Уравнение касательной к графику функции.

Найдем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, предполагая, что касательная в этой точке существует. Оно имеет вид $y = kx + b$.

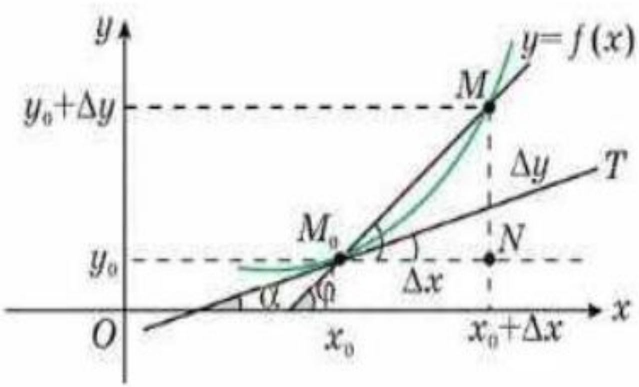

Рис. 43.1

Рассмотрим точку $M(x_0 + \Delta x;$ $y_0 + \Delta y)$, принадлежащую графику функции $y = f(x)$ (рис. 43.1).

Проведем через точку M_0 секущую M_0M, а через точку M прямые, параллельные осям координат. Получим прямоугольный треугольник M_0NM с катетами $M_0N = \Delta x$ и $NM = \Delta y$.

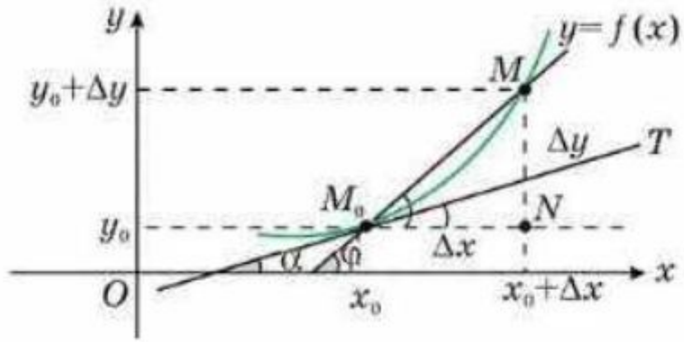

Рис. 43.1

Пусть секущая M_0M составляет с положительным направлением оси Ox угол ф; тогда $\angle NM_0M$ = ф. Из прямоугольного треугольника M_0NM получим, что угловой коэффициент секущей

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Действительно, если $M_0(x_0; y_0)$ и $M(x, y)$, то, подставив координаты в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему

$$\begin{cases} y = kx + b; \\ y_0 = kx_0 + b. \end{cases} \qquad (2)$$

Для нахождения коэффициента k вычтем из первого равенства второе. Получим $y - y_0 = k(x - x_0)$. Из полученного равенства следует: $k = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$.

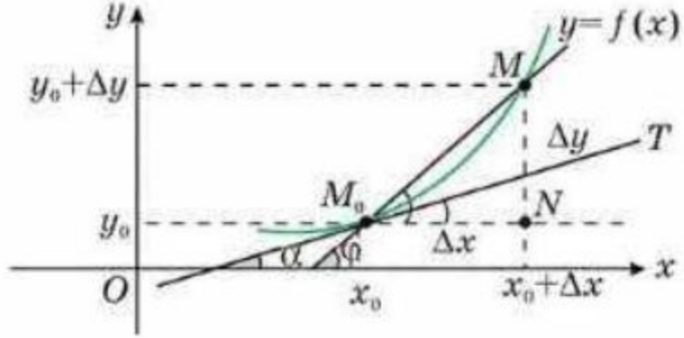

Рис. 43.1

Если $M \to M_0$, тогда $\Delta x \to 0$ и секущая M_0M стремится к своему предельному положению — касательной M_0T в точке M_0. Обозначим через α угол, образованный касательной M_0T с положительным направлением оси Ox. При $\Delta x \to 0$ угол $\varphi \to \alpha$, если касательная M_0T не перпендикулярна оси Ox, то в силу непрерывности тангенса получим, что $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$. Отсюда, переходя к пределу в равенстве (1), находим угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$ касательной M_0T:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

При решении системы уравнений (2) было получено равенство

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Подставляя $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$ в уравнение прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$, получим $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, или $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Используя геометрический смысл производной, дадим наглядное пояснение того, что существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке B с абсциссой, равной b из интервала $(a; c)$, параллельная секущей, проходящей через точки $A_1(a; f(a))$ и $C_1(c; f(c))$.

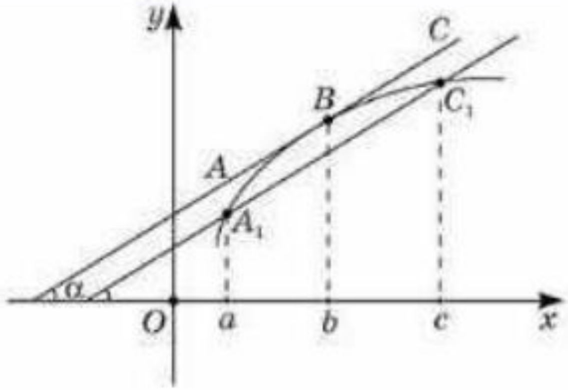

Рис. 43.2

Рассмотрим прямую A_1C_1, параллельную касательной AC, проведенной через точку B графика функц ии $y = f(x)$ (рис. 43.2). Тогда угол α равен углу наклона секущей A_1C_1, т. е. $f'(b) = \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Таким образом, если функция дифференцируема на интервале $(a; c)$, то оказывается, найдется точка $b \in (a; c)$, для которой выполняется равенство

$$f'(b) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Формула (4) называется *формулой Лагранжа*.

АЛГОРИТМ Для того, чтобы написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, используется следующий алгоритм:

1) вычислить значение функции $f(x)$ при x_0;

2) найти производную функции $f(x)$;

3) вычислить значение производной в точке x_0, т. е. найти $f'(x_0)$;

4) найденные значения подставить в уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ и получить уравнение касательной.

ПРИМЕР **1.** Напишем уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Решение. Вычислим $y(1) = 1$. $y' = 2x$, а значит, $y'(1) = 2$. Подставим эти данные в формулу уравнения касательной. Получим $y = 1 + 2(x - 1)$. Приведем подобные слагаемые, получим уравнение касательной $y = 2x - 1$.

Ответ: $y = 2x - 1$.

ПРИМЕР **2.** Запишем уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x = 1$ (рис. 43.3).

Решение.

1. $f(x_0) = f(1) = 1$;

2. $f'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3. $f'(x_0) = f'(1) = \dfrac{1}{2}$;

4. $y = 1 + \dfrac{1}{2}(x - 1) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

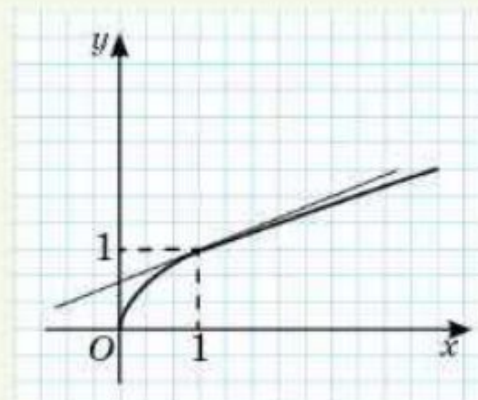

Рис 43.3

Ответ: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Домашнее задание:

1.Посмотреть видеоурок (обязательно!)

2.Написать конспект с презентации

3.Выполнить задания в конце презентации: №43.1 (1,2)- №43.4(1,2)

43.1. Запишите уравнение касательной к функции $y = f(x)$ при $x = x_0$:

1) $y = 2x^2 - 5,5$ при $x_0 = -0,5$;
2) $y = 0,2x^2 - 4$ при $x_0 = 2$;
3) $y = -3x^2 - x$ при $x_0 = -2$;
4) $y = x^2 - \frac{1}{x}$, при $x_0 = 3$.

43.2. Найдите значения x, при которых касательная к графику функции параллельна оси Ox:

1) $y = 2x^2 - 8x$;
2) $y = x^2 + 8x - 5$;
3) $y = 2x^2 - 8x + 5$;
4) $y = x - x^2$.

43.3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точках его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = 4 - x^2$;
2) $f(x) = x^2 - 9$;
3) $f(x) = 4x - x^2$;
4) $f(x) = 4x - x^2 - 3$.

43.4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точках его пересечения с осью ординат:

1) $f(x) = 1 - x^2$;
2) $f(x) = x^2 - 3$;
3) $f(x) = 2 + 4x - x^2$;
4) $f(x) = 3x - x^2 - 2$.