# 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

# 1.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла

Интегральное исчисление фактически гораздо старше дифференциального, поскольку вычисление площадей, поверхностей и объемов занимало величайших математиков, начиная с античных времен. Среди них были Архимед, Кеплер, Кавальери, Вивиани, Ферма, Грегори СентВинсент, Гулдин, Грегори, Барроу. Решающий прорыв наступил, когда Ньютон, Лейбниц и И. Бернулли независимо открыли, что интегрирование является операцией, обратной дифференцированию, и, следовательно, все достижения вышеупомянутых исследователей можно свести к нескольким правилам дифференцирования.

**Определение 1.1.** Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на интервал $(a, b)$, если $F'(x) = f(x)$ в любой точке интервала $(a, b)$.

**Примеры:**

1) $f(x)=0$, $F(x)=C$ $(Const)$, $(-\infty,\infty)$

2) $f(x)=a$ $(Const)$, $F(x)=ax$, $(-\infty,\infty)$

3) $f(x)=\cos x$, $F(x)=\sin x$, $(-\infty,\infty)$

4) $f(x)=1/x$, $F(x)=\ln x$, $(0,\infty)$

5) $f(x)=-2\sin 2x$, $F_1(x)= \cos 2x$, $F_2(x)= -2\sin^2 x$

**Теорема 1.1.** Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для *f(x)* на интервал $(a, b)$, то в любой точке интервала $(a, b)$ выполняется равенство $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – произвольная константа.

**Следствие.** Если функция $F_1(x)$ – первообразная для *f(x)* на интервал $(a, b)$, и $F_2(x)$ - другая первообразная, то в любой точке интервала $(a, b)$ выполняется равенство $F_1(x) = F_2(x) + C$, где C – произвольная константа.

**Пример.** Функции $\ln |x|$ и $\ln|x| + sign\ x$ являются первообразными для $1/x$ на множестве $X = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, но их разность не является константой.

**Определение 1.2.** Совокупность всех первообразных для $f$ на интервале $(a, b)$ называется неопределенным интегралом функции $f$ и обозначается

$$\int f(x)dx$$

$f(x)dx$ — подынтегральное выражение,

$f(x)$ — подынтегральная функция

Знак интеграла ввел Лейбниц (1686), а термин "интеграл" ввел И. Бернулли и опубликовал его брат Я. Бернулли (1690).

- **Примеры.** 1) Найти первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{x}$.
- 2) Найти первообразную для функции $f(x) = |x|$.
- 3) $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$
- 4) $\int f(x)dx - \int f(x)dx$
- 5) Найти неопределенный интеграл функции $f(x) = e^{|x|}$ на всей числовой прямой.

# Таблица неопределенных интегралов

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|, \text{на } (-\infty, 0) \text{ или } (0, \infty)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

# Основные свойства неопределенного интеграла.

- $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$
- $d\int f(x)dx = f(x)dx$
- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\int dF(x) = F(x) + C$
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k \neq 0$

# Непосредственное интегрирование

- $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$
- $\int \frac{2x^2}{x^2+2} dx$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

## 1.2. Интегрирование заменой переменной (подстановкой). Интегрирование по частям.

- Пусть функция $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале $(a, b)$ и пусть $(c, d)$ — множество всех значений этой функции. Пусть далее для функции $g(t)$ существует на множестве $(c, d)$ первообразная функция $G(t)$, т. е.

$$\int g(t)dt = G(t) + C.$$

Тогда всюду на интервале $(a, b)$ для функции $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ существует первообразная функция, равная $G[\varphi(x)]$, т. е.

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x))dx = G(\varphi(x)) + C.$$

**Следствие.** Пусть

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Тогда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

1. $\int e^{-x^2}dx,$ 2. $\int \cos(x^2)dx,$ 3. $\int \sin(x^2)\,dx,$

4. $\int \frac{dx}{lnx}(0 < x \neq 1),$ 5. $\int \frac{\cos x}{x}dx\,,$ 6. 5. $\int \frac{\sin x}{x}dx$

- **Примеры**

$$\int \sin^3 t \cos t dt = \int \sin^3 t d \sin t =$$

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 t}{4} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = (\sqrt[6]{x} = t, x = t^6, dx = 6t^5 dt) =$$

$$= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} =$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\cos^2(arctgx)}$$

## Интегрирование по частям

- Пусть каждая из функций $u$(x) и $v(x)$ дифференцируема на интервале $(a,b)$ и, кроме того, на этом интервале существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на интервале $(a,b)$ существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

- **Пример**

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| =$$

$$x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$\int (\arccos x)^2 dx$$

- **Пример**

$$\int P(x)\varphi(x)dx$$

- $P(x)$ – многочлен
- $\varphi(x)$ - функции одного из следующих классов
- 1) $\ln x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$
- 2) $e^x$, $\sin x$, $\cos x$

$$\int e^x \sin x\, dx$$