

Решение иррациональных
уравнений
11 класс

Определение.

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными.

Примеры:

$$\sqrt[3]{x} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+1} = 5 - x$$

$$\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} + 4 = 0$$

Методы решения иррациональных уравнений.

1. $\sqrt{f(x)} = a.$

Если a - отрицательно, то уравнение $\sqrt{f(x)} = a.$
- не имеет решения;

Если $a \geq 0$, то уравнение $\sqrt{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a.^2$

Это следует из определения арифметического
корня.

Пример:

$$\sqrt{x^2 + 2} = 5$$

$$x^2 + 2 = 25,$$

$$x^2 = 23,$$

$$x = \pm\sqrt{23}.$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{23}$.

Решите самостоятельно

$$\sqrt{x^2 + x - 2} = 2$$

Решение: Возведем обе части в квадрат.

$$x^2 + x - 2 = 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -3$$

Ответ: 2; -3.

2. Решение иррациональных уравнений, используя переход к смешанной системе.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x); \end{cases}$$

Пример:

$$\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 3x^2 - x - 2 = (x - 1)^2; \\ x \geq 1, \\ 3x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$3x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{4} = 1 \text{ — удовлетворяет условию } x \geq 1;$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} = -1,5 \text{ не удовлетворяет условию } x \geq 1 \text{ —}$$

Ответ: $x = 1$

посторонний корень.

Решите самостоятельно.

$$\sqrt{x-2} = x-8$$

Решение: $\sqrt{x-2} = x-8 \Leftrightarrow \begin{cases} x-8 \geq 0, \\ x-2 = (x-8)^2; \end{cases}$

$$x^2 - 17x + 66 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 17$$

$$x_1 \cdot x_2 = 66$$

$$x_1 = 11 \text{ — удовлетворяет условию } x \geq 8$$

$$x_2 = 6 \text{ — не удовлетворяет условию } x \geq 8 \text{ —}$$

посторонний корень. Ответ: $x = 11$

3. Переход к равносильной системе.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Пример.

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{2x^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0, \\ x^2 - x + 1 \geq 0, \\ x^2 - x + 1 = 2x^2 - 1; \\ x^2 \geq \frac{1}{2} \\ x^2 - x + 1 = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

$$x^2 - x + 1 = 2x^2 - 1,$$

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$x_1 = -2$ удовлетворяет условию

$x_2 = 1$ удовлетворяет условию



Решите самостоятельно

$$\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$$

Решение: $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+1 \geq 0, \\ x+4 \geq 0, \\ 7x+1 = 4(x+4). \end{cases}$

$$7x+1 = 4x+16$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

Ответ: $x = 5$

$$4. \quad \sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = a.$$

Если $a < 0$, то $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = a$ — не имеет решения.

$$\text{Если } a \geq 0, \text{ то } \sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x)g(x) = a^2. \end{cases}$$

Пример:

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x+2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ (x+1)(x+2) = 16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x \geq -2, \\ x^2 + 3x + 2 - 16 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{65}}{2} \quad \text{- не удовлетворяет условию } x \geq -1$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + 3x - 14 = 0; \end{cases} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{65}}{2} \quad \text{- удовлетворяет условию } x \geq -1$$

$$x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$D = 9 + 56 = 65$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\sqrt{65} - 3}{2}.$$

5.

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ \sqrt{f(x)g(x)} = h(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0, \\ f(x)g(x) = h^2(x). \end{cases}$$

Пример:

$$\sqrt{x-1}\sqrt{2x+6} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 2x+6 \geq 0, \\ x+3 \geq 0, \\ (x-1)(2x+6) = (x+3)^2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq -\frac{3}{2}, \\ x \geq -3, \\ (x-1)(2x+6) = x^2 + 6x + 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x^2 + 4x - 6 = x^2 + 6x + 9; \\ 2x^2 + 4x - 6 = x^2 + 6x + 9, \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$D = 4 + 60 = 64$$

$$x_1 = \frac{2 + 8}{2} = 5 \text{ - удовлетворяет} \\ \text{условию } x \geq 1,$$

$$x_2 = \frac{2 - 8}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \text{ -} \\ \text{не удовлетворяет условию } x \geq 1$$

Ответ: $x = 5$.