

Теоретическая механика

Часть 1

Кинематика

Глава 2. Сложное движение точки

§ 1. Подвижные и неподвижные системы отсчета

Рассматриваются две декартовых системы отсчета:

«неподвижная» $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и «подвижная»

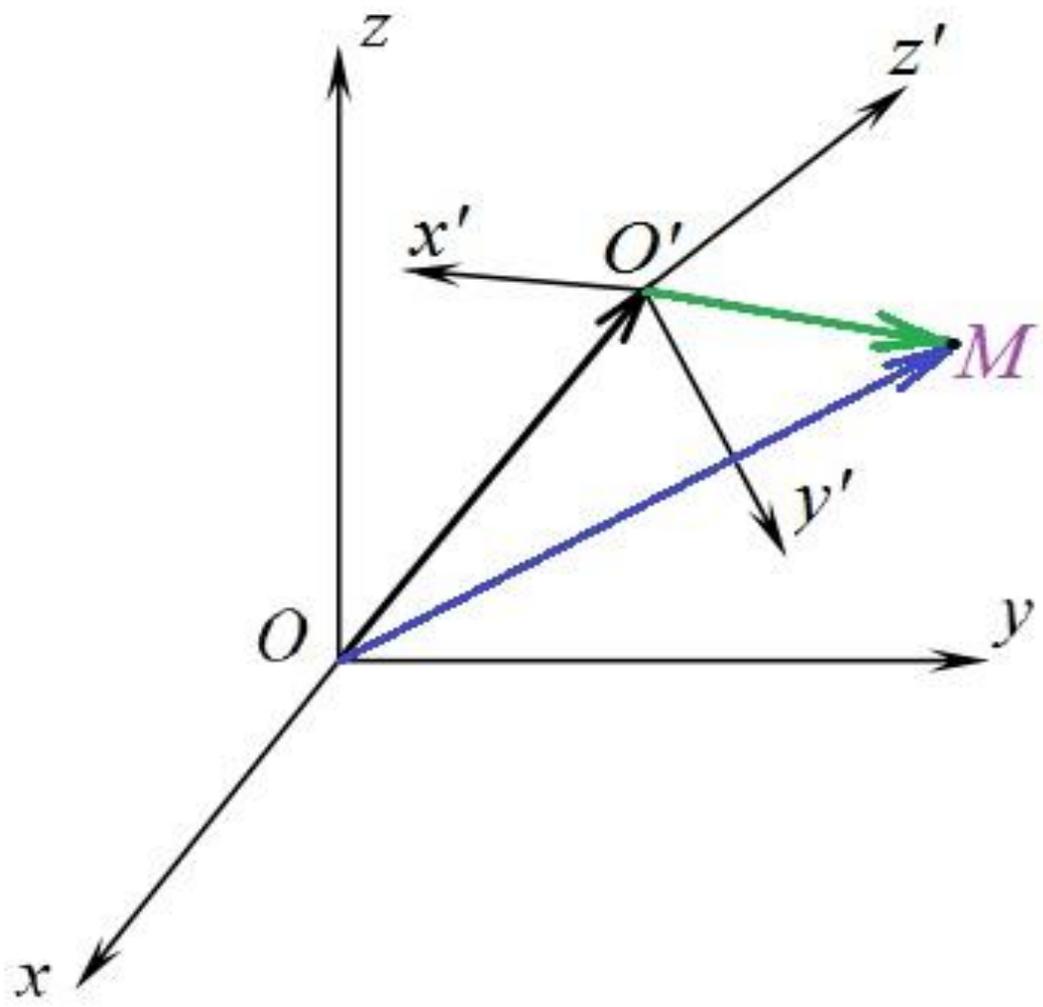
$S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$.

Тогда $B = \{\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}, \vec{j} = \overrightarrow{OE_2}, \vec{k} = \overrightarrow{OE_3}\}$ —

«неподвижный» ортонормированный базис, а

$B' = \{\vec{i}' = \overrightarrow{O'E'_1}, \vec{j}' = \overrightarrow{O'E'_2}, \vec{k}' = \overrightarrow{O'E'_3}\}$ — «подвижный»

ортонормированный базис.



Векторы «подвижного» базиса разложим по «неподвижному» базису:

$$\vec{i}' = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad \vec{j}' = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}, \quad \vec{k}' = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}.$$

Рассмотрим матрицу $D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Из Алгебры: D – матрица перехода от B к B' ; если

$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ – координатное представление вектора \vec{q} в S , а

$q' = \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{pmatrix}$ – координатное представление вектора \vec{q} в S' ,

то

$$q = Dq' . \quad (1)$$

Свойства матрицы D : $D^T D = D D^T = I$, $\det D = 1$.

То есть D – *ортогональная* матрица.

Пусть M – отмеченная точка,

$r_{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S ,

$r'_{O'M} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S' .

Тогда, в силу (1),

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow r_{OM} = r_{OO'} + r_{O'M} = r_{OO'} + Dr'_{O'M}.$$

Заметим, что матрица D зависит от времени:

$$D = D(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) & c_1(t) \\ a_2(t) & b_2(t) & c_2(t) \\ a_3(t) & b_3(t) & c_3(t) \end{pmatrix}.$$

§ 2. Различные виды скоростей и ускорений

Абсолютная скорость – скорость точки M в системе S :

$$v_{abc} = \dot{r}_{OM}.$$

Абсолютное ускорение – ускорение точки M в системе S :

$$w_{abc} = \ddot{r}_{OM}.$$

Относительная скорость – скорость точки M в системе S' , записанная в координатах системы S :

$$v_{отн} = D\dot{r}'_{O'M}.$$

Относительное ускорение – ускорение точки M в системе S' , записанное в координатах системы S :

$$w_{отн} = D\ddot{r}'_{O'M}.$$

Переносная скорость и переносное ускорение.

Обозначим через A «след», оставленный точкой M в подвижной системе S' в момент t_1 , т.е. такую неподвижную относительно S' отмеченную точку, которая в момент t_1 совпадает с M .

Переносной скоростью точки M в момент t_1 называется скорость точки A в системе S в момент t_1 :

$$\begin{aligned} v_{пер}(t_1) &= \dot{r}_{OA}(t_1) = (\dot{r}_{OO'} + \dot{D}r'_{O'A})|_{t=t_1} = \dot{r}_{OO'}(t_1) + \dot{D}(t_1)r'_{O'A} = \\ &= \dot{r}_{OO'}(t_1) + \dot{D}(t_1)r'_{O'M}(t_1) \end{aligned}$$

($r'_{O'A} = const$, так как A неподвижна относительно S').

Переносным ускорением точки M в момент t_1 называется ускорение точки A в системе S в момент t_1 :

$$\begin{aligned}w_{пер}(t_1) &= \ddot{r}_{OA}(t_1) = (\ddot{r}_{OO'} + \ddot{D}r'_{O'A})|_{t=t_1} = \ddot{r}_{OO'}(t_1) + \ddot{D}(t_1)r'_{O'A} = \\ &= \ddot{r}_{OO'}(t_1) + \ddot{D}(t_1)r'_{O'M}(t_1).\end{aligned}$$

Заметим, что, для того, чтобы найти переносные скорость и ускорение в другой момент времени t_2 , надо зафиксировать другую точку в системе S' , т.е. рассматривать «след», оставленный точкой M в подвижной системе S' в момент t_2 .

Ускорение Кориолиса¹ (кориолисово ускорение) :

$$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{O'M}.$$

¹ Гаспáр-Гюста́в де Кориоли́с (1792 – 1843) – французский математик и механик.

§ 3. Теорема о сложении скоростей и ускорений

Теорема. В обозначениях и терминах предыдущего параграфа :

$$V_{абс} = V_{пер} + V_{отн},$$

$$W_{абс} = W_{пер} + W_{отн} + W_{кор}.$$

Доказательство. Представим радиус-вектор точки M

в виде:

$$r_{OM} = r_{OO'} + r_{O'M} = r_{OO'} + D r'_{O'M}.$$

Для нахождения скорости и ускорения продифференцируем это равенство дважды по времени:

$$\begin{aligned} v_{abc}(t) = \dot{r}_{OM}(t) &= \dot{r}_{OO'}(t) + \dot{D}(t)r'_{O'M}(t) + D(t)\dot{r}'_{O'M}(t) = \\ &= v_{пер}(t) + v_{отн}(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{a\bar{b}c}(t) &= \dot{r}_{OM}(t) = \dot{r}_{OO'}(t) + \dot{D}(t)r'_{O'M}(t) + D(t)\dot{r}'_{O'M}(t) = \\
 &= v_{nep}(t) + v_{omh}(t);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{a\bar{b}c}(t) &= \ddot{r}_{OM}(t) = \ddot{r}_{OO'}(t) + \ddot{D}(t)r'_{O'M}(t) + \dot{D}(t)\dot{r}'_{O'M}(t) + \\
 &\quad + \dot{D}(t)\dot{r}'_{O'M}(t) + D(t)\ddot{r}'_{O'M}(t) = \\
 &= \ddot{r}_{OO'}(t) + \ddot{D}(t)r'_{O'M}(t) + 2\dot{D}(t)\dot{r}'_{O'M}(t) + D(t)\ddot{r}'_{O'M}(t) = \\
 &= w_{nep}(t) + w_{kop}(t) + w_{omh}(t).
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 4. Два частных случая сложного движения

4.1. Система S' движется поступательно относительно системы S . При поступательном движении оси системы S' не меняют своих направлений (относительно ДСО S); следовательно, координаты векторов $\vec{i}' = \overline{O'E'_1}$, $\vec{j}' = \overline{O'E'_2}$, $\vec{k}' = \overline{O'E'_3}$ в системе S (т.е. в неподвижном базисе $B = \{\vec{i} = \overline{OE_1}, \vec{j} = \overline{OE_2}, \vec{k} = \overline{OE_3}\}$) не изменяются. Таким образом, матрица перехода

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = const.$$

Следовательно, в этом случае для точки M

$$v_{пер} = \dot{r}_{OO'} + \dot{D}r'_{O'M} = \dot{r}_{OO'}$$

(совпадает со скоростью точки O' в ДСО S),

$$w_{пер} = \ddot{r}_{OO'} + \ddot{D}r'_{O'M} = \ddot{r}_{OO'}$$

(совпадает с ускорением точки O' в ДСО S),

$$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{O'M} = 0.$$