~~От~~ Семинар по ДУ и интегральным уравнениям. от 31.03.2020 для 08.04.2020 г

Отметим, что разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье — это на самом деле разложение её по <u>ортогональной</u> системе ф-ций $\{\cos nx\ ;\ \sin nx\}_{n=0}^{\infty}$ относительно скалярного произведения в $L_2[-\pi;\pi]$ $(f;g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$

Формулы для вычисления коэффициентов $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, так просты ввиду ортогональности этой системы. Оказывается это допускает обобщение.

Последовательность $\{\cos(nt+\alpha(t))\ ;\ \sin(nt+\alpha(t))\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $L_2[0,2\pi]$, если

$\frac{1}{4}<\frac{\alpha(2\pi)-\alpha(0)}{2\pi}<\frac{3}{4}$. для любой $\alpha(t)$ — гладкой. $\alpha(t)\not\equiv const$ ф-ции.

Это мой результат Барменков А.Н. в 1984 г.

Семинар по ДУ и интегральным уравнениям (от 31.03.2020) для 08.04.2020.

Комплексная форма ряда Фурье.

Это ряд по ортогональной системе

(1) $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ относительно скалярного произведения. $(f;g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{при } n\neq m \\ 2\pi, & \text{при } n=m \end{cases}$ это проверка ортогональности.

Разложить в ряд Фурье $f(x)$ $x\in[-\pi;\pi]$ по $\{e^{inx}\}$ означает представление вида

$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ — это тригонометрический ряд в комплексной форме,

где $C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$

Если имеется разложение $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$

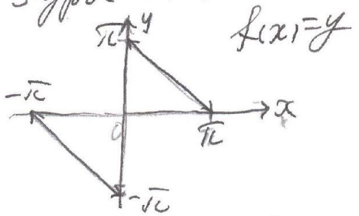
$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$,

где $C_0=\frac{a_0}{2}$; $\cancel{\frac{a_0}{2}=C_0}$, и $C_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$

при $n\geq 1$, .. $C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$

Можно перейти на $[-l;l]$, выбрав $\left\{e^{\frac{in\pi}{l}\cdot x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Пример. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме.



$$f(x)=\begin{cases} -\pi-x, & -\pi<x<0 \\ \pi-x, & 0<x<\pi \end{cases}$$

Решение. Нужно представить ф-цию в виде

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, \text{ где } \quad C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx. \quad , n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-\pi-x)\,dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\left(-\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\pi(-\pi)+\frac{(-\pi)^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right\}=0$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-\pi-x)e^{-inx}\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)e^{-inx}\,dx\right\} \ominus$$

Т.к

$$\int_{-\pi}^{0}(-\pi-x)e^{-inx}\,dx=(-\pi-x)\cdot\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{0}e^{-inx}\,d(-\pi-x)$$

$$=\frac{\pi}{in}\cdot e^{in0}+\frac{1}{in}\cdot\left(-\left(+\frac{e^{-inx}}{-in}\right)\right)\Big|_{-\pi}^{0}=$$

Т.к $d(-\pi-x)=$ $=-dx.$

$$=\frac{\pi}{in}+\frac{1}{(in)^2}\left(1-e^{-in(-\pi)}\right)=\frac{\pi}{in}-\frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\int_0^\pi (\pi-x)e^{-inx}\cdot dx = (\pi-x)\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^\pi + \frac{1}{in}\int_0^\pi e^{-inx}\, d(\pi-x) =$$

$d(\pi-x) = -dx$

$$= \frac{\pi}{in} + \frac{1}{in}\left(-\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^\pi\right)\right) = \frac{\pi}{in} + \frac{1}{(in)^2}\left(e^{-in\pi}-1\right) =$$

$$\Rightarrow = \frac{\pi}{in} - \frac{1}{n^2}\left((-1)^n-1\right).$$ Значит,

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{in} - \cancel{\frac{1}{n^2}(1-(-1)^n)} + \frac{\pi}{in} + \cancel{\frac{1}{n^2}(1-(-1)^n)}\right\}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{in}\right\} \Rightarrow \boxed{C_n = \frac{1}{in}} \quad n = \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{in}\cdot e^{inx}}$$ Ряд Фурье в комплексной форме. $\boxed{C_n = \frac{1}{in}}$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$

Ответ.

Сравним с обычным рядом Фурье. Т.к. $f(x)$ — нечетная ф-ция, то $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi-x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left\{(\pi-x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^\pi + \right.$$

$n = 1, 2, \ldots$

$$\left. + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\, d(\pi-x)\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{n} \cancel{+}\right.$$

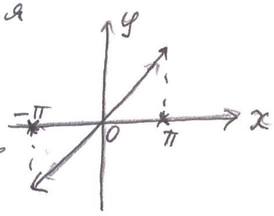
$$\left. - \frac{1}{n^2}\underbrace{\sin nx\Big|_0^\pi}_{0}\right\} \Rightarrow b_n = \frac{2}{n}; \quad b_n = \frac{2}{n}, \quad a_n = 0$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx. \quad \underline{C_n} = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{0 - i\frac{2}{n}}{2} = \underline{\frac{1}{in}}.$$

Связь полученных C_n и a_n и b_n подтверждает правильность

Пример.1. Исходя из разложения

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}, \quad -\pi < x < \pi$$



Получить разложение $f(x)=x^2$ в ряд Фурье на $(-\pi;\pi)$.

Решение. Ряд хотя и не

сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$ отрезке,

но сходится в каждой точке $(-\pi;\pi)$

Интегрируя почленно на $(-\pi;\pi)$

$$\int x\,dx = \int 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}dx = 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(-\frac{\cos kx}{k^2}\right)+\tilde{C}$$

$$\frac{x^2}{2}+C_1 \Rightarrow x^2 = 4\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2} + \underbrace{2\tilde{C}-2C_1}_{C\text{ — произвольна}}$$

Поскольку $\cancel{a_0 = \frac{1}{\pi}\int}$ $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$ можно вычислить непосредственно. Тогда $x^2 = \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}$

Ответ: $x^2 = \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}$;

Пример.2. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме $f(x)=1-|x|$ на $(-1;1)$.

Решение. При переходе рядов Фурье с $(-\pi;\pi)$ на $(-l;l)$ система $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ заменяется на $\{e^{\frac{i\pi n}{l}x}\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Поскольку $\int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{inx}{l}} \cdot e^{-\frac{imx}{l}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2l, & n = m. \end{cases}$

Значит, коэффициенты C_n по системе

$\left\{ e^{i\frac{\pi n}{l}x} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$; $C_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{\pi n}{l}x} dx$

$f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{\pi n}{l}x}$. Для $l=1$. $C_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x) e^{-i\pi n x} dx$;

$C_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x) e^{-i\frac{\pi n}{l}x} dx$. Для $f(x) = 1 - |x|$.

$$C_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{-i\pi n x} \cdot dx = \frac{1}{2}\left\{\int\limits_{-1}^{0}(1+x)e^{-i\pi n x} dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{1}(1-x)e^{-i\pi n x} dx\right\} \ominus$$

Считаем отдельно $\int\limits_{-1}^{0}(1+x)e^{-i\pi n x} dx = (1+x)\frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n}\Big|_{-1}^{0} +$

$$+ \frac{1}{i\pi n}\int\limits_{-1}^{0} e^{-i\pi n x} d(1+x) = 1 \cdot \frac{e^{-i\pi \cdot n \cdot 0}}{-i\pi n} + 0 + \frac{1}{i\pi n} \cdot \frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n}\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{i\pi n} + \frac{(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2};$$

$\underline{d(1-x) = -dx}$

$$\int\limits_{0}^{1}(1-x)e^{-i\pi n x} dx = (1-x)\frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n}\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{i\pi n}\int\limits_{0}^{1} e^{-i\pi n x} d(1-x) =$$

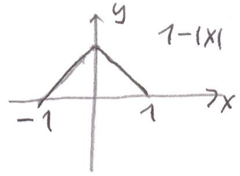
$$= \frac{1}{i\pi n}\left(-\frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n}\right)\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{i\pi n} = \frac{1}{i\pi n} - \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$C_n = \frac{1}{2}\left\{\cancel{-\frac{1}{i\pi n}} + \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2} + \cancel{\frac{1}{i\pi n}} + \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}\right\}$$

$$C_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 \cdot n^2}; \quad 1-|x| = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2} e^{i\pi n x} + \frac{1}{2};$$

$n=0$. $C_0 = \frac{a_0}{2}$; $a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 (1-x)dx = 2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 \Rightarrow$

$C_0 = \frac{1}{2}$ Проверка. Представим



четную ф-цию $f(x) = 1-|x|$ обычным рядом Фурье, т.е. по системе $\{\cos nx; \sin nx\}_{n=0}^{\infty} \Rightarrow b_n = 0, n=1,2,..$

$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (1-x)\cos\pi n x\, dx = 2\left\{(1-x)\frac{\sin\pi n x}{\pi n}\Big|_0^1 -\right.$ 0

$\left. - \frac{1}{\pi n}\cdot\int_0^1 \sin\pi n x \cdot d(1-x)\right\} = 2\left(+\frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{\cos\pi n x}{\pi n}\Big|_0^1\right)\right) =$

$d(1-x) = -dx$ $\quad = \frac{2\cdot 1}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n)$

$a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2}\cdot(1-(-1)^n)$, $b_n = 0$. Соотношение

$a_0 = 1$. $\quad C_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{\frac{2}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n) - i\cdot 0}{2} =$

$= \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 \cdot n^2}$ выполнено!

$$1-|x| = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cdot e^{i\pi n x}, \quad x\in(-1;1)$$

Ответ.

ряд Фурье в комплексной форме.

$$1-|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}\cdot \cos\pi n x.$$

Ряд Фурье по $\{\cos\pi n x; \sin\pi n x\}_{n=0,1,..}$