

**Решение  
заданий  
олимпиады  
ПРОФИ 2017**

1 Уравнение  $x \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \sin 4\alpha - x$  имеет бесконечное множество решений при всех  $\alpha$  из множества ( $n \in \mathbb{Z}$ )

1  $\frac{\pi}{4} + \pi n$

2  $\frac{\pi}{2} n$

3  $\frac{\pi}{4} n$

4  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$

5  $\emptyset$

Решение.

$$x(1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha) = \sin 4\alpha$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0, \\ \sin 4\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: №4

**2**

Дробь  $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - \sqrt{13}x + 4}$  при  $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$  равна

1  $\sqrt{13} + 1$

2 2

3 3

4 4

5 5

Решение.

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\left(x - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{13}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 4$$

Ответ: №4

- 3 Прямой, перпендикулярной прямой  $x \sin 165^\circ - y \cos 165^\circ = 1$ , является
- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | $x \sin 105^\circ + y \cos 105^\circ = 1$ | 2 | $x \sin 115^\circ - y \cos 115^\circ = 1$ |
| 3 | $x \sin 15^\circ - y \cos 15^\circ = 1$   | 4 | $x \sin 75^\circ + y \cos 75^\circ = 1$   |
| 5 | $y \sin 115^\circ - x \cos 115^\circ = 1$ |   |   |

Решение. Воспользуемся условием перпендикулярности прямых: произведение угловых коэффициентов равно  $-1$ .

У данной прямой угловой коэффициент равен:  $\left(\frac{\sin 165^\circ}{\cos 165^\circ}\right)$

Рассмотрим уравнение прямой под №1, угловой коэффициент равен  $\left(-\frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ}\right)$ .

$$\frac{\sin 165^\circ}{\cos 165^\circ} \cdot \left(-\frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ}\right) = -1$$

Ответ: №1

4 Сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - \frac{x}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3} - 2}} + \sqrt{0,1875} = 0$  равна

1 1

2 7

3 4

4 12

5  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Решение.

$$x^2 - \frac{x}{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 - 2}} + \sqrt{\frac{3}{16}} = x^2 - \frac{x}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3}}{4} = x^2 - \frac{(\sqrt{3} + 1)x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$x^2 - \frac{(\sqrt{3} + 1)x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$$

Ответ №1

5 Сумма целых решений неравенства  $\arcsin(\log_2(\frac{x}{2})) > 0$  равна

1 7

2 6

3 9

4 10

5 5

Решение.

$$0 < \log_2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1, \quad x \in (2; 4]$$

Ответ: №1.

6 Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 13 и 26, а боковые стороны равны 5 и 12.

1 90

2 60

3 96

4 75

5 36

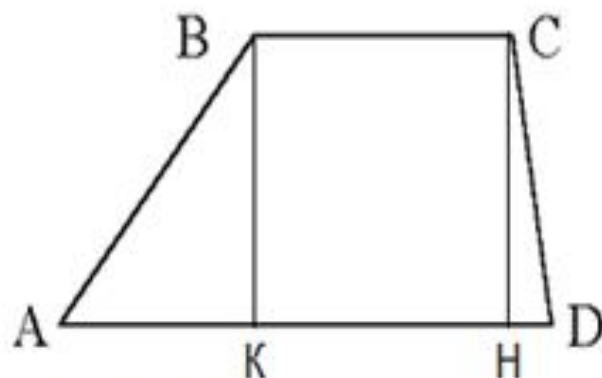
Решение. (1 способ)

$$AB = 12, CD = 5, BC = KH = 13, AD = 26$$

Пусть  $AK = x, HD = 13 - x$ .

$$\text{Т.к. } BK = CH, \text{ то } \sqrt{12^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - (13 - x)^2}, x = \frac{144}{13}, BK = \frac{12 \cdot 5}{13}$$

$$S = \frac{13 + 26}{2} \cdot \frac{12 \cdot 5}{13} = 90$$



Ответ: №1.



6 Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 13 и 26, а боковые стороны равны 5 и 12.

1 90

2 60

3 96

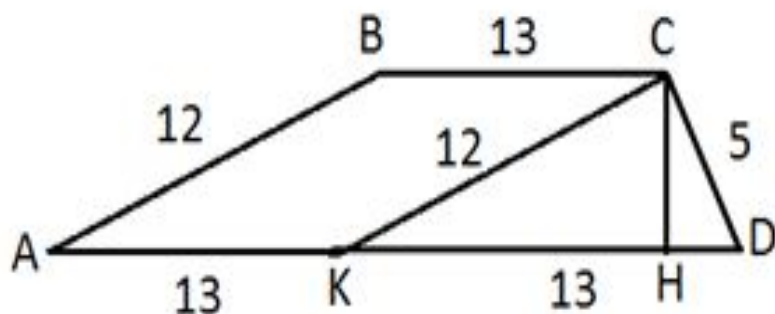
4 75

5 36

Решение. (2 способ)

Проведем СК параллельно АВ.

$\triangle KCD$  –прямоугольный, т.к.  $13^2 = 12^2 + 5^2$



$CH$ – высота, проведенная к гипотенузе  $KD$ .  $CH = \frac{KC \cdot CD}{KD}$ .

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{13 + 26}{2} \cdot \frac{12 \cdot 5}{13} = 90$$

Ответ: №1.



7 Если  $f(x) = 5x + 2$  и  $f(2g(x) + 5) = 15 - 4x$ , то производная  $g'(x)$  равна

1  $-0,4$

2  $-0,2$

3  $0,2$

4  $0,4$

5  $0$

Решение.

$$f(2g(x) + 5) = 5 \cdot (2g(x) + 5) + 2 = 10g(x) + 27$$

$$10g(x) + 27 = 15 - 4x$$

$$g(x) = -\frac{4}{10}x - \frac{12}{10}, g'(x) = -0,4$$

Ответ: №1

8 Все решения неравенства  $x \cdot (x - \log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}) \cdot (x - \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}) > 0$  образуют множество

1  $(-\infty; 0) \cup (\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6})$

2  $(-\infty; \log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8})$

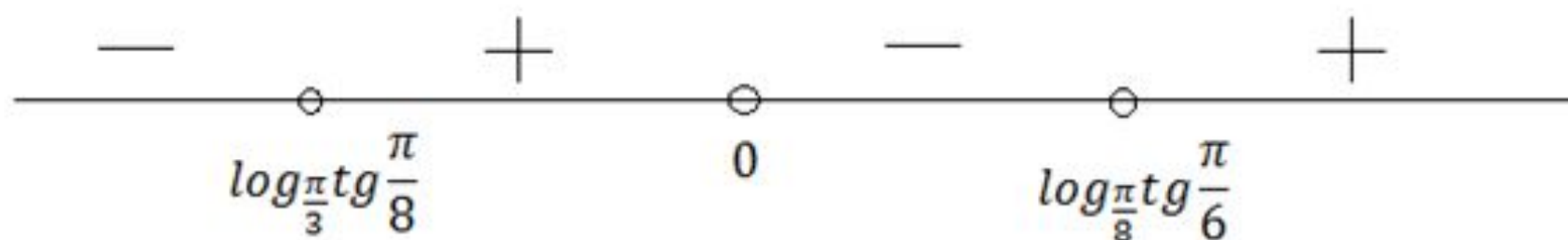
3  $(\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6})$

4  $(\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; +\infty)$

5  $(\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; 0) \cup (\log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}; +\infty)$

Решение.

$$\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < 0, \quad \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} > 0$$



Ответ: №5.

9 Сумма первых десяти членов последовательности  $a_n = n$ , принадлежащих области определения функции  $y = \sqrt{\lg \cos(0,5\pi x)}$ , равна

1 220

2 240

3 184

4 216

5 224

Решение.

$$\begin{cases} \lg(\cos(0,5\pi x)) \geq 0 \\ \cos(0,5\pi x) > 0 \end{cases},$$

$$\cos(0,5\pi x) \geq 1,$$

$$x = 4\pi k, k \in Z$$

$$a_1 = 4, d = 4, S_{10} = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 220$$

Ответ: №1.

10 Сумма целых решений неравенства  $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{49 - x^2} > 0$  равна

1 22

2 0

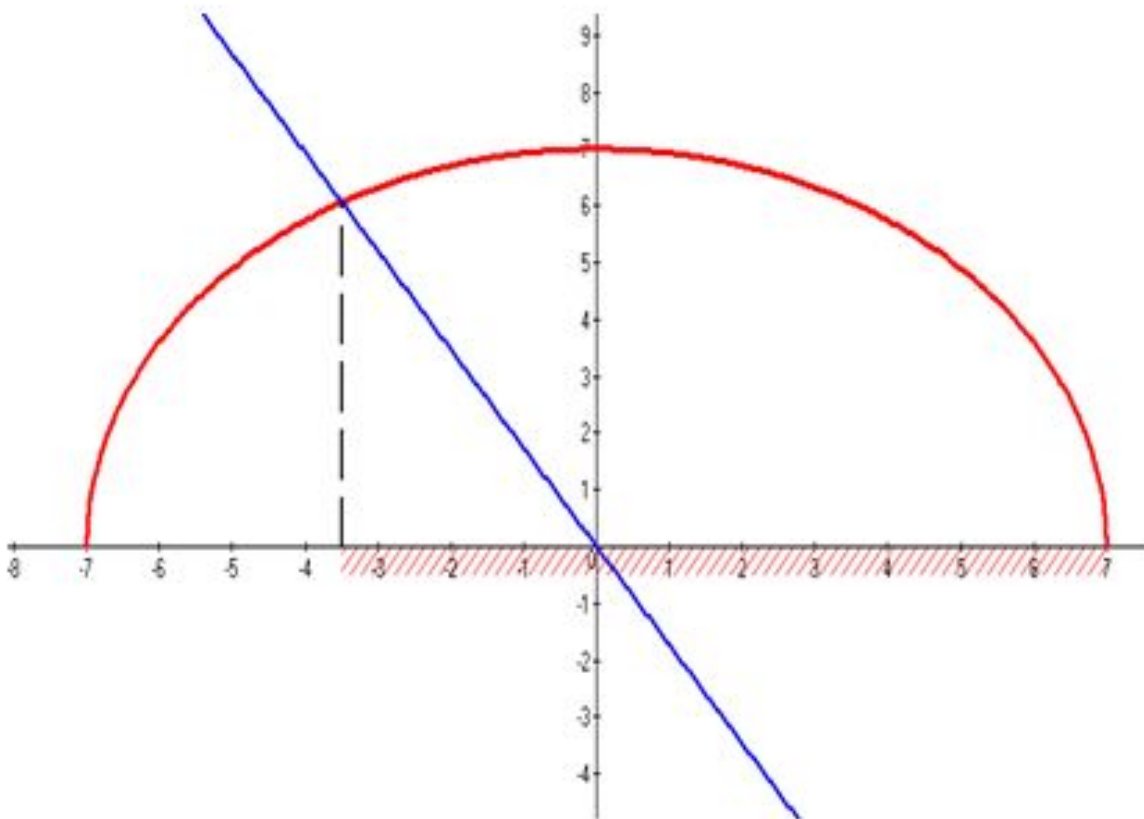
3 30

4 18

5 15

Решение.

$$\sqrt{49 - x^2} > -\sqrt{3}x.$$



$x \in (-3,5; 7]$  Сумма целых решений неравенства равна 22.

Ответ: № 1.

- 11 Объем шара, описанного около куба с ребром, равным  $\sqrt[6]{\frac{16}{3\pi^2}}$ , составляет
- 1 2      2 4      3 3      4  $\frac{4}{\pi\sqrt{3}}$       5  $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

Решение.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\left(\frac{4}{\pi\sqrt{3}}\right)^3 3\sqrt{3}}{8} = 2$$

Ответ: №1.

- 12 Наибольшее расстояние от точки с целочисленными координатами, принадлежащей кривой  $x^2 - 3xy + 2y^2 - 11 = 0$ , до начала координат равно
- 1  $\sqrt{541}$       2  $\sqrt{313}$       3  $\sqrt{551}$       4  $\sqrt{181}$       5 25

Решение.

$$(x - 2y)(x - y) = 11$$

$$\left[ \begin{array}{l} \{ x - 2y = 1 \\ \quad x - y = 11 \\ \{ x - 2y = 11 \\ \quad x - y = 1 \\ \{ x - 2y = -1 \\ \quad x - y = -11 \\ \{ x - 2y = -11 \\ \quad x - y = -1 \end{array} \right.$$

$$(21; 10), \quad (-9; -10), \quad (-21; -10), \quad (9; 10)$$

$$d = \sqrt{21^2 + 10^2} = \sqrt{541}$$

Ответ: №1.



- 13 Сумма корней уравнения  $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$  на промежутке  $(-1, 8\pi; 2, 5\pi)$  составляет
- 1  $\frac{3}{4}\pi$     2  $\frac{3}{8}\pi$     3  $\frac{3}{2}\pi$     4  $\frac{5}{4}\pi$     5 уравнение не имеет решений

Решение.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \log_{\cos x}(\sin x) + \frac{1}{\log_{\cos x}(\sin x)} = 2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \frac{(\log_{\cos x}(\sin x) - 1)^2}{\log_{\cos x}(\sin x)} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \sin x = \cos x \end{array} \right. , \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Корни удовлетворяющие условию задания:  $\frac{\pi}{4} - 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi$ .

Ответ: №1.



14 Произведение корней уравнения  $\cos(2 \operatorname{arctg} x) = 0$  равно

1 -1

2  $-\frac{1}{2}$

3 0

4 1

5  $\frac{1}{2}$

Решение.

$$2 \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} \text{ или } \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$$

$$x = \pm 1$$

Ответ: №1.

15 Все решения неравенства  $\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} \geq \log_2(x^2 - 4x + 68)$  принадлежат промежутку

1  $(-7; 3)$

2  $(3; 11)$

3  $\emptyset$

4  $(7; 11)$

5  $(-7; 0)$

Решение.

$$y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$$

$$y = \log_2(x^2 - 4x + 68)$$

Найдем область значений функции  $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$  с использованием производной.  $y \in [\sqrt{18}; 6]$ .

$$y = \log_2((x-2)^2 + 64), \quad y \in [6; +\infty)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} = 2 \\ \log_2(x^2 - 4x + 68) = 2 \end{cases}$$

$$x = 2$$

Ответ: №1.

16

Для заполнения бассейна используют 2 насоса. Известно, что если включить первый на 3 ч, а затем только второй на 4 ч, бассейн будет заполнен не меньше чем на 50% и не более чем на 80%. Если включить первый на 2 ч, затем только второй на 6 ч бассейн будет наполнен не меньше чем на 55% и не больше чем на 70%. Все возможные значения процента заполнения бассейна после работы первого насоса в течении 1 ч образуют множество

- 1 [10%; 28%]   2 [8%; 20%]   3 [2%; 26%]   4 [1%; 10%]   5 [1%; 25%]

Решение.

$x$  – производительность 1 – го насоса

$y$  – производительность 2 – го насоса

$V$  – объем бассейна.

$$\begin{cases} 0,5V \leq 3x + 4y \leq 0,8V \\ 0,55V \leq 2x + 6y \leq 0,7V \end{cases} \quad \begin{cases} 1,5V \leq 9x + 12y \leq 2,4V \\ 1,4V \geq 4x + 12y \geq 1,1V \end{cases} \text{ " - "}$$

$$0,1V \leq 5x \leq 1,3V$$

$$0,02V \leq x \leq 0,26V.$$

Ответ: №3.

- 16** Для заполнения бассейна используют 2 насоса. Известно, что если включить первый на 3 ч, а затем только второй на 4 ч, бассейн будет заполнен не меньше чем на 50% и не более чем на 80%. Если включить первый на 2 ч, затем только второй на 6 ч бассейн будет наполнен не меньше чем на 55% и не больше чем на 70%. Все возможные значения процента заполнения бассейна после работы первого насоса в течении 1 ч образуют множество
- 1** [10%; 28%]   **2** [8%; 20%]   **3** [2%; 26%]   **4** [1%; 10%]   **5** [1%; 25%]

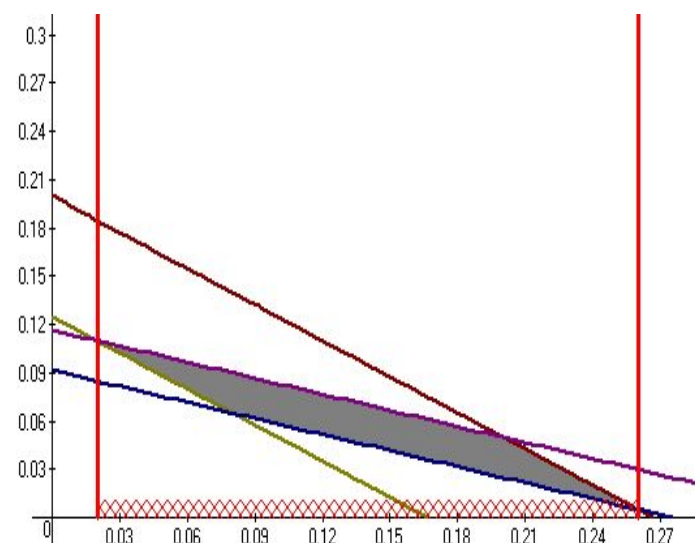
Решение. (2 способ)

$x$  – производительность 1 – го насоса  
 $y$  – производительность 2 – го насоса

Пусть  $V$  – объем бассейна.

$$\begin{cases} 0,5 \leq 3x + 4y \leq 0,8 \\ 0,55 \leq 2x + 6y \leq 0,7 \end{cases}$$

Построим область удовлетворяющую системе неравенств. Спроецируем полученную область на ось абсцисс.



Ответ: №3.



17 В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром, равным  $\sqrt{3}$ , расстояние от точки  $B_1$  до плоскости  $A_1 C_1 D$  составляет

1 1

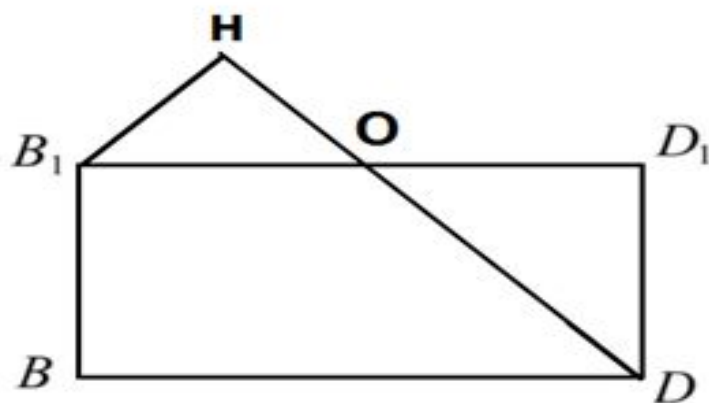
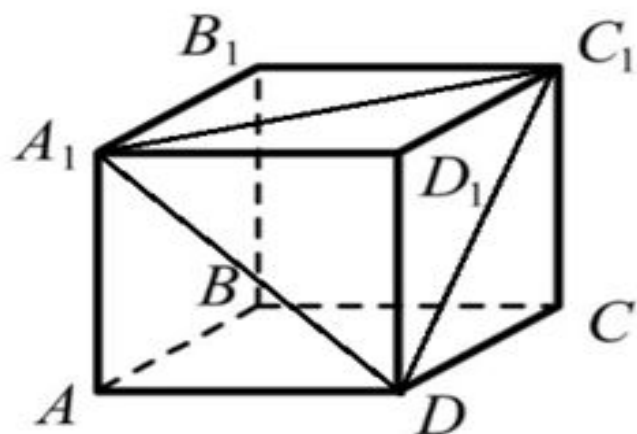
2 2

3 3

4  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение.



$O$  – середина  $A_1 C_1$ ,  $B_1 H$  – перпендикуляр к  $OD$ .  $\Delta B_1 H O$  подобен  $\Delta D D_1 O$ .

Пусть  $B_1 B = a$ , тогда  $B_1 D_1 = a\sqrt{2}$ ,  $DO = a\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\frac{B_1 H}{D D_1} = \frac{B_1 O}{O D}, \quad B_1 H = \frac{B_1 O}{O D} \cdot D D_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} = 1$$

Ответ: №1.

- 18 Количество целых  $a$  из промежутка  $(-5; 6)$ , при которых уравнение  $a \cdot 2^x + 2^{-x} = 4$  имеет два решения, равно
- 1       2       3       4       5

Решение.

$$2^x = t > 0$$

$$a \cdot t^2 - 4t + 1 = 0$$

Чтобы исходное уравнение имело два решения, надо:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{a} > 0, \quad a \in (0; 4) \\ t_1 + t_2 = \frac{4}{a} > 0 \end{cases}$$

Ответ: №3

|    |  |                               |                               |                               |                               |
|----|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 19 | Сумма                                  | всех                          | целочисленных                 | решений                       | неравенства                   |
|    | $(x^2 - 4)(x - 6)(x - 10) < 105$ равна |                               |                               |                               |                               |
|    | <input type="checkbox"/> 1 40          | <input type="checkbox"/> 2 10 | <input type="checkbox"/> 3 21 | <input type="checkbox"/> 4 30 | <input type="checkbox"/> 5 35 |

Решение.  $(x - 2)(x + 2)(x - 6)(x - 10) < 105$

$$((x - 2)(x - 6))((x + 2)(x - 10)) < 105$$

$$(x^2 - 8x + 12)(x^2 - 8x - 20) < 105$$

Пусть  $x^2 - 8x = t, t^2 - 8t - 345 < 0, t \in (-15; 23)$

$$\begin{cases} x^2 - 8x > -15 \\ x^2 - 8x < 23 \end{cases}$$

$$4 - \sqrt{39} < x < 3 \quad 5 < x < 4 + \sqrt{39}$$

Целые решения неравенства:  $-2, -1, 0, 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10$

Ответ: №1.



20 Число корней уравнения  $\cos^2 x - (x^2 - 1) \sin x + x^2 = 1$  на отрезке  $[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$  равно

1 4     
 2 2     
 3 1     
 4 5     
 5 3

Решение.

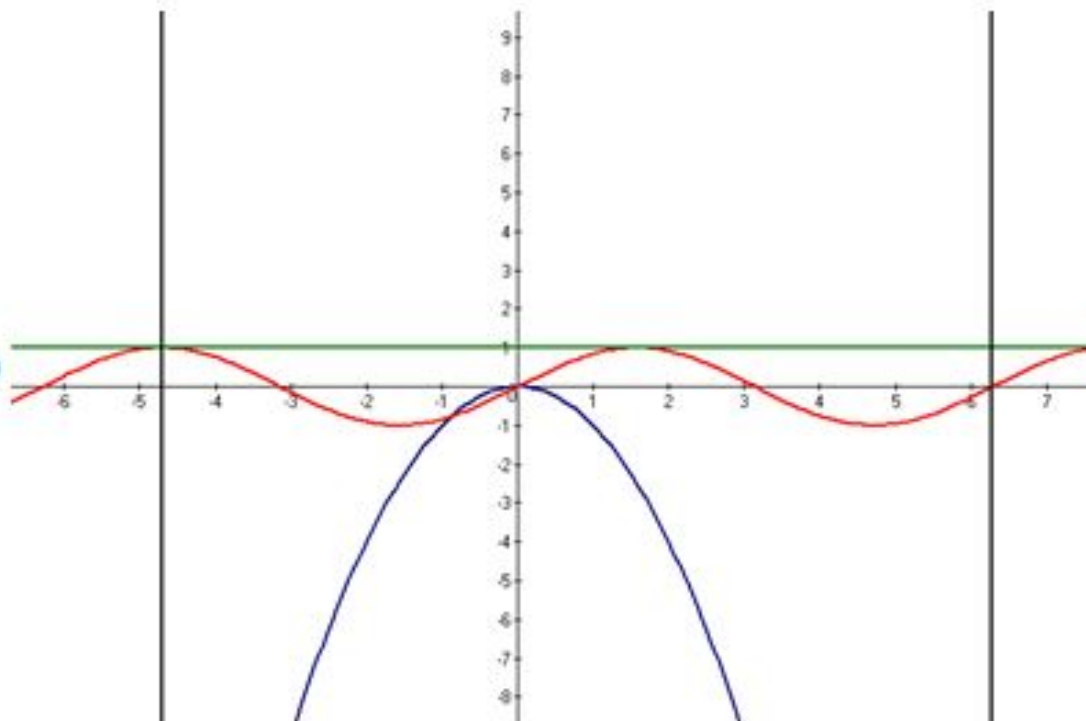
$$\sin^2 x + (x^2 - 1) \sin x - x^2 = 0$$

$$\sin^2 x + x^2 \cdot \sin x - \sin x - x^2 = 0$$

$$\sin x(\sin x + x^2) - (\sin x + x^2) = 0$$

$$(\sin x + x^2)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 1, \quad \sin x = -x^2$$



Ответ: №1

21

Наименьшим положительным корнем уравнения  $4 \sin x \cdot \cos x = 1 + 3 \sin^2 x$  является

- 1  $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$     2  $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$     3  $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$     4  $\operatorname{arctg} 6$     5  $\arcsin \frac{6}{\sqrt{37}}$

Решение.

$$4 \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x + 3 \sin^2 x,$$

$$4 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0, \quad (2 \operatorname{tg} x - 1)^2 = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, \text{ наименьший корень уравнения } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ответ: №1

22

Наибольший из корней уравнения  $\frac{4x}{6-x-x^2} - \frac{3x}{6-2x-x^2} + 1 = 0$  принадлежит промежутку

1 (1; 10)

2 (8; 12)

3 (3; 7)

4 ( $\pi$ ; 10)

5 (-5; 0)

Решение.

$$\frac{4}{\frac{6}{x} - 1 - x} - \frac{3}{\frac{6}{x} - 2 - x} + 1 = 0$$

Пусть  $\frac{6}{x} - 1 - x = t$ , тогда  $\frac{4}{t} - \frac{3}{t-1} + 1 = 0$ ;  $\frac{t^2-4}{t(t-1)} = 0$ ;  $t = 2$ ,  $t = -2$

$$\frac{6}{x} - 1 - x = 2, \quad \frac{6}{x} - 1 - x = -2$$

$$\frac{6-3x-x^2}{x} = 0, \quad \frac{6+x-x^2}{x}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 3$$

Наибольший корень  $x_4 = 3$

Ответ: №1.

23

Решить неравенство  $4x - 5 > \sqrt{1 + x(x + 2)} + \sqrt{-3x^2 + 6x + 24}$ 

- 1  $\left(\frac{7 + \sqrt{33}}{4}; 4\right]$ 
 2  $(3; 4]$ 
 3  $\left(\frac{5}{4}; 2\right]$ 
 4  $\left(\frac{4 + \sqrt{33}}{4}; 4\right]$ 
 5  $(-2; 4]$

Решение.

$$4x - 5 > |x + 1| + \sqrt{-3x^2 + 6x + 24}$$

$$\begin{cases} -3x^2 + 6x + 24 \geq 0 \\ 4x - 5 > 0 \end{cases}, \begin{cases} x \in [-2; 4] \\ x > 1,25 \end{cases}$$

$x \in (1,25; 4]$ , тогда  $|x + 1| = x + 1$ ,  $3x - 6 > \sqrt{-3x^2 + 6x + 24}$

$$\begin{cases} x > 2 \\ (3x - 6)^2 > -3x^2 + 6x + 24, \\ x \in (1,25; 4] \end{cases}, \begin{cases} x \in (2; 4] \\ 2x^2 - 7x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (2; 4] \\ x \in \left(-\infty; \frac{7 - \sqrt{33}}{4}\right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{33}}{4}; +\infty\right), \end{cases} \left(\frac{7 + \sqrt{33}}{4}; 4\right]$$

Ответ: №1.

24

Множеством значений функции  $f(x) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}(\sqrt{5-4x-x^2}-1)^2\right)$  является

- 1  $[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1]$   
  2  $[-1; 0]$   
  3  $[-1; -\frac{1}{2}]$   
  4  $[-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$   
  5  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

Решение.

Оценим выражение, находящееся под знаком синуса.

$$\sqrt{5-4x-x^2} = \sqrt{9-(x+2)^2}$$

$$0 \leq \sqrt{9-(x+2)^2} \leq 3, \quad -1 \leq \sqrt{9-(x+2)^2} - 1 \leq 2,$$

$$0 \leq \left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2 \leq 4, \quad -\frac{4\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{3} \left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2 \leq 0$$

$$0 \leq \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2 \leq \frac{4\pi}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2\right) \leq 1$$

Ответ: №1.



25

При условии ежегодного начисления дохода сумма пенсионного вклада Марьи Ивановны в банке за второй год хранения увеличилась на 1600 руб, а за четвертый год — на 3600 руб. На сколько рублей увеличится вклад пенсионерки за пятый год?

1 7680

2 4320

3 8533,(3)

4 6860

5 5400

Решение.

Пусть  $V$  — вклад,  $q$  — во сколько раз банк увеличивает вклад в год.

$$\begin{cases} Vq^2 - Vq = 1600 \\ Vq^4 - Vq^3 = 3600, \\ Vq^5 - Vq^4 = ? \end{cases} \quad \begin{cases} Vq(q - 1) = 1600 \\ Vq^3(q - 1) = 3600 \\ Vq^5 - Vq^4 = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^2 = \frac{3600}{1600} \\ Vq^5 - Vq^4 = ? \end{cases}$$

$$Vq^5 - Vq^4 = qVq^3(q - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3600 = 5400$$

Ответ: №5.

- 26 Многочлен  $P(x)$  при делении на  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$  дает в остатке  $x^2 + x + 1$ .  
Найти  $P(-3) - P(2) + P(-1)$
- 1       2       3       4       5

Решение.

$$P(x) = f(x) \cdot (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) + x^2 + x + 1$$

Нетрудно заметить, что  $-3, -1, 2$  являются нулями функции

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$\text{Тогда } P(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1 = 7$$

$$P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$$

$$P(2) = (2)^2 + (2) + 1 = 7$$

$$P(-3) - P(2) + P(-1) = 7 - 7 + 1 = 1$$

Ответ: №1.



27 Найдите сумму всех целых значений параметра  $a$ , при которых графики функций  $y = 2|x + 1| + |x - 4|$  и  $y = 2|x - 3| + x + a$  пересекаются ровно 3 раза.

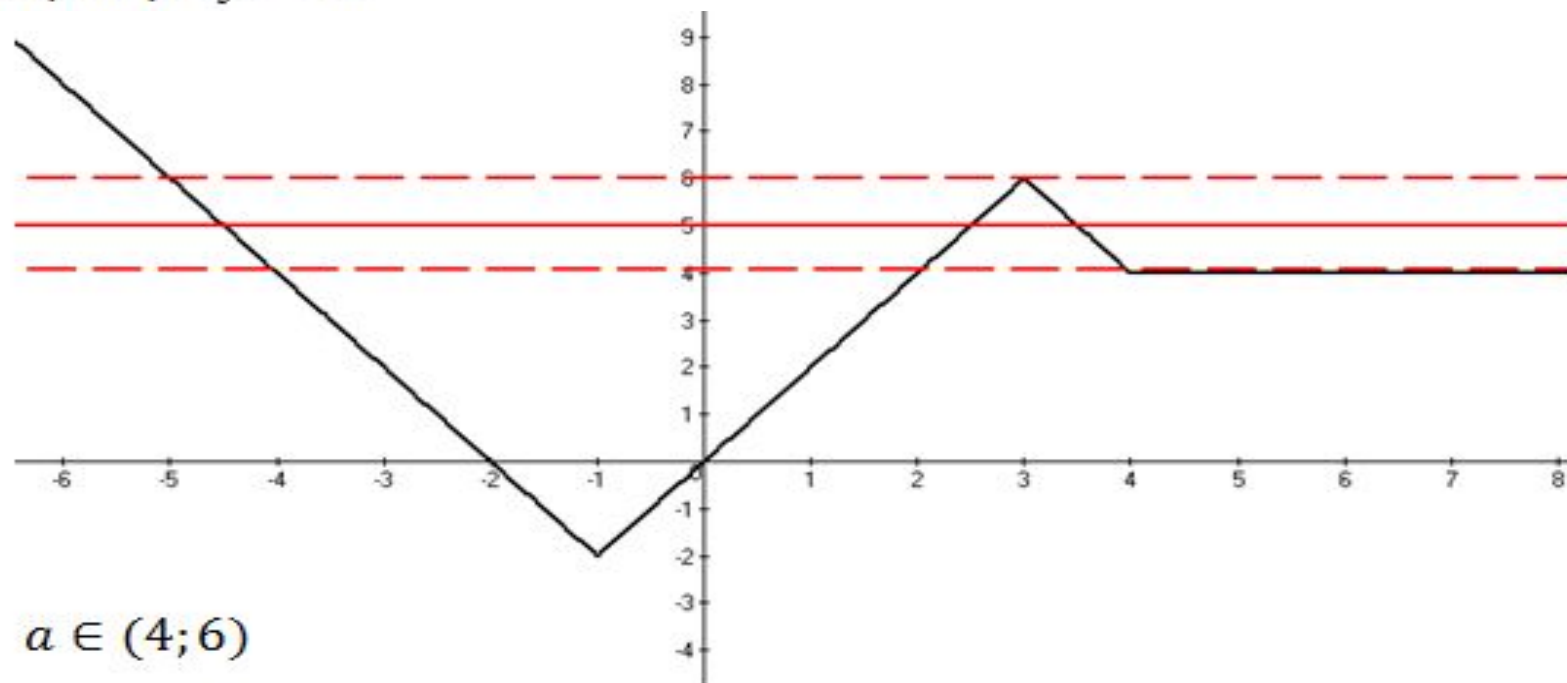
- 1 5     2 15     3 10     4 3     5 таких  $a$  не существует

Решение.  $2|x + 1| + |x - 4| = 2|x - 3| + x + a$

$$2|x + 1| + |x - 4| - 2|x - 3| - x = a$$

Построим график функции  $y = 2|x + 1| + |x - 4| - 2|x - 3| - x$

И прямую  $y = a$



$$a \in (4; 6)$$

Ответ: №1.

**28** Автолюбитель, желая за 4 года накопить средства на покупку кабриолета, разместил в паевом инвестиционном фонде вклад в размере 40 тыс. рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трех лет будущий владелец авто после начисления ему фондом процентов наметил дополнительно вносить на счет одну и ту же фиксированную сумму, такую, чтобы окончательный размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 620,703125%. Какую сумму (в тыс. руб.) необходимо ежегодно добавлять к вкладу?

1 40

2 140

3 50

4 80

5 75,5

Решение.

Пусть  $x$  — необходимо ежегодно добавлять к вкладу.

$$\left( (40 \cdot 1,25 + x) \cdot 1,25 + x \right) \cdot 1,25 + x = 40 \cdot 7,20703125$$

$$x = 40$$

Ответ: №1.

29 Сумма всех целых положительных  $a$ , для которых выполняется условие

$$4\pi \leq \int_3^{a+3} \sqrt{a^2 - 9 - x^2 + 6x} dx \leq 16\pi \text{ равна}$$

1 30

2 140

3 9

4 120

5 1147

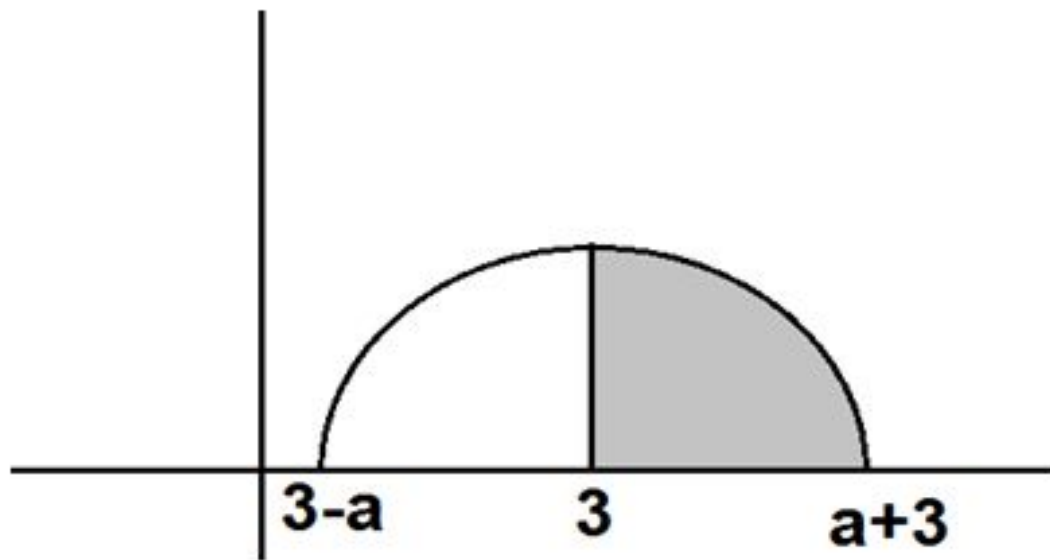
Решение.

Воспользуемся геометрическим смыслом определенного интеграла.

$$\int_3^{a+3} \sqrt{a^2 - (3-x)^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2$$

$$4\pi \leq \frac{1}{4} \pi a^2 \leq 16\pi$$

$$16 \leq a^2 \leq 64$$



$a \in [4; 8]$ , т.к.  $a$  принимает только положительные, то

сумма целых значений равна 30.

Ответ: №1.

30 Небольшая мебельная фирма производит книжные шкафы и серванты. На изготовление одного книжного шкафа расходуется  $\frac{2}{3}$  м<sup>2</sup> древесно-стружечной плиты, 4 м<sup>2</sup> сосновой доски и 1 человеко-часа рабочего времени. Аналогичные данные для серванта даются числами: 1 м<sup>2</sup> древесно-стружечной плиты; 4,5 м<sup>2</sup> сосновой доски и 3 человеко-часа. Прибыль от реализации одного книжного шкафа составляет 600 руб., а серванта — 1600 руб. В течение одного месяца в распоряжении фирмы имеются: 100 м<sup>2</sup> древесно-стружечной плиты, 540 м<sup>2</sup> сосновых досок и 270 человеко-часов рабочего времени. Какова максимальная ожидаемая месячная прибыль?

1 118000 руб.

2 147600 руб.

3 112000 руб.

4 162000 руб.

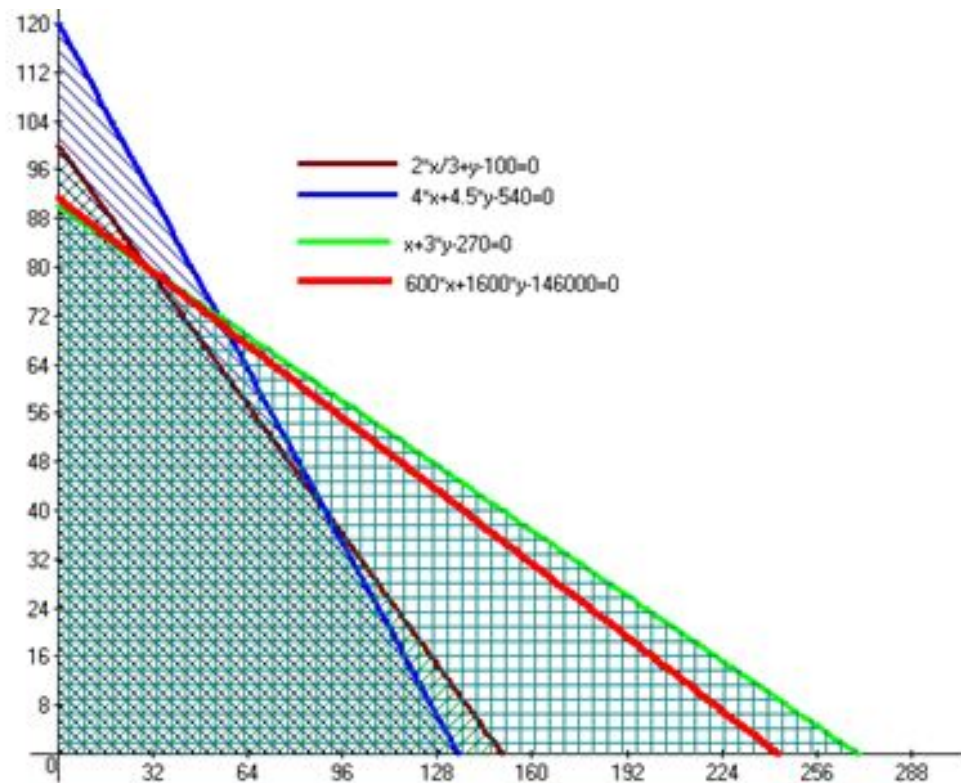
5 146000 руб.

Решение. Составим таблицу.

|         | ДСП                          | Сосновые<br>доски  | Человеко-<br>часы | прибыль | количество |
|---------|------------------------------|--------------------|-------------------|---------|------------|
| шкаф    | $\frac{2}{3}$ м <sup>2</sup> | 4 м <sup>2</sup>   | 1                 | 600     | $x$        |
| сервант | 1 м <sup>2</sup>             | 4,5 м <sup>2</sup> | 3                 | 1600    | $y$        |

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y \leq 100 \\ 4x + \frac{9}{2}y \leq 540 \\ x + 3y \leq 270 \\ 600x + 1600y = a \rightarrow \max, \end{cases}$$





Предельное положение прямой  $y = -\frac{3}{8}x + \frac{a}{1600}$  в области при  $a \rightarrow \max$ , если она пройдет через точку пересечения «зеленой» и «коричневой» прямых. Найдем точку их пересечения, для этого решим систему:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 100 \\ x + 3y = 270 \end{cases}, x = 30, y = 80$$

$$600x + 1600y = 600 \cdot 30 + 1600 \cdot 80 = 146000$$

Ответ: №5.

## **Иванов Анатолий Прокопьевич**

Профессор, Заведующий кафедрой Высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

Ординарный профессор



## **Морозова Алена Витальевна**

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ



## **Морозов Евгений Анатольевич**

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ



## **Новоселов Антон Вячеславович**

Специалист по учебно-методической работе Факультета довузовской подготовки  
НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

