосные случайные процессы. (СР) 6. Законы распределения случайных величин. (СР)	2							Слайды по теме 2	[1] [2] [12]	Устный опрос	АК1,4,5, 7,9, ПК-2,5,21, СЛК5-7
2.5.	Сигналы и помехи в системах связи. 1. Решение типовых задач. 2. Решение задач в соответствии с индивидуальным заданием. 3. Защита отчета по лабораторному занятию.		4						Метод. Указания к ПЗ	[4] [6] [9]	Защита ПЗ	
СР	Разновидности модулированных сигналов. 1. Общие сведения о модуляции. 2. Виды аналоговой модуляции. 3. Виды импульсной модуляции.							6		[3] [4] [11]		
3.	**КОДИРОВАНИЕ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ.**	**6**	**8**	**4**				**8**				
3.1.	Основное положение теории информации. 1. Энтропия как количественная мера степени неопределенности. 2. Производительность источников сообщений. 3. Понятие информации. 4. Информация в сложной системе.	2							Слайды по теме 5	[7] [8] [11] [12]	Устный опрос	АК1,4,5, 7,9, ПК-1-5,10,13, 21,26,31 СЛК5-7
3.2.	Основные положения теории информации. 1. Расчет основных информационных характеристики источников сообщений. 2. Защита отчета по практическому занятию.		4						Метод. указания	[7] [8] [11] [12]	Защита ПЗ	
3.3.	Характеристики источников сообщения. 1. Дифференциальная энтропия. 2. Скорость передачи информации. 3. Эпсилон-энтропия.	2							Слайды по теме 5	[7] [8] [11] [12]	Устный опрос	АК1,4,5, 7,9, ПК-1-5,10,13,

Случайные сигналы и их математические модели

1. Случайные процессы и их математические характеристики

На практике все сигналы, которые предназначены для передачи информации, носят случайный характер. Именно в случайности изменения сигналов заложена информация, которую необходимо передать получателю.

Помимо этого, при передаче сигналов действуют помехи, которые также носят случайный характер.

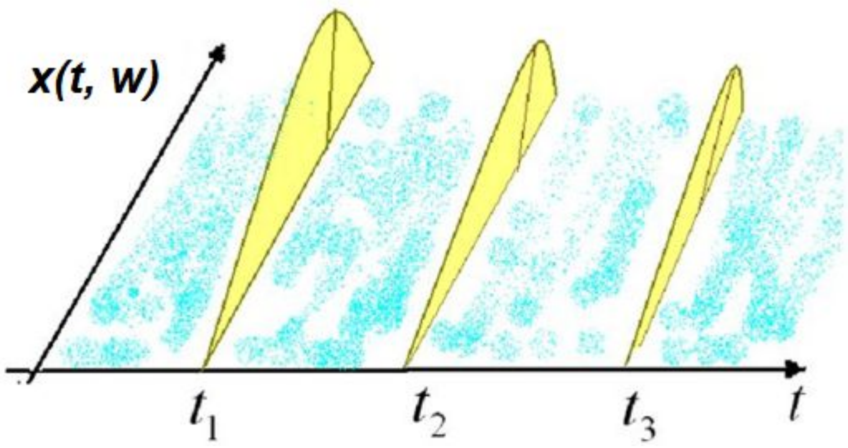
В отличие от детерминированных сигналов значения случайного сигнала в некоторый момент времени невозможно предсказать точно. Вместе с тем, описание таких сигналов возможно в вероятностном смысле через усредненные (статистические) характеристики.

Математическими моделями случайных сигналов и помех являются случайные процессы.

Случайным процессом называется изменение случайной величины во времени.

Случайный процесс есть семейство случайных величин $\{x(t, w)\}$,

где под параметром t понимается время.



К случайным процессам относится большинство процессов, протекающих в радиотехнических устройствах, а также помехи, сопровождающие передачу сигналов по каналам связи.

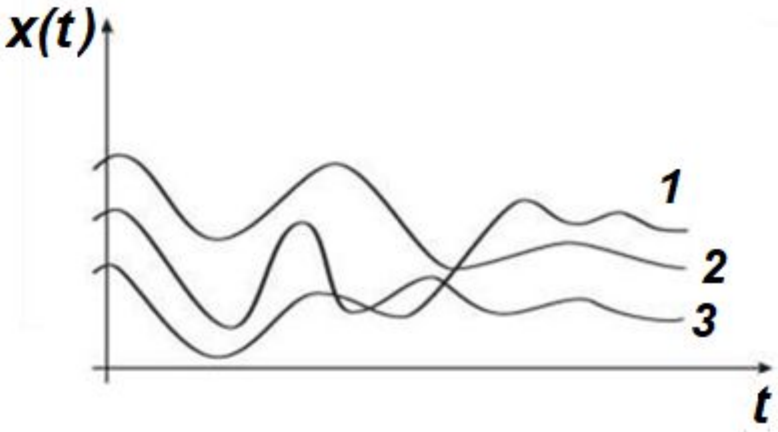
Случайные процессы могут быть непрерывными, либо дискретными в зависимости от того, какая случайная величина непрерывная или дискретная, изменяется во времени.

Пусть имеется зафиксированный результат испытания w_0.

Тогда неслучайная функция $x(t, w_0)$ (в которую превращается процесс в результате испытания) называется реализацией (траекторией, выборочной функцией) процесса.

С реализациями мы чаще всего имеем дело на практике.

Таким образом, случайный процесс можно рассматривать как совокупность всех возможных его реалиизаций.



В теории вероятностей основным понятием является ***случайное событие***, которое при проведении эксперимента может произойти, а может и не произойти.

Если, например, проводится эксперимент, включающий серию из n испытаний радиотехнического устройства, то результатом каждого испытания может быть либо рабочее состояние устройства, либо его отказ, которые представляют собой события. Но при каждом конкретном испытании отказ может произойти, а может и не произойти. В этом смысле отказ является случайным событием.

Обозначим случайное событие буквой ***A***. Центральным в теории вероятностей является определение частоты наступления события ***A***.

$$v(A) = \frac{n_A}{n}$$

где

n_A - число испытаний, соответствующих наступлению события А

n - общее число испытаний

При достаточно большом числе всех проведенных испытаний (теоретически при $n \to \infty$) частота наступления события A отождествляется с вероятностью

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Отсюда следует, что $0 \le p(A) \le 1$ - т.е. вероятность является неотрицательной величиной, принимающей значение в диапазоне чисел от 0 до 1.

Если $p(A)=0$ то событие называется невозможным, если $p(A)=1$ то событие называется достоверным.

Понятие вероятности можно применить и к группе событий $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$.

Если

$$p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_i) + \dots + p(A_n) = 1$$

то события образуют полную группу и в результате испытания одно из них наступит обязательно.

События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого.

Если в результате эксперимента возможно одновременное наступление событий, они называются совместными.

Пример: радиоприемник исправен (событие ***А***) и настроен на заданную частоту (событие ***В***).

Вероятность наступления события ***В*** при условии, что произошло событие ***А***, называется ***условной вероятностью p(В/А)***.

Вероятность одновременного наступления совместных событий ***А*** и ***В*** определяется выражением

$$p(AB) = p(A)p\left(B/_{A}\right) = p(B)p\left(A/_{B}\right)$$

События ***А*** и ***В*** называются ***независимыми***, если наступление одного из них не связано с наступлением другого. Вероятность наступления двух независимых совместных событий равна

$$p(AB) = p(A)p(B)$$

Отсюда следует, что для независимых совместных событий условная вероятность ***p(В/А)=p(В),*** т.е. равна безусловной вероятности.

Вероятность события ***A***, которое может наступить с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_j, \ldots, H_N$, образующих полную группу несовместных событий, называемых гипотезами, определяется ***формулой полной вероятности***

$$\boxed{p(A) = \sum_{j=1}^{N} p(H_j)\, p(A/H_j)}$$

Вероятность наступления гипотезы H_j, после того, как наступило событие ***A***, определяется ***формулой Байеса***

$$\boxed{p\left(H_j/A\right) = \frac{p(H_j)\, p(A/H_j)}{p(A)}}$$

Случайные события характеризуют эксперимент с качественной стороны.

На практике, как правило, требуется количественная оценка результата. Если в результате эксперимента наступает или не наступает событие ***A***, этому случайному событию можно поставить в соответствие величину, принимающую только два значения: **1** или **0** в зависимости от того, произошло событие или нет.

Так как событие ***A*** случайно, случайной будет и величина, оценивающая результат эксперимента.

Обозначим случайную величину через ***X***, а значения, которые она может принимать,− через x. Если случайная величина (СВ) ***X*** принимает значения из множества

$$\{x\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_K, .., x_N\}$$

возможных конкретных значений, то такая СВ называется ***дискретной СВ***.

Если же множество значений ***X*** непрерывно, то такая величина называется ***непрерывной СВ.***

Как дискретная, так и непрерывная СВ полностью характеризуются законами распределения. ***Функцией распределения*** дискретной СВ называется зависимость

$$\boxed{F(x_K) = p(X \leq x_K)}$$

Функция распределения непрерывной СВ представляет собой зависимость

$$F(x) = p(X < x)$$

и является интегральным законом распределения непрерывной СВ

Плотностью распределения непрерывной СВ называется зависимость

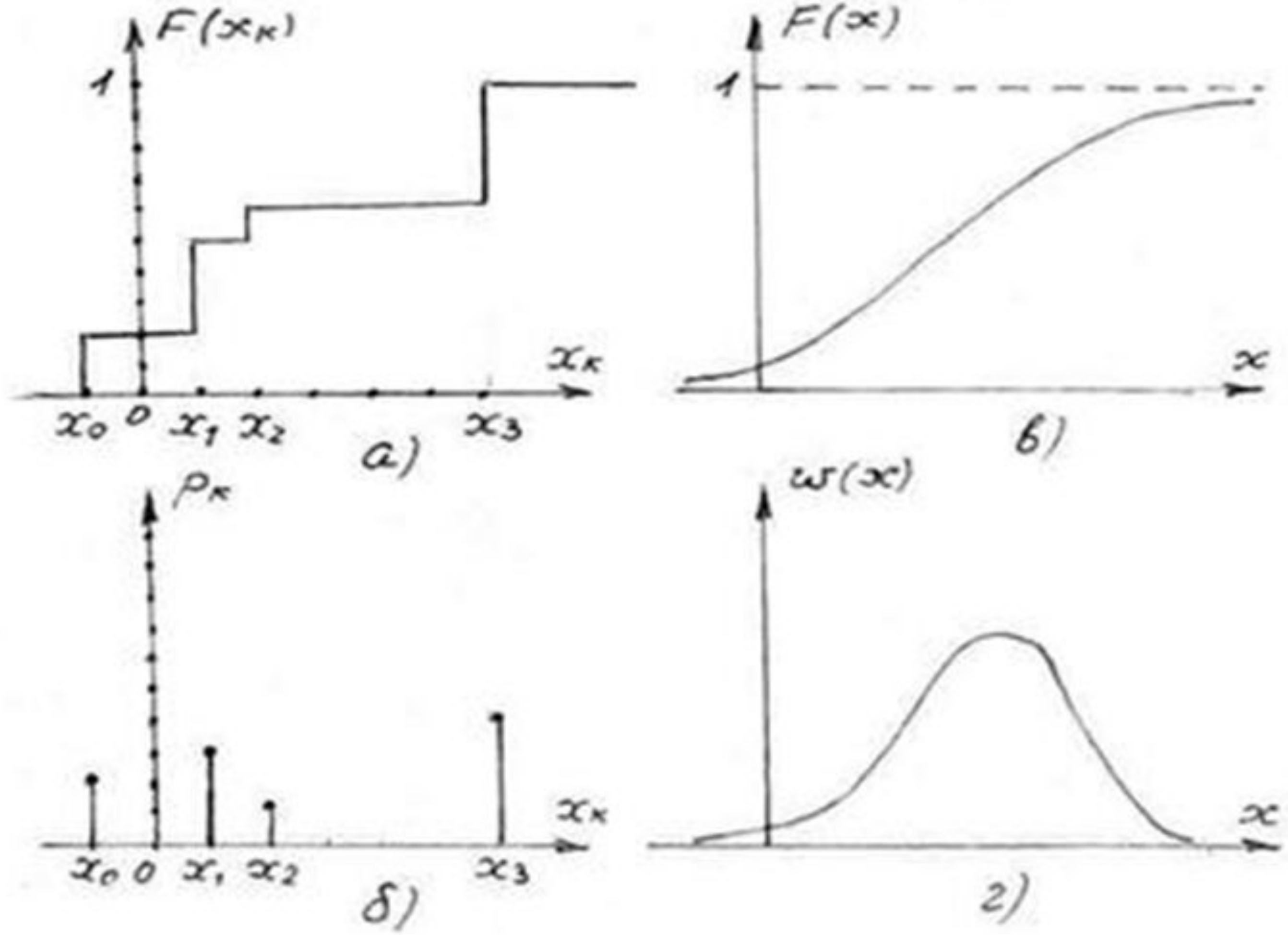
$$w(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(\Delta x)}{\Delta x} \qquad \Delta x = x_k - x_{k-1}$$

представляет собой отношение вероятности $p(\Delta x)$ того, что непрерывная СВ будет находиться в пределах элементарного интервала Δx к величине этого интервала.

Если функция ***F(x)*** непрерывна, и интервал значений СВ составляет ($-\infty \le x \le \infty$), то функция распределения и плотность распределения связаны между собой соотношениями

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx$$

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$


F(xк)
1
xк
x0 0 x1 x2 x3
а)
F(x)
1
x
в)
pк
xк
x0 0 x1 x2 x3
б)
w(x)
x
г)

Понятия законов распределения можно распространить и на совокупность случайных величин. Так, для двух случайных величин функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина не превзойдет значения

$$F(x,y) = p(X \le x, Y \le y)$$

Очевидно, что данная функция является двумерной.

Двумерная плотность распределения двух СВ

$$w(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Если случайные величины ***X*** и ***Y*** независимы, то $w(x,y) = w(x)w(y)$

При наличии зависимости случайных величин $w(x,y) = w(x)w\left(\frac{y}{x}\right) = w(y)w\left(\frac{x}{y}\right)$

2. Числовые характеристики случайных процессов

− вероятность попадания дискретной СВ в интервал (a,b) равна

$$p(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

- вероятность попадания непрерывной СВ в интервал (a,b) равна

$$p(a \le X \le b) = \int_a^b w(x)dx$$

- математическое ожидание дискретной СВ

[illegible]

- математическое ожидание непрерывной СВ

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx$$

- математическое ожидание случайного процесса

$$m_x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x,t_1)dx$$

- дисперсия дискретной СВ

$$M_x^2 = D_x = \sum_{k=0}^{N}(x_k - m_x)^2 p_k$$

- дисперсия непрерывной СВ

$$M_x^2 = D_x = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 w(x) dx$$

- дисперсия случайного процесса

$$M_x^{(2)}(t_1) = D_x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty}[x - m_x(t_1)]^2 w(x, t_1) dx$$

Для зависимых случайных величин имеет место ***функция корреляции***

$$R(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y) w(x,y) dx dy$$

характеризующая степень зависимости этих величин.

Важнейшей характеристикой случайного процесса служит **автокорреляционная функция (АКФ)**

[illegible]

устанавливающая степень статистической связи между значениями СП в моменты времени t_1 и t_2

Взаимную связь между двумя случайными процессами устанавливает **взаимная корреляционная функция** (ВКФ).

$$B_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)\,dt$$

Взаимная корреляционная функция характеризует степень статистической связи между значениями случайных процессов в моменты времени t и $t+\tau$

Часто используют коэффициент взаимной корреляции

$$\rho_{xy} = \frac{B_{xy}(0)}{\sqrt{D_x D_y}}$$

Если ρ=0, то случайные процессы некоррелированны (независимы).

Представление СП в виде ансамбля реализаций приводит к понятию стационарности процесса. Случайный процесс является **стационарным**, если все начальные и центральные моменты не зависят от времени, т.е.

$$m_x^{(n)}(t_1) = m_x^{(n)}(t_2) = m_x^{(n)}$$

$$M_x^{(n)}(t_1) = M_x^{(n)}(t_2)$$

Это жесткие условия, поэтому при их выполнении СП считается стационаром в узком смысле

На практике используется понятие стационарности в широком смысле. Случайный процесс стационарен в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, т.е.:

$$m_x(t_1) = m_x(t_2) = m_x$$

$$D_x(t_1) = D_x(t_2) = D_x$$

а автокорреляционная функция определяется только интервалом $\tau = t_2 - t_1$ и не зависит от выбора t_1

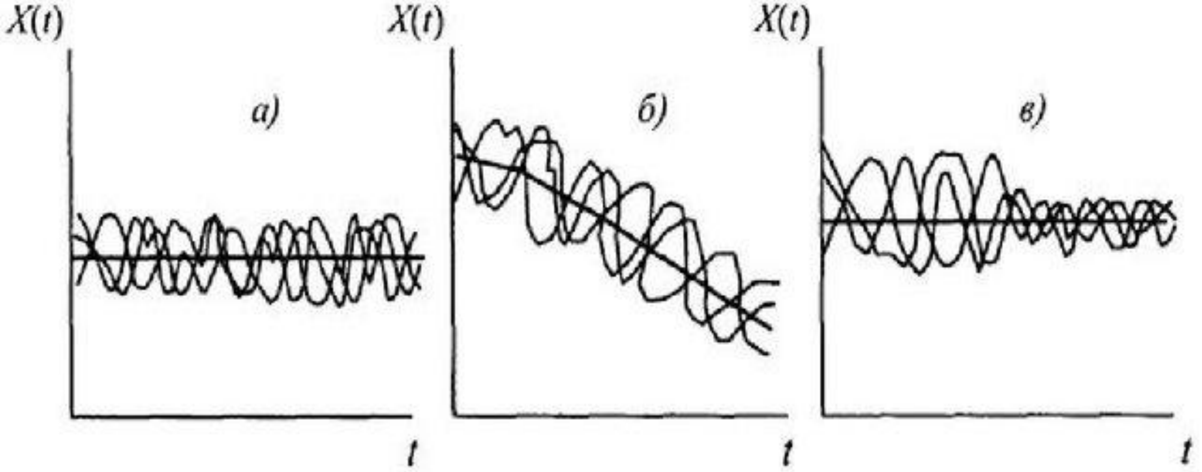
$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau)$$

Стационарные случайные процессы

Стационарные СП – это СП, у которых все вероятностные характеристики не зависят от времени, то есть:

- $m_x = const$
- $D_x = const$

Отличие стационарных и нестационарных СП показано на рисунке



а) стационарный СП
б) нестационарный СП по МО
с) нестационарный СП по дисперсии

Случайный процесс называется **эргодическим**, если его вероятностные характеристики, полученные усреднением по ансамблю, совпадают с вероятностными характеристиками, полученными усреднением по времени единственной реализации из этого ансамбля.

$$m_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

- математическое ожидание – это среднее значение (постоянная составляющая) процесса.

$$D_x = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [x(t)-m_x]^2 dt$$

- дисперсия, имеет физический смысл средней мощности переменной составляющей процесса

$$(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [x(t)-m_x][x(t+\tau)-m_x]dt$$

- автокорреляционная функция

Использование выражений для нахождения характеристик эргодического СП требует реализации случайного процесса большой (теоретически бесконечной) протяженности.

При решении практических задач интервал времени T ограничен. При этом большинство процессов считают приблизительно эргодическими и вероятностные характеристики определяют в соответствии с выражениями

$$m_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$D_x = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt$$

$$B_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x]\,dt$$

Случайные процессы, у которых исключено математическое ожидание, называются центрированными.

3. Законы распределения случайных величин

В практической радиотехнике наиболее широко используются следующие законы распределения, которые обычно описываются рядом распределения для дискретных СВ и плотностью вероятности – для непрерывных СВ.

Для дискретных СВ

− равномерный закон:

$$p(X = x_k) = p_k = \begin{cases} \frac{1}{x_N}, \text{при } x_0 \le X \le x_N, \\ 0, \text{при остальных } X; \end{cases}$$

- биномиальный закон определяет вероятность числа k появления случайного события при n независимых испытаниях (например, вероятность появления k единиц в кодовой комбинации из n разрядов):

[illegible]

где C_n^k – число сочетаний из n по k,

p – вероятность появления события (вероятность появления единицы в кодовой комбинации).

Для непрерывных СВ

− равномерный закон

$$w(x) = \frac{1}{b-a}$$

где (a, b) – область определения случайной величины;

- нормальный закон

$$w(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

где m_x – математическое ожидание,
$D_x = \sigma_x^2$ – дисперсия случайной величины.

- закон Релея - определяет распределения модуля вектора на плоскости, составляющие которого по обеим осям независимы и распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2.

$$w(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина имеет равномерный закон распределения на (a,b), если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке и равна 0 вне его.

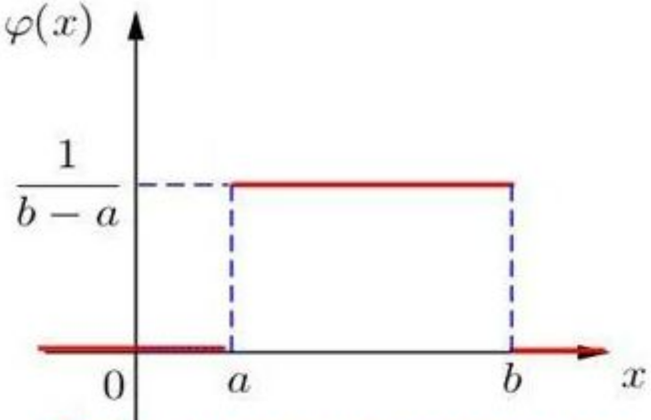


График плотности вероятности

Функция P(X<x)=F(X) имеет вид

F(x)=0 при x≤a

F(x)=(x-a)/(b-a) при a<x≤b

F(x)=1 при x>b

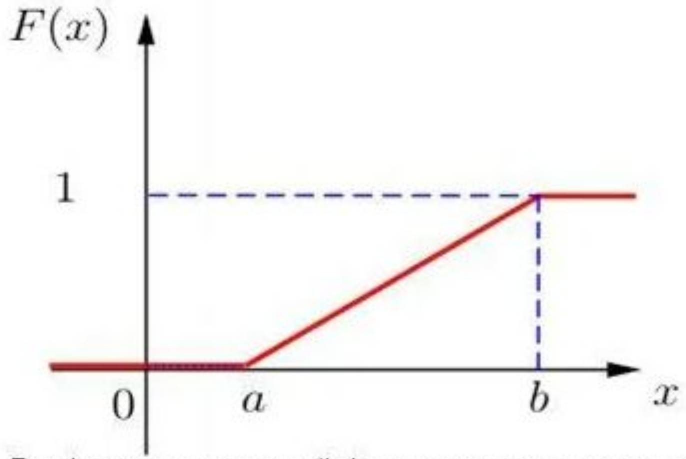


График интегральной функции распределения

- Математическое ожидание: M[x]=(a+b)/2
- Дисперсия: $D[x]=(b-a)^2/12$

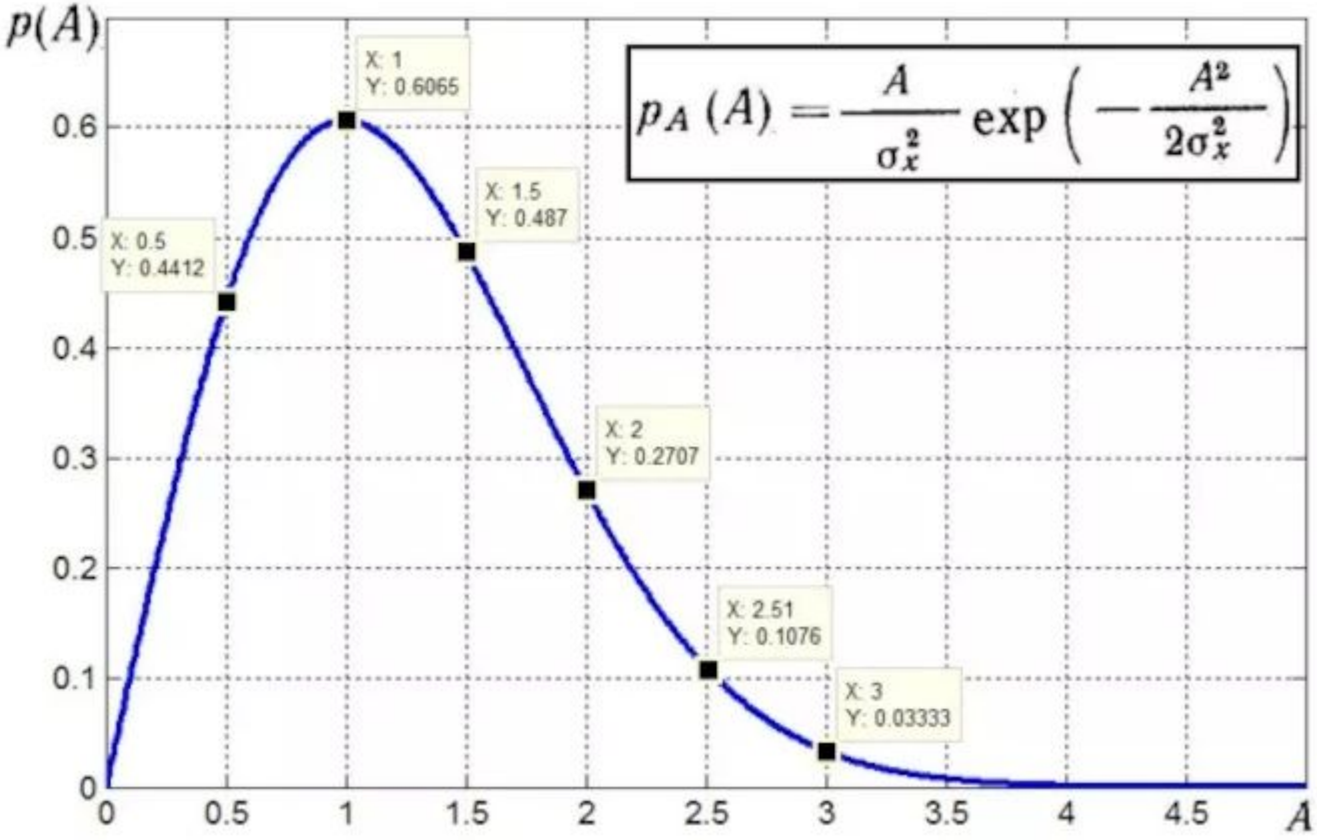
Гауссовское (нормальное) распределение

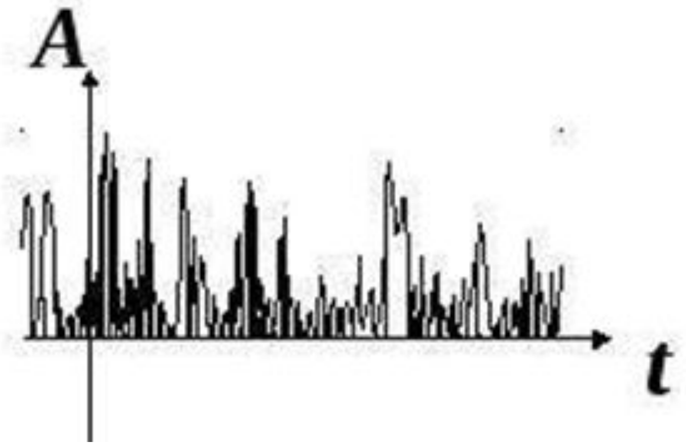
Плотность вероятности $$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 p(x)dx$$ - дисперсия

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)p(x)dx$$ - математическое ожидание

Распределение Рэлея





4. Энергетический спектр случайного процесса

Передача информации в радиотехнических системах связана со спектральными преобразованиями сигналов.

Спектры детерминированных сигналов определяются преобразованием Фурье

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt,$$

где ***s(t)*** – детерминированная функция, описывающая сигнал

S(jω) – спектр, т.е. распределение комплексных амплитуд по частоте.

К реализации случайного процесса ***x(t)*** можно <u>формально</u> применить преобразование Фурье и вычислить ее спектр

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Энергия реализации определяется выражением

$$= \int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega)\,d\omega$$

При таком подходе когда $T \to \infty$ энергия реализации неограниченно возрастает. Поэтому переходят от энергии реализации к средней мощности на интервале T

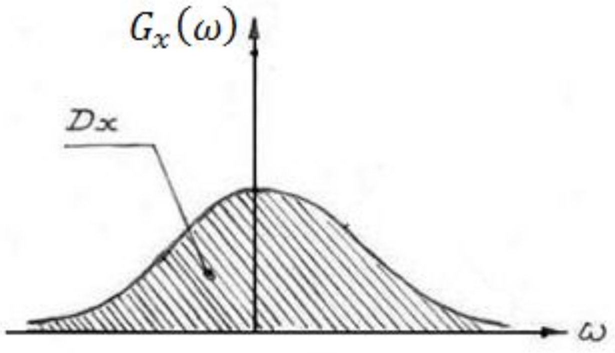
$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x^2(\omega)}{T}\,d\omega$$

где $S_x(\omega)/T$ - спектральная плотность средней мощности, т.е. средняя мощность, приходящаяся на единицу полосы частот.

Функция

$$G_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{S_x^2(\omega)}{T}$$

характеризует энергетический спектр, т.е. распределение средней мощности по частоте



Дисперсия процесса D_x равна площади под кривой

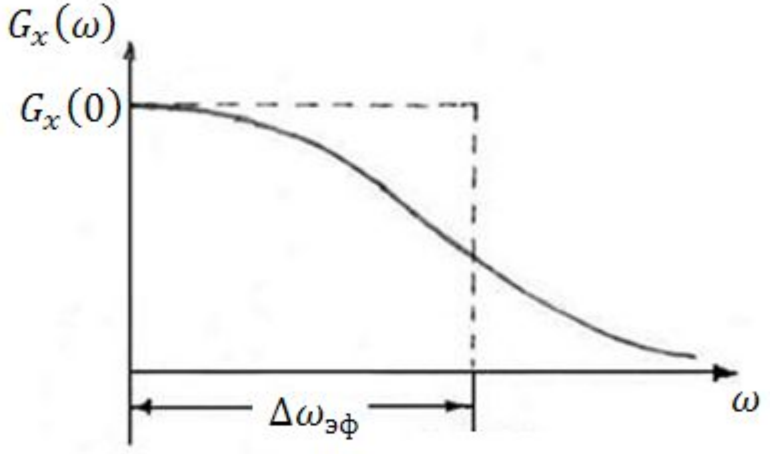
Энергетический спектр и автокорреляционная функция случайного процесса являются неслучайными функциями, связанными между собой прямым и обратным преобразованием Фурье

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Эффективная ширина энергетического спектра определяется выражением

$$\Delta\omega_{эф} = \frac{1}{G_{x\,max}}\int_{0}^{\infty} G_x(\omega)d\omega$$



Автокорреляционная функция случайного процесса характеризует степень статистической связи между значениями процесса, разделенными интервалом времени $\boldsymbol{\tau}$

Значение $\boldsymbol{\tau}$, при котором значения случайного процесса $x(t)$ и $x(t+\boldsymbol{\tau})$ становятся статистически несвязанными, называется интервалом корреляции

Связь между эффективной шириной спектра и интервалом корреляции

$$\Delta\omega_{эф}\tau_{к} = \frac{1}{G_x(0)}\int_0^\infty G_x(\omega)\,d\omega\,\frac{1}{B_x(0)}\int_0^\infty B_x(\tau)\,d\tau$$

Отсюда

$$\Delta\omega_{эф}\tau_{к} = \frac{\pi}{2} = const$$

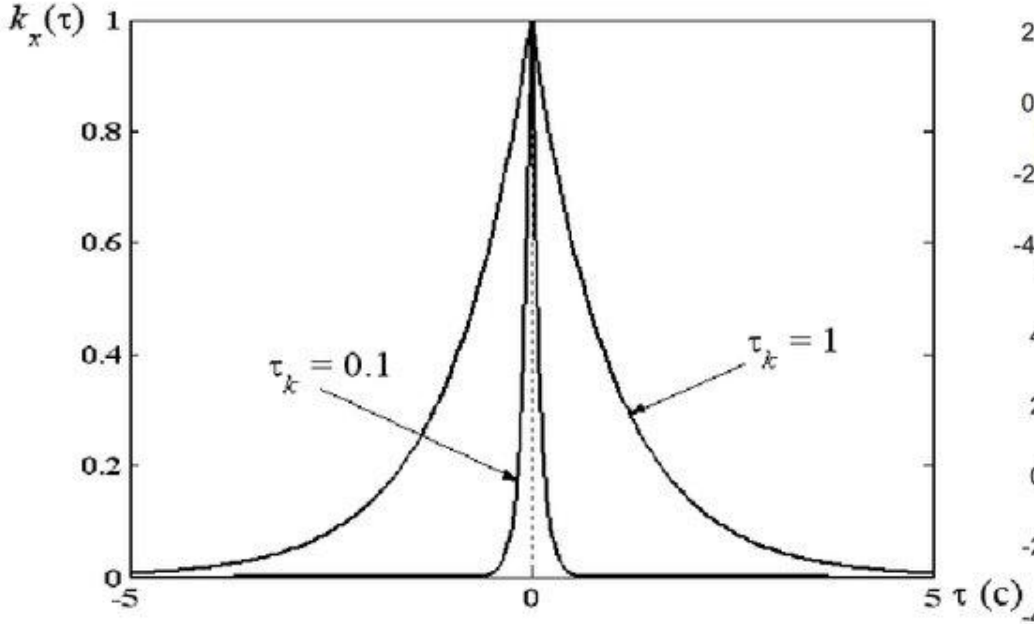
$$\Delta f_{эф}\tau_{к} = \frac{1}{4} = const$$

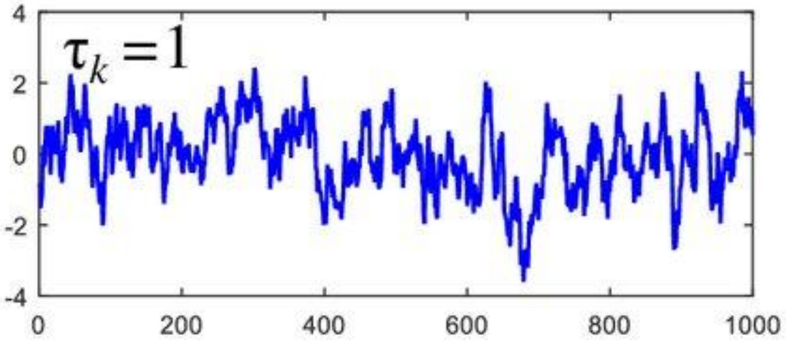
Экспоненциально-коррелированный процесс

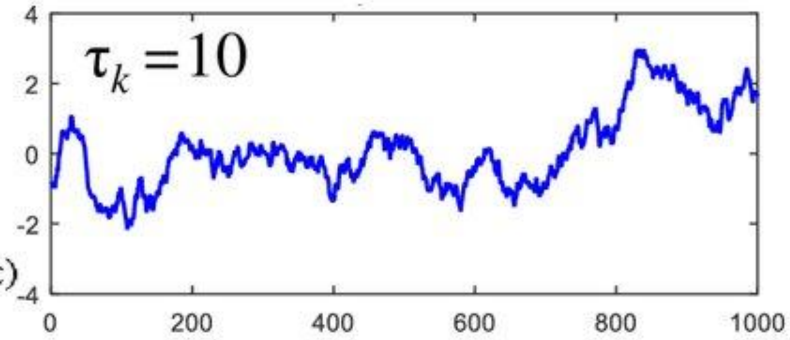
Рассмотри КФ стационарного процесса вида

$$k_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}. \quad (3)$$

– который называется **экспоненциально-коррелированным**. Здесь $k_x(0)=\sigma_x^2$ – дисперсия процесса, а $\tau_k = 1/\alpha$ – **интервал корреляции**.



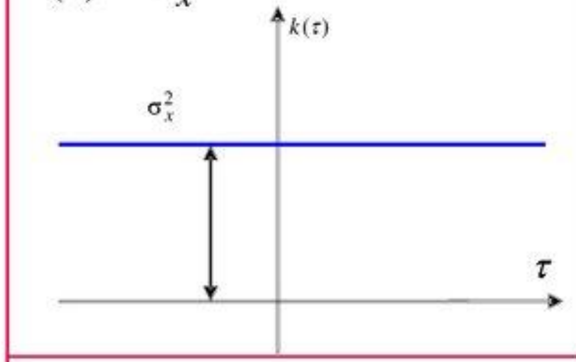




Примеры графиков корреляционных функций и спектральных плотностей простейших процессов

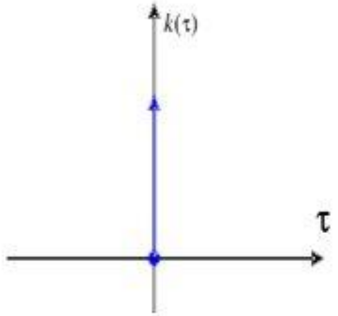
<table>
<tr>
<th>Случайная константа с дисперсией σ_x^2</th>
<th>Белый шум интенсивности q^2</th>
<th>Экспоненциально-коррелированный процесс</th>
</tr>
<tr>
<td>

$k(\tau) = \sigma_x^2$



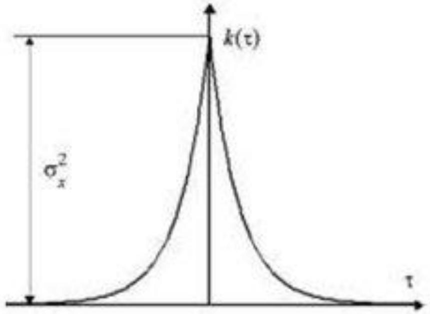
</td>
<td>

$k_x(\tau) = q^2\delta(\tau)$



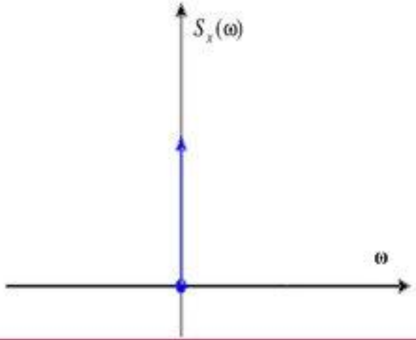
</td>
<td>

$k_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$



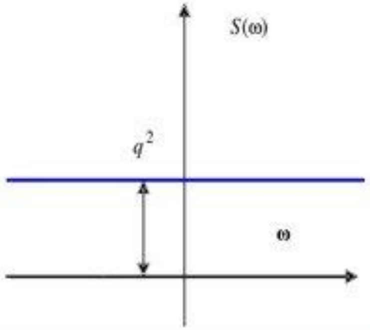
</td>
</tr>
<tr>
<td>

$S_x(\omega) = 2\pi\sigma_x^2\delta(\omega)$



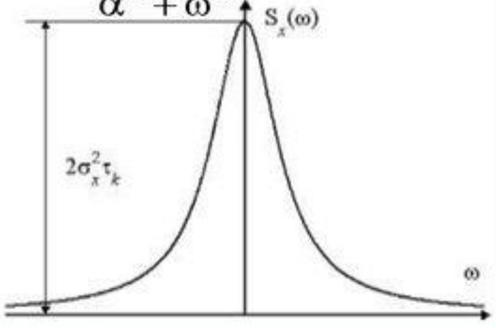
</td>
<td>

$S_x(\omega) = q^2$



</td>
<td>

$S_x(\omega) = \dfrac{2\sigma_x^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

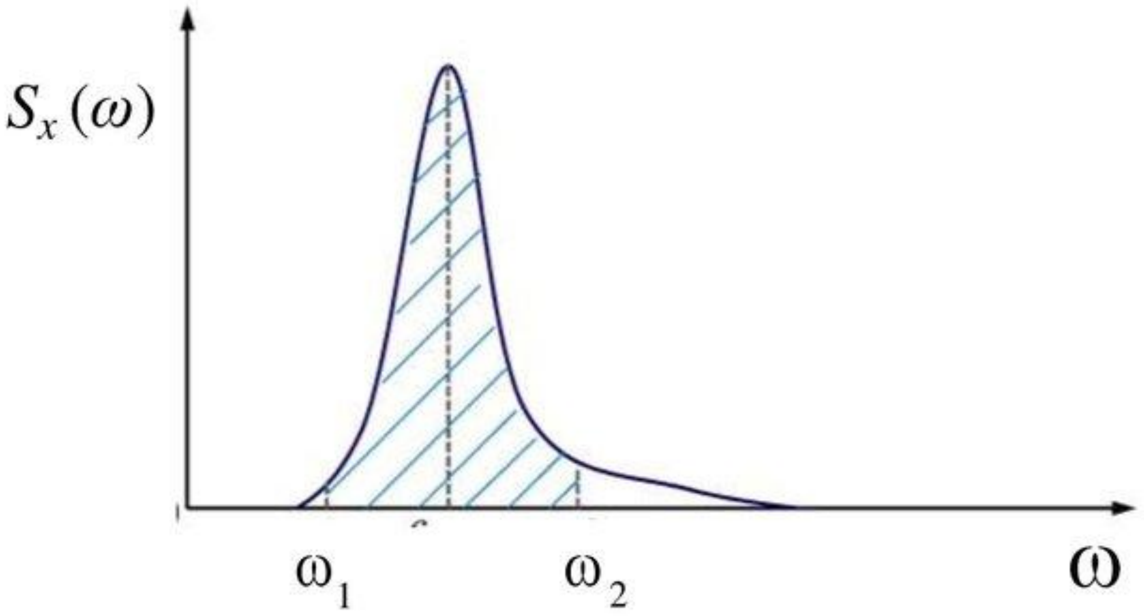


</td>
</tr>
</table>

Свойство спектральной плотности

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega = k_x(0) = \sigma_x^2 \qquad (10)$$

Область, ограниченная СП и осью абсцисс определяет дисперсию процесса с точностью до постоянного коэффициента

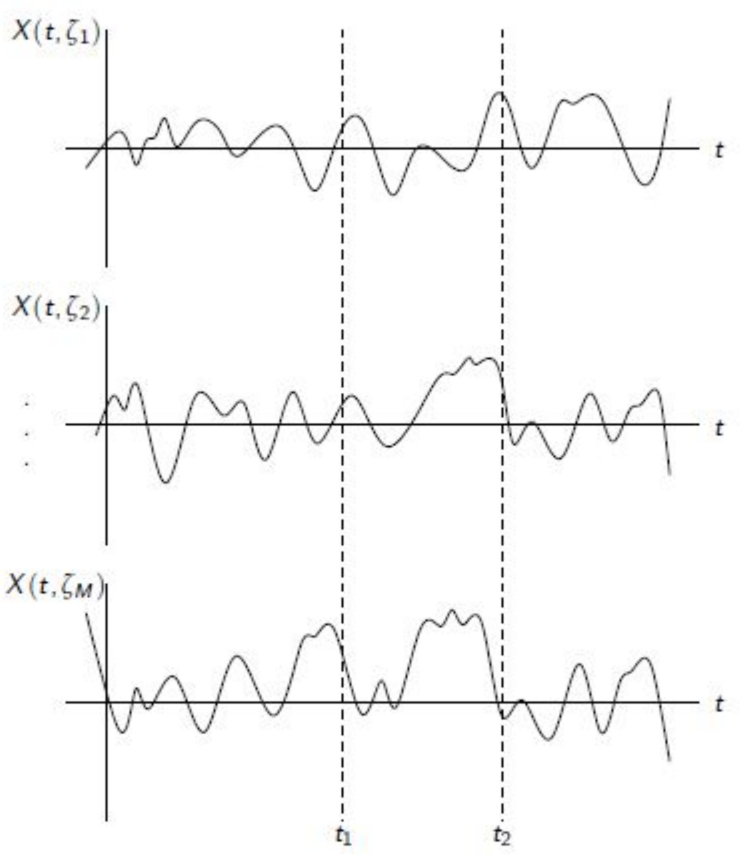


- We can NOT describe **all** of the parameters that contribute to a signal or sensor measurement
  - **Deterministic**: Can exactly model the relationship between the input (stimulus) and output (sensor meas)

  - **Random**: Can NOT exactly model the relationship
    - Can characterize attributes of the signal
      - *e.g.*, mean (μ), standard deviation (σ), probability density function (pdf), power spectral density (PSD), …
    - *i.e.*, Noise (random signals)

Noise & Random Processes

- A random process
  - A “family” of random variables
  - A function of both time and event
  - Can compute statistics across the ensemble or across time

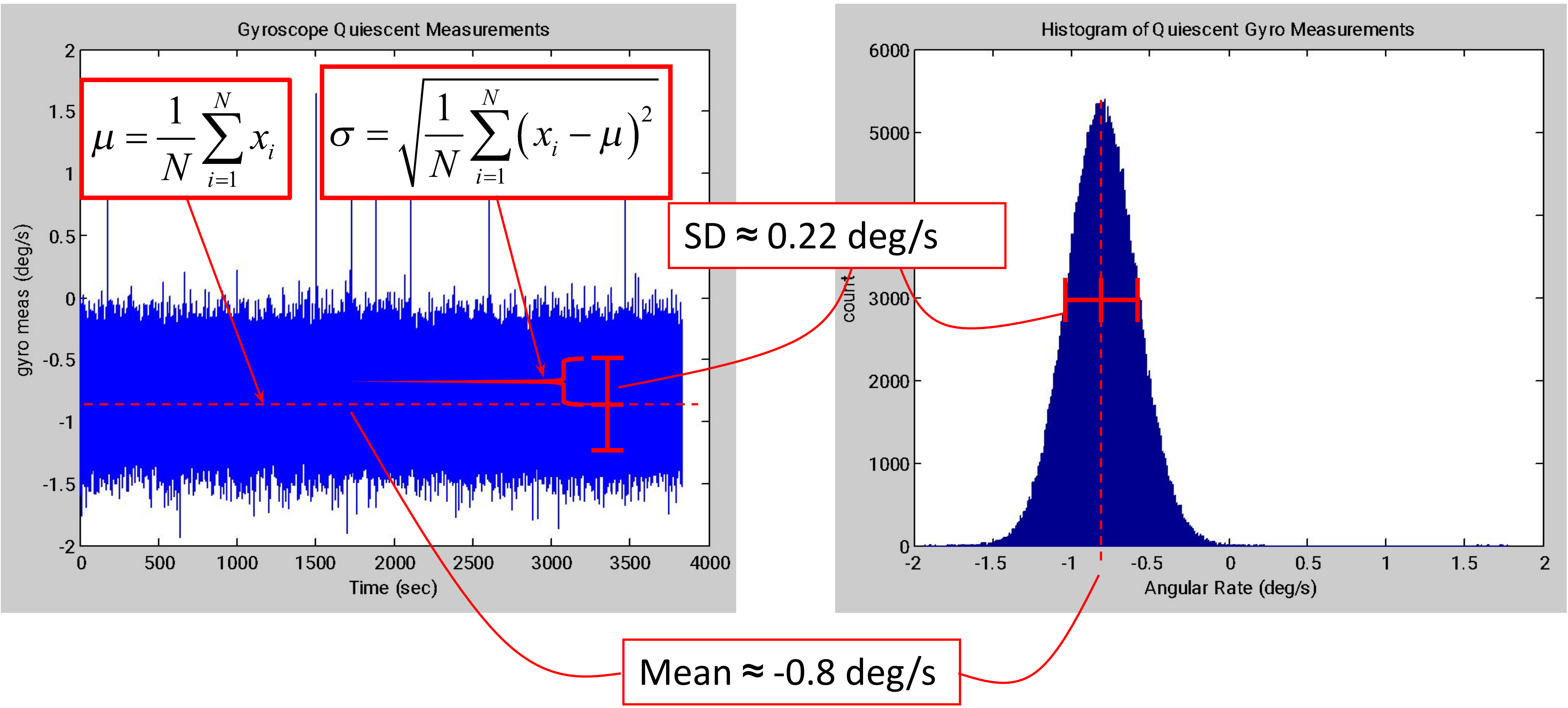


If the time statistics and ensemble statistics are equal, then the random process is ergodic.

For example: Ensemble mean = time average!!

Noise & Random Processes

- An Example: A gyro sitting “still” on a lab bench
  - Mean = μ and Standard Deviation = σ



- Comparison of two random signals
  - Green signal has a lower standard deviation