

Селинкар по ДУ и интегральным
уравнениям. от 3103 2020 для 08.04.2020

Отметим, что разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье — это на самом деле разложение её по ортонормальной системе ф-ции $\{\cos nx; \sin nx\}_{n=0}^{\infty}$ относительно скалярного произведения в $L_2[-\pi; \pi]$ $(f; g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$
Формула для вычисления коэффициентов $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, так проста. Ввиду ортонормальности этой системы. Оказывается это допускает обобщение.

Последовательность $\{\cos(nt + \alpha(t)); \sin(nt + \alpha(t))\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $L_2[0, 2\pi]$, если

$$\frac{1}{4} < \frac{\alpha(2\pi) - \alpha(0)}{2\pi} < \frac{3}{4}, \text{ где любая } \alpha(t) \text{ — гладкая.}$$

$\alpha(t) \neq \text{const}$ ф-ция.

Это мой результат Барменко В. И. 1984г.

Семинар по ДУ и интегральным
уравнениям (от 31.03.2020) для 08.04.2020.
Комплексная форма ряда Фурье.

Это ряд по ортогональной системе

(1) $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ относительно скалярного произ-
ведения. $(f; g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq m \text{ это проверка} \\ 2\pi, & \text{при } n = m \text{ ортогональности.} \end{cases}$$

Разложить в ряд Фурье $f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$ по

$\{e^{inx}\}$ означает представление вида

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \text{ — это тригонометрический} \\ \text{ряд в комплексной форме,}$$

$$\text{где } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если имеется разложение $f(x)$ на $[-\pi; \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

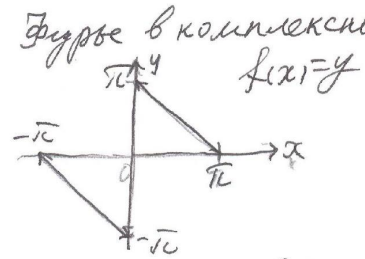
$$\text{где } c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad \frac{a_0}{2} \neq c_0, \quad \text{и } c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$\text{при } n \geq 1, \dots \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Можно перейти на $[-l; l]$, выбрав $\left\{ e^{\frac{i n \pi}{l} x} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Пример. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$



Решение. Можно представить функцию в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, \text{ где } C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-\pi - x) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(-\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \pi(-\pi) + \frac{-\pi^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right\} = 0$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-\pi - x) e^{-inx} dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} (\pi - x) e^{-inx} dx \right\} \ominus$$

Т.к

$$\int_{-\pi}^0 (-\pi - x) e^{-inx} dx = (-\pi - x) \cdot \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^0 e^{-inx} d(-\pi - x)$$

$$= \frac{\pi}{in} \cdot e^{in0} + \frac{1}{in} \cdot \left(- \left(\frac{e^{-inx}}{-in} \right) \Big|_{-\pi}^0 \right) = \text{Т.к } d(-\pi - x) = -dx.$$

$$= \frac{\pi}{in} + \frac{1}{(in)^2} (1 - e^{-inc\pi}) = \frac{\pi}{in} - \frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n)$$

$$\int_0^{\pi} (\pi-x) e^{-inx} dx = (\pi-x) \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{\pi} e^{-inx} d(\pi-x) =$$

$$= \frac{\pi}{in} + \frac{1}{in} \left(- \left(\frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_0^{\pi} \right) \right) = \frac{\pi}{in} + \frac{1}{(in)^2} (e^{-in\pi} - 1) =$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{in} - \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1). \text{ Значит,}$$

$$C_n \equiv \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{in} - \frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n) + \frac{\pi}{in} + \frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n) \right)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2\pi}{in} \right\} \Rightarrow \boxed{C_n = \frac{1}{in}} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{in} \cdot e^{inx} \quad \text{Ряд Фурье в комплексной форме.} \quad \boxed{C_n = \frac{1}{in}}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Сравним с обычным рядом Фурье. Т.к. $f(x)$ — нечетная ф-ция, то $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left((\pi-x) \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx d(\pi-x) \right) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{n} + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right\} \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}; \quad b_n = \frac{2}{n}, \quad a_n = 0$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx. \quad \underline{C_n} = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{0 - i \frac{2}{n}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{in}}}$$

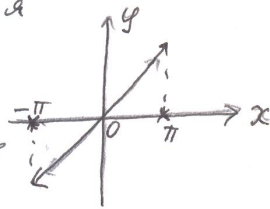
Связь комплексных C_n и a_n, b_n подтверждает правильность

Пример 1. Исходя из разложения

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}, \quad -\pi < x < \pi$$

Получить разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на $(-\pi; \pi)$.

Решение. Ряд хотя и не



сходится равномерно на $[-\pi; \pi]$ отрезке, но сходится в каждой точке $(-\pi; \pi)$

Интегрируя почленно на $(-\pi; \pi)$

$$\int x dx = \int 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} dx = 2 \int \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(-\frac{\cos kx}{k^2} \right) dx + \tilde{C}$$

$$\frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow x^2 = 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} + \tilde{C} - 2C_1$$

"C" - произвольна

Поскольку $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} =$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^2 \text{ можно вычислить непосредственно. Тогда } x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}$$

$$\text{Ответ: } x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2};$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме $f(x) = 1 - |x|$ на $(-1; 1)$.

Решение. При переходе рядов Фурье с $(-\pi; \pi)$ на $(-l; l)$ система $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ заменяется на $\left\{e^{\frac{i\pi n x}{l}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Поскольку $\int_{-l}^l e^{\frac{inx}{2}} \cdot e^{-\frac{imx}{2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2l, & n = m. \end{cases}$

Значит, коэффициенты C_n по системе

$$\left\{ e^{\frac{i\pi n x}{2}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}; \quad C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{i\pi n x}{2}} dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{i\pi n x}{2}}. \quad \text{Для } l=1, \quad C_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-\frac{i\pi n x}{2}} dx;$$

$$C_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-\frac{i\pi n x}{2}} dx. \quad \text{Для } f(x) = 1 - |x|.$$

$$C_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{-i\pi n x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 (1+x) e^{-i\pi n x} dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-x) e^{-i\pi n x} dx \right) \ominus$$

Суммаем аналогично $\int_{-1}^0 (1+x) e^{-i\pi n x} dx = (1+x) \frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n} \Big|_{-1}^0 +$

$$+ \frac{1}{i\pi n} \int_{-1}^0 e^{-i\pi n x} d(1+x) = 1 \cdot \frac{e^{-i\pi n \cdot 0}}{-i\pi n} + 0 + \frac{1}{i\pi n} \cdot \frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n} \Big|_{-1}^0 =$$

$$= -\frac{1}{i\pi n} + \frac{(1-(-1))^{2n}}{\pi^2 n^2}; \quad \frac{d(1-x) = -dx}{\uparrow}$$

$$\int_0^1 (1-x) e^{-i\pi n x} dx = (1-x) \frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n} \Big|_0^1 + \frac{1}{i\pi n} \int_0^1 e^{-i\pi n x} d(1-x) =$$

$$= \frac{1}{i\pi n} \left(-\frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{i\pi n} \left(-\frac{1}{i\pi n} - \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \right)$$

$$C_n = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{i\pi n} + \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{i\pi n} + \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} \right)$$

$$C_n = \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 \cdot n^2}; 1 - |x| = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} e^{i\pi n x} + \frac{1}{2};$$

$$n=0. C_0 = \frac{a_0}{2}; a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 (1-x) dx = 2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow$$

$C_0 = \frac{1}{2}$ Проверка. Представим

четную ф-цию $f(x) = 1 - |x|$

обобщенным рядом Фурье, т.е. по

системе $\{ \cos nx; \sin nx \}_{n=0}^{\infty} \Rightarrow \underline{b_n = 0}, n = 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 (1-x) \cos \pi n x dx = 2 \left((1-x) \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \sin \pi n x \cdot d(1-x) \right) = 2 \left(\frac{1}{\pi n} \cdot \left(-\frac{\cos \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 \right) \right) =$$

$$d(1-x) = -dx = \frac{2 \cdot 1}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} \cdot (1 - (-1)^n), b_n = 0. \text{ Соотношение}$$

$$a_0 = 1. C_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) - i \cdot 0 =$$

$$= \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 \cdot n^2} \text{ выполнено! } 2$$

$$1 - |x| = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} e^{i\pi n x}, x \in (-1; 1)$$

Ответ.

Ряд Фурье в комплексной форме.

$$1 - |x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (1 - (-1)^n)}{\pi^2 n^2} \cdot \cos \pi n x.$$

Ряд Фурье по $\{ \cos \pi n x; \sin \pi n x \}$
 $n = 0, 1, \dots$