Типовые дискретные последовательности

Рассмотрим некоторые широко используемые в теории цифровой обработки сигналов последовательности.

Сдвиг последовательности $x(nT)$ по оси nT: последовательность $y(nT)=x(nT-kT)$ образуется при сдвиге последовательности $x(nT)$ на k отсчетов вправо (при $k>0$) или влево (при $k<0$).

Пример 1.2. На рис. 1.3,*а* изображена последовательность $x(nT)=\{3, 2, 1, 1, 1\}$, т. е. $x(0)=3$, $x(T)=2$, $x(2T)=1$, $x(3T)=1$, $x(4T)=1$, а на рис. 1.2,*б*, *в* показаны соответственно последовательности $y_1(nT)=x(nT-2T)$ и $y_2(nT)=x(nT+2T)$.

Дискретная дельта-функция (единичный импульс) определяется соотношением

$$\delta(nT-kT)=\begin{cases} 0 \text{ при } n\neq k, \\ 1 \text{ при } n=k. \end{cases}$$

Эта функция — $\tilde{\delta}$-функция — изображена на рис. 1.4,*а*.

Аналитическая запись последовательности. Из определения дискретной $\tilde{\delta}$-функции следует, что любая последовательность $x(nT)$ может быть записана в виде

$$x(nT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\tilde{\delta}(nT-kT), \tag{1.2}$$

так как все члены суммы при $k\neq n$ равны нулю.

Типовые дискретные последовательности

Пример 1.3. Последовательность, изображенная на рис. 1.3, *а* может быть представлена в виде $x(nT)=3\tilde{\delta}(nT)+2\tilde{\delta}(nT-T)+\tilde{\delta}(nT-2T)+\tilde{\delta}(nT-3T)+$ $+\tilde{\delta}(nT-4T)$.

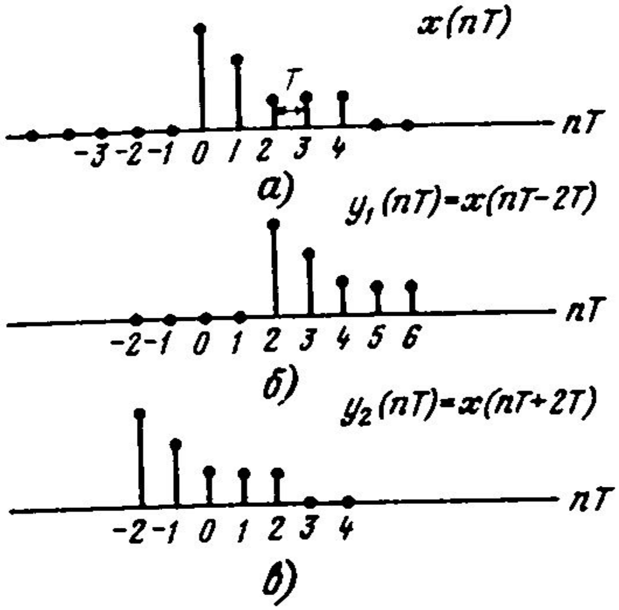

Рис. 1.3

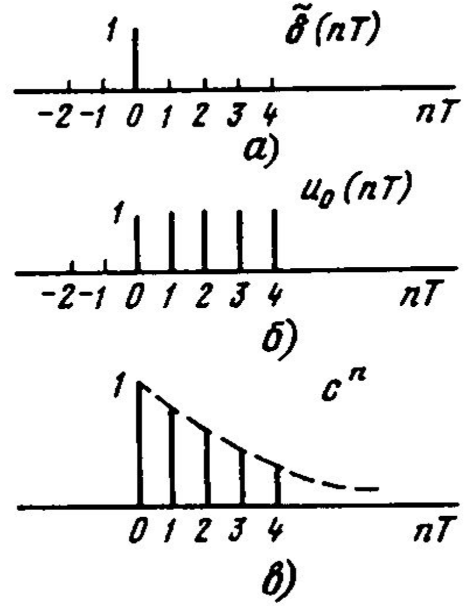

Рис. 1.4

Типовые дискретные последовательности

Единичная последовательность определяется соотношением

$$u_0(nT-kT)=\begin{cases}0 & \text{при } n<k,\\ 1 & \text{при } n\geqslant k.\end{cases}$$

На рис. 1.4, *б* показана последовательность $u_0(nT)$. Заметим, что единичный импульс $\delta(nT)$ связан с единичной последовательностью $u(nT)$ очевидными соотношениями:

$$\delta(nT)=u_0(nT)-u_0(nT-T),$$

$$u_0(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(nT-kT).$$

Экспоненциальная последовательность определяется соотношением $x(nT)=e^{\alpha nT}$, где в общем случае $\alpha=\sigma+j\omega$ — комплексное число. При $\omega=0$ $\alpha=\sigma$ — вещественное и $x(nT)=e^{\sigma nT}=c^n$ — вещественная степенна́я последовательность. На рис. 1.4, *в* приведено изображение последовательности $x(nT)=c^n u_0(nT)$, где $c<1$.

Периодической называют последовательность $x(nT)$, удовлетворяющую условию $x(nT)=x(nT+mNT)$, где m и N — целые числа, $m=1, 2, \ldots$; NT (или N) — период последовательности. Периодическую последовательность достаточно задать на интервале одного периода, например при $0\leqslant n\leqslant N-1$.

Пример 1.4. На рис. 1.5, *а* изображена периодическая последовательность $x(nT)=\{1, 1, 0, 0\}$ с периодом $N=4$. На рис. 1.5, *б* показана та же периодическая последовательность, но сдвинутая на два отсчета влево, т. е. последовательность $x(nT-kT)$ при $k=-2$: $x(nT+2T)=\{0, 0, 1, 1\}$.

Спектр дискретного сигнала

Пара преобразований Фурье для дискретного сигнала определяется соотношениями [2-29стр., 2-184 стр.]:

$$x(n\Delta t) = x(n) = \frac{\Delta t}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} X\left(e^{j\omega\Delta t}\right)e^{j\omega n\Delta t}\,d\omega$$

$$X\left(e^{j\omega\Delta t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t)e^{-j\omega n\Delta t}$$

Дискретное преобразование Фурье.

Большинствометодов расчета оценок спектральных характеристик сигналов основаны на использовании *дискретного преобразования Фурье(ДПФ)* или его эквивалентной модификации *быстрого преобразования Фурье(БПФ)*. Для периодического цифрового сигнала $x(n)$ с периодом N

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = \overline{0, N-1} \qquad (17)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = \overline{0, N-1} \qquad (18)$$

Дискретное преобразование Фурье.

Соотношение (18) называется прямым ДПФ, а соотношение (17) обратным ДПФ.

На практике вместо алгоритма вычисления ДПФ часто используют алгоритм *быстрого вычисления ДПФ*, называемый БПФ который содержится в большинстве библиотек и пакетов ЦОС. Выходной результат алгоритмаБПФ в точности совпадает с выходным результатом обычного алгоритма ДПФ, однако схема вычислений алгоритма БПФ значительно более эффективна и обеспечивает существенное сокращение времени вычислений.

Оценки спектров случайных стационарных сигналов.

$$G(f_k) = G(\omega_k) = G_i(k) = \frac{1}{N}|X(k)|^2, \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$G(k) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} G_i(k), \quad k = \overline{0, N-1}$$

Оценки спектров случайных стационарных сигналов.

$$G(f_k) = G(\omega_k) = G(k) = \sum_{N-r-1}^{N-1} R_x(r) e^{-j2\pi rk/N}, \quad k = \overline{0, N-1,}$$

$$R_x(r\Delta t) = R_x(r) = \frac{1}{N-r} \sum_{n=0}^{N-r-1} x(n) x(n+r), \quad r = \overline{0, p,}$$