

Тема 10. Кодирование данных, комбинаторика, системы счисления

базовый уровень, время – 4 мин

Что нужно знать:

- русский алфавит
- принципы работы с числами, записанными в позиционных системах счисления
- если слово состоит из L букв, причем есть n_1 вариантов выбора первой буквы, n_2 вариантов выбора второй буквы и т.д., то число возможных слов вычисляется как произведение

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_L$$

- если слово состоит из L букв, причем каждая буква может быть выбрана n способами, то число возможных слов вычисляется как $N = n^L$

P-06. *Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы С, Л, О, Н, причём буква С используется в каждом слове ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?*

Решение:

- 1) буква С может стоять на одном из пяти мест: $C****$, $*C***$, $**C**$, $***C*$ и $****C$, где * обозначает любой из оставшихся трёх символов
- 2) в каждом случае в остальных четырёх позициях может быть любая из трёх букв Л, О, Н, поэтому при заданном расположении буквы С имеем $3^4 = 81$ вариант
- 3) всего вариантов $5 \cdot 81 = 405$.

Ответ: 405.

P-05. *Сколько существует различных символьных последовательностей длины 5 в четырёхбуквенном алфавите {A, C, G, T}, которые содержат ровно две буквы A?*

Решение (вариант 1, перебор):

1) рассмотрим различные варианты слов из 5 букв, которые содержат две буквы A и начинаются с A:

AA*** A*A** A**A* A***A

Здесь звёздочка обозначает любой символ из набора {C, G, T}, то есть один из трёх символов.

2) итак, в каждом шаблоне есть 3 позиции, каждую из которых можно заполнить тремя способами, поэтому общее число комбинаций (для каждого шаблона!) равно $3^3 = 27$

3) 4 шаблона, когда на первом месте стоит буква A, они дают $4 \cdot 27 = 108$ комбинаций

4) теперь рассматриваем шаблоны, где первая по счёту буква А стоит на второй позиции, их всего три:

*АА** *А*А* *А**А

они дают $3 \cdot 27 = 81$ комбинацию

5) два шаблона, где первая по счёту буква А стоит на третьей позиции:

**АА* **А*А

они дают $2 \cdot 27 = 54$ комбинации

6) и один шаблон, где сочетание АА стоит в конце
***АА

они дают 27 комбинаций

7) всего получаем $(4 + 3 + 2 + 1) \cdot 27 = 270$
комбинаций

Р-04. *Сколько слов длины 5, начинающихся с гласной буквы, можно составить из букв Е, Г, Э? Каждая буква может входить в слово несколько раз. Слова не обязательно должны быть осмысленными словами русского языка.*

Решение:

1) первая буква слова может быть выбрана двумя способами (Е или Э), остальные – тремя

2) общее число различных слов равно $2 * 3 * 3 * 3 * 3 = 162$

ответ: 162.

P-03. Все 4-буквенные слова, составленные из букв К, Л, Р, Т, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы. Вот начало списка:

1. КККК
2. КККЛ
3. КККР
4. КККТ

.....

Запишите слово, которое стоит на 67-м месте от начала списка.

Решение:

- 1) самый простой вариант решения этой задачи – использование систем счисления; действительно, здесь расстановка слов в алфавитном порядке равносильна расстановке по возрастанию чисел, записанных в четверичной системе счисления (основание системы счисления равно количеству используемых букв)
- 2) выполним замену $K \rightarrow 0$, $L \rightarrow 1$, $P \rightarrow 2$, $T \rightarrow 3$; поскольку нумерация слов начинается с единицы, а первое число $KKKK \rightarrow 0000$ равно 0, под номером 67 будет стоять число 66, которое нужно перевести в четверичную систему: $66 = 1002_4$
- 3) Выполнив обратную замену (цифр на буквы), получаем слово ЛККР.

Ответ: ЛККР.

P-02. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке.

Вот начало списка:

1. ААААА

2. ААААО

3. ААААУ

4. АААОА

.....

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Решение (троичная система, идея М. Густокашина):

- 1) по условию задачи важно только то, что используется набор из трех разных символов, для которых задан порядок (алфавитный); поэтому для вычислений можно использовать три любые символа, например, цифры 0, 1 и 2 (для них порядок очевиден – по возрастанию)
- 2) выпишем начало списка, заменив буквы на цифры:

1. 00000

2. 00001

3. 00002

4. 00010

.....

- 3) это напоминает (в самом деле, так оно и есть!) числа, записанные в троичной системе счисления в порядке возрастания: на первом месте стоит число 0, на втором – 1 и т.д.
 - 4) тогда легко понять, что 240-м месте стоит число 239, записанное в троичной системе счисления
 - 5) переведем 239 в троичную систему: $239 = 22212_3$
 - 6) заменяем обратно цифры на буквы: $22212 \rightarrow \text{УУУОУ}$
- Ответ: УУУОУ.

P-01. Все 5-буквенные слова, составленные из 5 букв А, К, Л, О, Ш, записаны в алфавитном порядке.

Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААК
3. ААААЛ
4. ААААО
5. ААААШ
6. АААКА

.....

На каком месте от начала списка стоит слово ШКОЛА?

Решение:

- 1) по аналогии с предыдущим решением будем использовать пятеричную систему счисления с заменой $A \rightarrow 0$, $K \rightarrow 1$, $L \rightarrow 2$, $O \rightarrow 3$ и $Ш \rightarrow 4$
- 2) слово ШКОЛА запишется в новом коде так: 413205
- 3) переводим это число в десятичную систему:
$$413205 = 4 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 = 2710$$
- 4) поскольку нумерация элементов списка начинается с 1, а числа в пятеричной системе – с нуля, к полученному результату нужно прибавить 1, тогда...

Ответ: 2711.

P-00. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в **обратном** алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. УУУУУ

2. УУУУО

3. УУУУА

4. УУУОУ

.....

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Решение:

1) по условию задачи важно только то, что используется набор из трех разных символов, для которых задан порядок (алфавитный); поэтому для вычислений можно использовать три любые символа, например, цифры 0, 1 и 2 (для них порядок очевиден – по возрастанию)

2) выпишем начало списка, заменив буквы на цифры так, чтобы **порядок символов был обратный алфавитный** ($У \rightarrow 0, О \rightarrow 1, А \rightarrow 2$):

1. 00000

2. 00001

3. 00002

4. 00010

.....

- 3) это напоминает (в самом деле, так оно и есть!) числа, записанные в троичной системе счисления в порядке возрастания: на первом месте стоит число 0, на втором – 1 и т.д.
- 4) тогда легко понять, что 240-м месте стоит число 239, записанное в троичной системе счисления
- 5) переведем 239 в троичную систему: $239 = 22212_3$
- 6) заменяем обратно цифры на буквы, **учитывая обратный алфавитный порядок** ($0 \rightarrow У, 1 \rightarrow О, 2 \rightarrow А$):
 $22212 \rightarrow АААОА$

Ответ: АААОА.