

Логарифмы.

Джон Непер - изобретатель системы логарифмов, основанной на установлении соответствия между арифметической и геометрической числовыми прогрессиями.

В «Описании удивительной таблицы логарифмов» он опубликовал первую таблицу логарифмов (ему же принадлежит и сам термин «логарифм»). Объяснение таблицы было дано в его сочинении «Построение удивительной таблицы логарифмов», вышедшем в 1619. Таблицы логарифмов, насущно необходимые астрономам, нашли немедленное применение.



**Джон Непер
(1550-1617)**

Основное логарифмическое тождество

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить b .

$$a^{\log_a b} = b$$

Это равенство называют *основным логарифмическим тождеством*. Оно справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Определение логарифма

Из определения логарифма следует, что
нахождение

$$x = \log_a b$$

равносильно решению уравнения

$$a^x = b .$$

Например:

$$\log_2 8 = 3, \text{ потому что } 2^3 = 8 .$$

Используя основное логарифмическое тождество, найдите значения выражения

$$3^{\log_3 17} = 17$$

$$4^{\log_4 5} = 5$$

$$13^{2\log_{13} 16} = 256$$

$$3^{-2\log_3 5} = 0,04$$

Логарифмирование

Логарифмированием называют действие нахождения логарифма числа.

Читается: логарифм b по основанию a .

$$\log_5 25 = 2, \text{ так как } 5^2 = 25$$

$$\log_4 (1/16) = -2, \text{ так как } 4^{-2} = 1/16$$

$$\log_{1/3} 27 = -2, \text{ так как } (1/3)^{-2} = 27$$

Найдите значения выражения

$$\log_5 625 = 4$$

$$\log_3 27 = 3$$

$$\log_{10} 0,001 = -3$$

$$\log_{0,5} 4 = -2$$

$$\log_{11} 1 = 0$$

$$\log_3 81 = 4$$

Логарифмирование

Найти логарифмы чисел b по основанию a

$$a=3; \quad b=9\sqrt[4]{3} \quad \text{Ответ: } 2,25$$

$$a=3; \quad b=\frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \text{Ответ: } 1,5$$

$$a=3; \quad b=\frac{1}{243} \quad \text{Ответ: } -5$$

Логарифмирование

$$\log_{16} 256 = x \quad \text{Найти } x$$

По определению логарифма $16^x = 256$

Так как $16 = 2^4$; $256 = 2^8$ то $2^{4x} = 2^8$

Откуда $4x = 8$; $x = 2$

**При каких значениях x существует
логарифм**

$$\log_{0,25}(x-5) \quad x > 5$$

$$\log_5(15-x) \quad x < 15$$

$$\log_5(-8x^5) \quad x < 0$$

$$\log_{0,4}(33+x^2) \quad x \in R$$

$$\log_{2,5}(-x^6) \quad \text{Не существует}$$

**Доказательство
основных свойств логарифмов**

Логарифм произведения

Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$.

Тогда

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \quad (1)$$

Докажем справедливость формулы (1)

Логарифм произведения

Известно: $a^{\log_a b} = b$ (2)

$$a^{\log_a c} = c \quad (3)$$

Перемножим почленно равенства (2) и (3)

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc \quad a^{\log_a bc} = bc$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$

Формула (1) доказана

Логарифм произведения

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\begin{aligned}\log_6(36 \cdot 6) &= \log_6 36 + \log_6 6 = \\ &= 2 + 1 = 3\end{aligned}$$

Логарифм частного

Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$.

Тогда

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad (1)$$

Докажем справедливость формулы (1)

Логарифм частного

Известно: $a^{\log_a b} = b$ (2)

$$a^{\log_a c} = c \quad (3)$$

Разделим почленно равенства (2) и (3)

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c}; \quad a^{\log_a (b:c)} = \frac{b}{c};$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

Формула (1) доказана

Логарифм частного

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\begin{aligned} \log_9 \frac{729}{81} &= \log_9 729 - \log_9 81 = \\ &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Логарифм степени

Логарифм степени с положительным основанием равен показателю степени, умноженному на логарифм основания степени

Пусть $a > 0$, $b > 0$. r –любое действительное число. Тогда

$$\log_a b^r = r \log_a b \quad (1)$$

Докажем справедливость формулы (1)

Логарифм степени

Возводя основание логарифмического тождества

$$a^{\log_a b} = b$$

в степень r получаем:

$$(a^{\log_a b})^r = b^r ; a^{r \log_a b} = b^r$$

откуда по определению логарифма следует формула (1):

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

Логарифм степени

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_5 \sqrt{125} = \log_5 (125)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \log_5 125 = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5$$

Переход к новому основанию

Для перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию используется формула:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (1)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$

Докажем справедливость формулы (1)

Переход к новому основанию

Запишем основное логарифмическое

тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Возьмем от обеих его частей логарифмы по основанию c

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

Используя свойство логарифма степени, получаем:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b; \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Переход к новому основанию

Следствие.

При $b=c$ – происходит перестановка основания и логарифмируемого выражения

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Переход к новому основанию

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2}$$

Свойства логарифмов

$$1) \quad a^{\log_a b} = b \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Примеры:

$$3^{\log_3 17} = 17;$$

$$13^{2\log_{13} 16} = (13^{\log_{13} 16})^2 = \\ = 16^2 = 256$$

$$2) \log_a a = 1 \quad a > 0, a \neq 1$$

Пример:

$$\log_{86} 86 = 1$$

$$3) \log_a 1 = 0 \quad a > 0, a \neq 1$$

Пример:

$$\log_{39} 1 = 0$$

$$4) \log_a a^r = r$$

$a > 0, a \neq 1, b > 0, r$ -любое действительное число

Пример:

$$\log_{79} 79^5 = 5$$

$$5) \log_a b^r = r \log_a b \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Пример:

$$\log_2 3^4 = 4 \log_2 3$$

$$6) \log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b$$

$a > 0, a \neq 1, b > 0, r$ - любое действительное
число

Пример:

$$\log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3} \log_2 2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$7) \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Пример:

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

$$\begin{aligned} \log_6(36 \cdot 6) &= \log_6 36 + \log_6 6 = \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$8) \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

Пример:

$$\begin{aligned} \log_9 \frac{729}{81} &= \log_9 729 - \log_9 81 = \\ &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

$$9) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 1$$

Пример:

$$\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2}$$

$$10) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$$

Пример:

$$\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$$

$$11) \log_a \frac{1}{c} = -\log_a c \quad a > 0, a \neq 1, c > 0$$

Пример:

$$\log_3 \frac{1}{9} = -\log_3 9 = -2$$

$$12) \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

$$a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Пример:

$$\log_{2^3} 16^4 = \frac{4}{3} \log_2 16 = \frac{16}{3}$$

$$13) a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$a > 0, c \neq 1, b > 0, c > 0$$

Пример:

$$4^{\log_2 8} = 8^{\log_2 4}$$

$$4^3 = 8^2$$

$$64 = 64$$