От Семинар по ДУ и интегральным уравнениям. от 31.03.2020 для 08.04.2020 г.

Отметим, что разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье — это на самом деле разложение её по <u>ортогональной</u> системе ф-ций $\{\cos nx;\ \sin nx\}_{n=0}^{\infty}$ относительно скалярного произведения в $L_2[-\pi;\pi]$ $(f;g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

Формулы для вычисления коэффициентов $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, так просты ввиду ортогональности этой системы. Оказывается это допускает обобщение.

Последовательность $\{\cos(nt+\alpha(t));\ \sin(nt+\alpha(t))\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $L_2[0,2\pi]$, если

$$\frac{1}{4}<\frac{\alpha(2\pi)-\alpha(0)}{2\pi}<\frac{3}{4}$$ для любой $\alpha(t)$ — гладкой $\alpha(t)\not\equiv const$ ф-ции.

Это мой результат Барменков А.Н. в 1984 г.

Семинар по ДУ и интегральным уравнениям (от 31.03.2020) для 08.04.2020.

Комплексная форма ряда Фурье.

Это ряд по ортогональной системе

(1) $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ относительно скалярного произведения. $(f;g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq m \\ 2\pi, & \text{при } n = m \end{cases}$$ это проверка ортогональности.

Разложить в ряд Фурье $f(x)$ $x \in [-\pi;\pi]$ по $\{e^{inx}\}$ означает представление вида

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$ – это тригонометрический ряд <u>в комплексной форме</u>,

где $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Если имеется разложение $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$

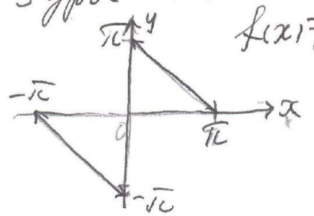
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx},$$

где $\underline{C_0 = \frac{a_0}{2}}$; $\cancel{\frac{a_0}{2} = c_0}$, и $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$

при $n \geq 1$, .. $C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$

Можно перейти на $[-l;l]$, выбрав $\{e^{\frac{in\pi}{l}\cdot x}\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Пример. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме.



$$f(x)=\begin{cases}-\pi-x\,, & -\pi<x<0\\ \pi-x\,, & 0<x<\pi\end{cases}$$

Решение. Нужно представить ф-цию в виде

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{inx}, \text{ где } \quad C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx. \;, n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-\pi-x)dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\left(-\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\pi(-\pi)+\frac{(-\pi)^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right\}=0$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-\pi-x)e^{-inx}dx+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)e^{-inx}dx\right\} =$$

Т.к

$$\int_{-\pi}^{0}(-\pi-x)e^{-inx}dx=(-\pi-x)\cdot\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{0}e^{-inx}d(-\pi-x)$$

$$=\frac{\pi}{in}\cdot e^{in0}+\frac{1}{in}\cdot\left(-\left(+\frac{e^{-inx}}{-in}\right)\right)\Big|_{-\pi}^{0}=$$

Т.к $d(-\pi-x)=$ $=-dx.$

$$=\frac{\pi}{in}+\frac{1}{(in)^2}\left(1-e^{-in(-\pi)}\right)=\frac{\pi}{in}-\frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\int_0^{\pi}(\pi-x)e^{-inx}\cdot dx=(\pi-x)\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{in}\int_0^{\pi}e^{-inx}\,d(\pi-x)=$$

$d(\pi-x)=-dx$

$$=\frac{\pi}{in}+\frac{1}{in}\left(-\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{\pi}\right)\right)=\frac{\pi}{in}+\frac{1}{(in)^2}\left(e^{-in\pi}-1\right)=$$

$$=\frac{\pi}{in}-\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-1\right).$$ Значит,

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{in}-\frac{1}{n^2}(\cancel{1-(-1)^n})+\frac{\pi}{in}+\frac{1}{n^2}(\cancel{1-(-1)^n})\right\}$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{in}\right\}\Rightarrow\boxed{C_n=\frac{1}{in}}\quad n=\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{in}\cdot e^{inx}}$$. Ряд Фурье в комплексной форме. $\boxed{C_n=\frac{1}{in}}$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$

Ответ.

Сравним с обычным рядом Фурье. Т.к $f(x)$ – нечетная ф-ция, то $a_n=0$, $n=0,1,2\ldots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{(\pi-x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}+\right.$$

$n=1,2,\ldots$

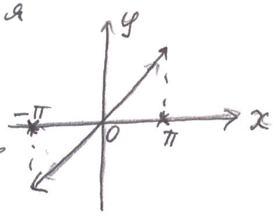
$$\left.+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,d(\pi-x)\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{n}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n^2}\underbrace{\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{0}\right\}\Rightarrow b_n=\frac{2}{n};\quad b_n=\frac{2}{n},\ a_n=0$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx.\quad \underline{C_n}=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{0-i\frac{2}{n}}{2}=\underline{\frac{1}{in}}.$$

Связь полученных C_n и a_n и b_n подтверждает правильность

Пример.1. Исходя из разложения



$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}, \quad -\pi<x<\pi$$

Получить разложение $f(x)=x^2$ в ряд Фурье на $(-\pi;\pi)$.

Решение. Ряд хотя и не сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$ отрезке, но сходится в каждой точке $(-\pi;\pi)$

Интегрируя почленно на $(-\pi;\pi)$

$$\int x\,dx = \int 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}\,dx = 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(-\frac{\cos kx}{k^2}\right)+\tilde{C}$$

$$\frac{x^2}{2}+C_1 \Rightarrow x^2 = 4\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\cos kx}{k^2}+\underbrace{2\tilde{C}-2C_1}_{C\text{ — произвольна}}$$

Поскольку $\cancel{a_0=\frac{1}{f}}$ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$

$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3}=\frac{2}{3}\pi^2$ можно вычислить непосредственно. Тогда $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}$

Ответ: $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}$;

Пример.2. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме $f(x)=1-|x|$ на $(-1;1)$.

Решение. При переходе рядов Фурье с $(-\pi;\pi)$ на $(-l;l)$ система $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ заменяется на $\{e^{\frac{i\pi n}{l}x}\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Поскольку $\int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{inx}{l}} \cdot e^{-\frac{imx}{l}}\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2l, & n = m. \end{cases}$

Значит, коэффициенты C_n по системе

$\{e^{i\frac{\pi n}{l}x}\}_{n=-\infty}^{\infty}$; $C_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{\pi n}{l}x}\, dx$

$f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{\pi n}{l}x}$. Для $l = 1$. $C_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, e^{-i\pi n x} dx$;

$C_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, e^{-i\frac{\pi n}{l}x}\, dx$. Для $f(x) = 1 - |x|$.

$$C_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} (1-|x|)\, e^{-i\pi n x} \cdot dx = \frac{1}{2}\Big\{\int\limits_{-1}^{0} (1+x)\, e^{-i\pi n x}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} (1-x)\, e^{-i\pi n x}\, dx\Big\} =$$

Считаем отдельно $\int\limits_{-1}^{0} (1+x)\, e^{-i\pi n x}\, dx = (1+x)\frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n}\Big|_{-1}^{0} +$

$$+ \frac{1}{i\pi n}\int\limits_{-1}^{0} e^{-i\pi n x}\, d(1+x) = 1 \cdot \frac{e^{-i\pi \cdot n \cdot 0}}{-i\pi n} + 0 + \frac{1}{i\pi n} \cdot \frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n}\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{i\pi n} + \frac{(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2};$$

$\underline{d(1-x) = -dx}$

$$\int\limits_{0}^{1} (1-x)\, e^{-i\pi n x}\, dx = (1-x)\frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n}\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{i\pi n}\int\limits_{0}^{1} e^{-i\pi n x}\, d(1-x) =$$

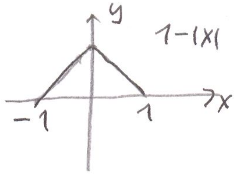
$$= \frac{1}{i\pi n}\left(-\frac{e^{-i\pi n x}}{-i\pi n}\right)\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{i\pi n} = \frac{1}{i\pi n} - \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$C_n = \frac{1}{2}\Big\{-\cancel{\frac{1}{i\pi n}} + \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2} + \cancel{\frac{1}{i\pi n}} + \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}\Big\}$$

$c_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 \cdot n^2}$; $1-|x| = \sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2} e^{i\pi n x} + \frac{1}{2}$;

$n=0$. $c_0 = \frac{a_0}{2}$; $a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 \Rightarrow$

$c_0 = \frac{1}{2}$ Проверка. Представим четную ф-цию $f(x) = 1-|x|$ обычным рядом Фурье, т.е. по системе $\{\cos nx; \sin nx\}_{n=0}^{\infty} \Rightarrow b_n = 0, n = 1, 2, ..$



$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (1-x)\cos\pi n x\,dx = 2\Big\{\underbrace{(1-x)\frac{\sin\pi n x}{\pi n}\Big|_0^1}_{0} -$

$- \frac{1}{\pi n}\cdot\int_0^1 \sin\pi n x\cdot d(1-x)\Big\} = 2\left(+\frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{\cos\pi n x}{\pi n}\Big|_0^1\right)\right) =$

$d(1-x) = -dx$ $\quad = \frac{2\cdot 1}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)$

$a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right)$, $b_n = 0$. Соотношение

$a_0 = 1$. $\quad c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{\frac{2}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right) - i\cdot 0}{2} =$

$= \frac{1-(-1)^n}{\pi^2\cdot n^2}$ выполнено!

$$1-|x| = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cdot e^{i\pi n x}, \quad x\in(-1;1)$$

Ответ.

Ряд Фурье в комплексной форме.

$$1-|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot\left(1-(-1)^n\right)}{\pi^2 n^2}\cdot\cos\pi n x.$$

Ряд Фурье по $\{\cos\pi n x; \sin\pi n x\}_{n=0,1,..}$