Теоретическая механика

Часть 1

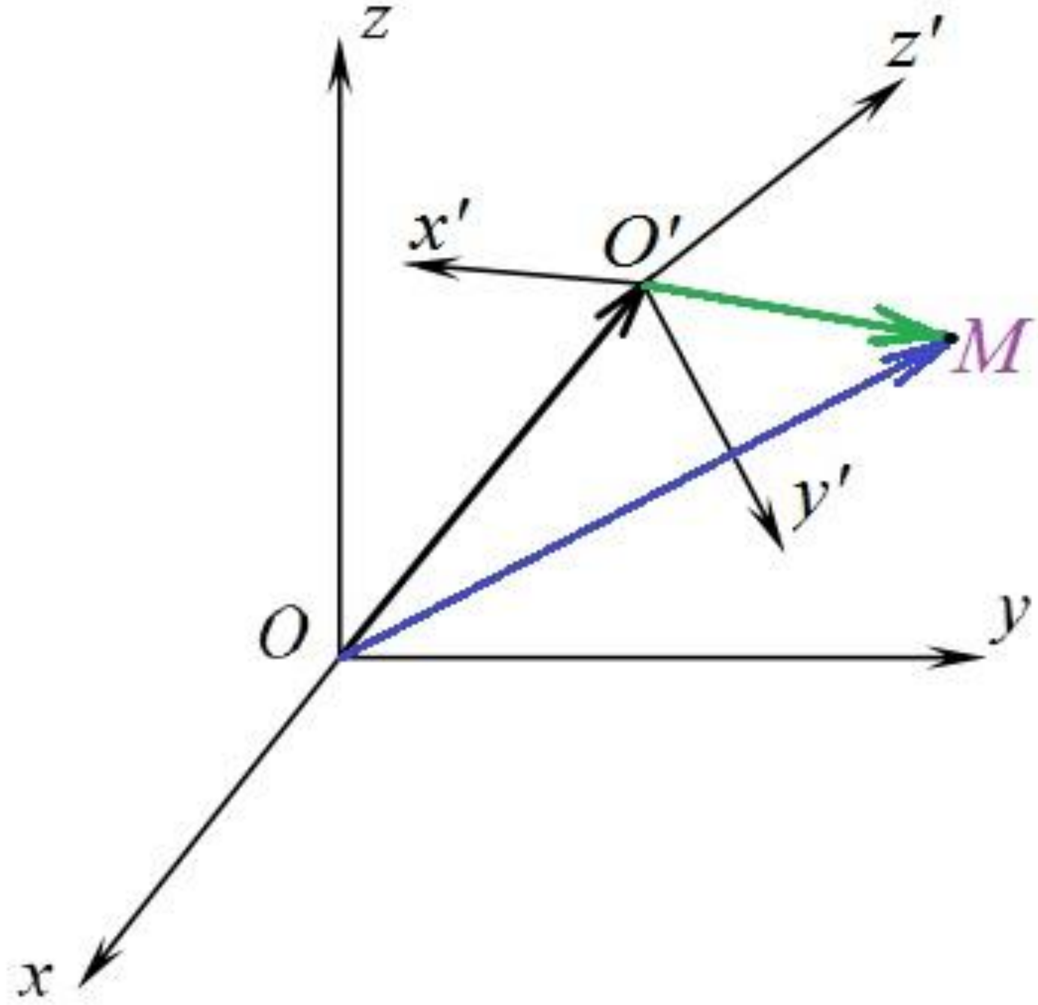
Кинематика

Глава 2. Сложное движение точки

§ 1. Подвижные и неподвижные системы отсчета

Рассматриваются две декартовых системы отсчета: «неподвижная» $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и «подвижная» $S'=(O',E_1',E_2',E_3')$.

Тогда $B=\{\vec{i}=\overrightarrow{OE}_1,\ \vec{j}=\overrightarrow{OE_2},\ \vec{k}=\overrightarrow{OE_3}\}$ – «неподвижный» ортонормированный базис, а $B'=\{\vec{i}\,'=\overrightarrow{O'E'}_1,\ \vec{j}\,'=\overrightarrow{O'E'},\ \vec{k}'=\overrightarrow{O'E'}\}$ – «подвижный» ортонормированный базис.



z
z′
x′
O′
M
y′
O
y
x

Векторы «подвижного» базиса разложим по «неподвижному» базису:

$$\vec{i}\,' = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\,, \quad \vec{j}\,' = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\,, \quad \vec{k}' = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\,.$$

Рассмотрим матрицу $D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Из Алгебры: D – ***матрица перехода*** от B к B'; если

$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ – координатное представление вектора $\vec{q}$ в S, а

$q' = \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{pmatrix}$ – координатное представление вектора $\vec{q}$ в S',

то

$$q = Dq'. \tag{1}$$

Свойства матрицы D: $D^T D = DD^T = I$, $\det D = 1$.

То есть D – ***ортогональная*** матрица.

Пусть M – отмеченная точка,

$r_{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S,

$r'_{O'M} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S'.

Тогда, в силу (1),

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \;\Rightarrow\; r_{OM} = r_{OO'} + r_{O'M} = r_{OO'} + Dr'_{O'M}\,.$$

Заметим, что матрица D зависит от времени:

$$D = D(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) & c_1(t) \\ a_2(t) & b_2(t) & c_2(t) \\ a_3(t) & b_3(t) & c_3(t) \end{pmatrix}.$$

§ 2. Различные виды скоростей и ускорений

Абсолютная скорость – скорость точки M в системе S:

$$v_{абс} = \dot{r}_{OM}.$$

Абсолютное ускорение – ускорение точки M в системе S:

$$w_{абс} = \ddot{r}_{OM}.$$

Относительная скорость – скорость точки M в системе S', записанная в координатах системы S:

$$v_{отн} = D\dot{r}'_{O'M}.$$

Относительное ускорение – ускорение точки M в системе S', записанное в координатах системы S:

$$w_{отн} = D\ddot{r}'_{O'M}.$$

Переносная скорость и переносное ускорение.

Обозначим через A «след», оставленный точкой M в подвижной системе S' в момент t_1, т.е. такую неподвижную относительно S' отмеченную точку, которая в момент t_1 совпадает с M.

Переносной скоростью точки M в момент t_1 называется скорость точки A в системе S в момент t_1:

$$v_{пер}(t_1) = \dot{r}_{OA}(t_1) = (\dot{r}_{OO'} + \dot{D}\, r'_{O'A})|_{t=t_1} = \dot{r}_{OO'}(t_1) + \dot{D}(t_1) r'_{O'A} =$$

$$= \dot{r}_{OO'}(t_1) + \dot{D}(t_1) r'_{O'M}(t_1)$$

($r'_{O'A} = const$, так как A неподвижна относительно S').

Переносным ускорением точки M в момент t_1 называется ускорение точки A в системе S в момент t_1:

$$w_{пер}(t_1) = \ddot{r}_{OA}(t_1) = (\ddot{r}_{OO'} + \ddot{D} r'_{O'A})\big|_{t=t_1} = \ddot{r}_{OO'}(t_1) + \ddot{D}(t_1) r'_{O'A} =$$

$$= \ddot{r}_{OO'}(t_1) + \ddot{D}(t_1) r'_{O'M}(t_1).$$

Заметим, что, для того, чтобы найти переносные скорость и ускорение в другой момент времени t_2, надо зафиксировать другую точку в системе S', т.е. рассматривать «след», оставленный точкой M в подвижной системе S' в момент t_2.

Ускорение Кориолиса[1] **(кориолисово ускорение) :**

$$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{O'M} .$$

[1] Гаспа́р-Гюста́в де Кориоли́с (1792 – 1843) – французский математик и механик.

§ 3. Теорема о сложении скоростей и ускорений

Теорема. В обозначениях и терминах предыдущего параграфа :

$$v_{абс} = v_{пер} + v_{отн},$$

$$w_{абс} = w_{пер} + w_{отн} + w_{кор}.$$

Доказательство. Представим радиус-вектор точки M в виде:

$$r_{OM} = r_{OO'} + r_{O'M} = r_{OO'} + D\, r'_{O'M}\,.$$

Для нахождения скорости и ускорения продифференцируем это равенство дважды по времени:

$$v_{абс}(t) = \dot{r}_{OM}(t) = \dot{r}_{OO'}(t) + \dot{D}(t)\, r'_{O'M}(t) + D(t)\, \dot{r}'_{O'M}(t) =$$

$$= v_{пер}(t) + v_{отн}(t);$$

$$v_{абс}(t) = \dot{r}_{OM}(t) = \dot{r}_{OO'}(t) + \dot{D}(t)\, r'_{O'M}(t) + D(t)\, \dot{r}'_{O'M}(t) =$$

$$= v_{пер}(t) + v_{отн}(t);$$

$$w_{абс}(t) = \ddot{r}_{OM}(t) = \ddot{r}_{OO'}(t) + \ddot{D}(t)\, r'_{O'M}(t) + \dot{D}(t)\, \dot{r}'_{O'M}(t) +$$

$$+ \dot{D}(t)\, \dot{r}'_{O'M}(t) + D(t)\, \ddot{r}'_{O'M}(t) =$$

$$= \ddot{r}_{OO'}(t) + \ddot{D}(t)\, r'_{O'M}(t) + 2\dot{D}(t)\, \dot{r}'_{O'M}(t) + D(t)\, \ddot{r}'_{O'M}(t) =$$

$$= w_{пер}(t) + w_{кор}(t) + w_{отн}(t).$$

Теорема доказана.

§ 4. Два частных случая сложного движения

4.1. Система S' движется поступательно относительно системы S. При поступательном движении оси системы S' не меняют своих направлений (относительно ДСО S); следовательно, координаты векторов $\vec{i}\,' = \overrightarrow{O'E'}_1$, $\vec{j}\,' = \overrightarrow{O'E'}$, $\vec{k}\,' = \overrightarrow{O'E'}$ в системе S (т.е. в неподвижном базисе $B = \{\vec{i} = \overrightarrow{OE}_1,\ \vec{j} = \overrightarrow{OE_2},\ \vec{k} = \overrightarrow{OE_3}\}$) не изменяются. Таким образом, матрица перехода

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = const.$$

Следовательно, в этом случае для точки M

$v_{пер} = \dot{r}_{OO'} + \dot{D}r'_{O'M} = \dot{r}_{OO'}$

(совпадает со скоростью точки O' в ДСО S),

$w_{пер} = \ddot{r}_{OO'} + \ddot{D}r'_{O'M} = \ddot{r}_{OO'}$

(совпадает с ускорением точки O' в ДСО S),

$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{O'M} = 0$.