

Типовые дискретные последовательности

Рассмотрим некоторые широко используемые в теории цифровой обработки сигналов последовательности.

Сдвиг последовательности $x(nT)$ по оси nT : последовательность $y(nT) = x(nT - kT)$ образуется при сдвиге последовательности $x(nT)$ на k отсчетов вправо (при $k > 0$) или влево (при $k < 0$).

Пример 1.2. На рис. 1.3, *а* изображена последовательность $x(nT) = \{3, 2, 1, 1, 1\}$, т. е. $x(0) = 3$, $x(T) = 2$, $x(2T) = 1$, $x(3T) = 1$, $x(4T) = 1$, а на рис. 1.2, *б, в* показаны соответственно последовательности $y_1(nT) = x(nT - 2T)$ и $y_2(nT) = x(nT + 2T)$.

Дискретная дельта-функция (единичный импульс) определяется соотношением

$$\delta(nT - kT) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq k, \\ 1 & \text{при } n = k. \end{cases}$$

Эта функция — δ -функция — изображена на рис. 1.4, *а*.

Аналитическая запись последовательности. Из определения дискретной δ -функции следует, что любая последовательность $x(nT)$ может быть записана в виде

$$x(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(nT - kT), \quad (1.2)$$

так как все члены суммы при $k \neq n$ равны нулю.

Типовые дискретные последовательности

Пример 1.3. Последовательность, изображенная на рис. 1.3, *a* может быть представлена в виде $x(nT) = 3\tilde{\delta}(nT) + 2\tilde{\delta}(nT - T) + \tilde{\delta}(nT - 2T) + \tilde{\delta}(nT - 3T) + \tilde{\delta}(nT - 4T)$.

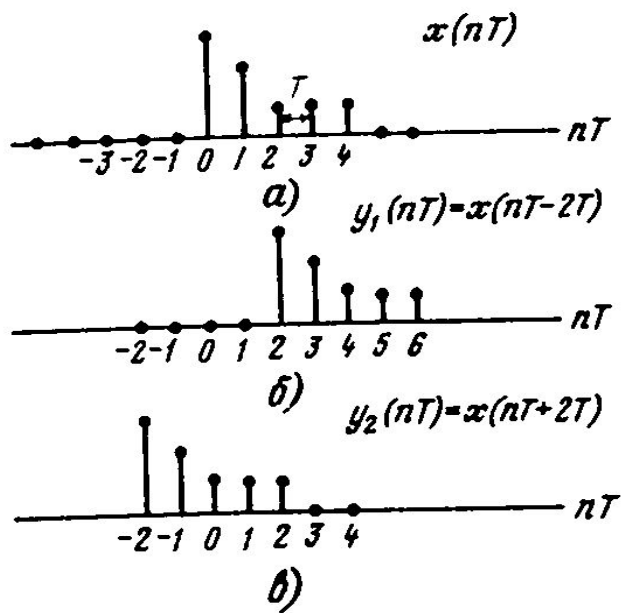


Рис. 1.3

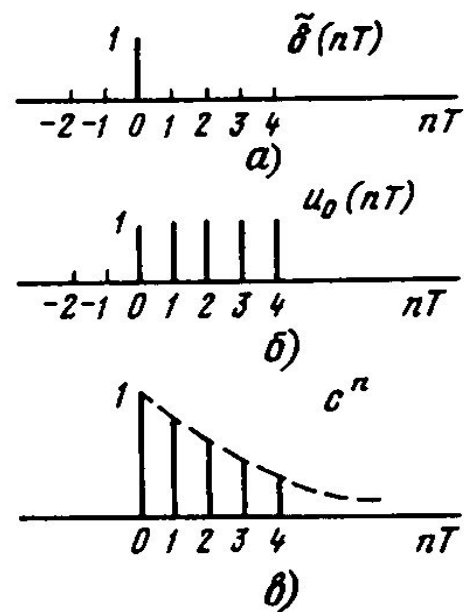


Рис. 1.4

Типовые дискретные последовательности

Единичная последовательность определяется соотношением

$$u_0(nT - kT) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < k, \\ 1 & \text{при } n \geq k. \end{cases}$$

На рис. 1.4, б показана последовательность $u_0(nT)$. Заметим, что единичный импульс $\delta(nT)$ связан с единичной последовательностью $u(nT)$ очевидными соотношениями:

$$\delta(nT) = u_0(nT) - u_0(nT - T),$$

$$u_0(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(nT - kT).$$

Экспоненциальная последовательность определяется соотношением $x(nT) = e^{\alpha nT}$, где в общем случае $\alpha = \sigma + j\omega$ — комплексное число. При $\omega = 0$ $\alpha = \sigma$ — вещественное и $x(nT) = e^{\sigma nT} = c^n$ — вещественная степенная последовательность. На рис. 1.4, в приведено изображение последовательности $x(nT) = c^n u_0(nT)$, где $c < 1$.

Периодической называют последовательность $x(nT)$, удовлетворяющую условию $x(nT) = x(nT + mNT)$, где m и N — целые числа, $m = 1, 2, \dots$; NT (или N) — период последовательности. Периодическую последовательность достаточно задать на интервале одного периода, например при $0 \leq n \leq N - 1$.

Пример 1.4. На рис. 1.5, а изображена периодическая последовательность $x(nT) = \{1, 1, 0, 0\}$ с периодом $N = 4$. На рис. 1.5, б показана та же периодическая последовательность, но сдвинутая на два отсчета влево, т. е. последовательность $x(nT - kT)$ при $k = -2$: $x(nT + 2T) = \{0, 0, 1, 1\}$.

Спектр дискретного сигнала

Пара преобразований Фурье для дискретного сигнала определяется соотношениями [2-29стр., 2-184 стр.]:

$$x(n\Delta t) = x(n) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} X(e^{j\omega\Delta t}) e^{j\omega n\Delta t} d\omega$$

$$X(e^{j\omega\Delta t}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t) e^{-j\omega n\Delta t}$$

Дискретное преобразование Фурье.

Большинством методов расчета оценок спектральных характеристик сигналов основаны на использовании дискретного преобразования Фурье (ДПФ) или его эквивалентной модификации быстрого преобразования Фурье (БПФ). Для периодического цифрового сигнала $x(n)$ с периодом N

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = \overline{0, N-1} \quad (17)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = \overline{0, N-1} \quad (18)$$

Дискретное преобразование Фурье.

Соотношение (18) называется прямым ДПФ, а соотношение (17) обратным ДПФ.

На практике вместо алгоритма вычисления ДПФ часто используют алгоритм *быстрого вычисления ДПФ*, называемый БПФ который содержится в большинстве библиотек и пакетов ЦОС. Выходной результат алгоритма БПФ в точности совпадает с выходным результатом обычного алгоритма ДПФ, однако схема вычислений алгоритма БПФ значительно более эффективна и обеспечивает существенное сокращение времени вычислений.

Оценки спектров случайных стационарных сигналов.

$$G(f_k) = G(\omega_k) = G(k) = \frac{1}{M} |X(k)|^2, \quad k = \overline{0, N-1},$$
$$G(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G^i(k), \quad k = \overline{0, N-1}$$

Оценки спектров случайных стационарных сигналов.

$$G(f_k) = G(\omega_k) = G(k) = \sum_{r=0}^{N-1} R_x(r) e^{-j2\pi rk/N}, \quad k = \overline{0, N-1},$$
$$R_x(r\Delta t) = R_x(r) = \frac{1}{N-r} \sum_{n=0}^{N-r-1} x(n)x(n+r), \quad r = \overline{0, p},$$