

Проверка статистических гипотез

ТЮРНЕВА Т.Г.
ИМЭИ ИГУ

Практическая работа №3

1. Проверить гипотезы:

а) $H_0 : a = a_0$, где $a_0 = \bar{x} + 0,5s$;

б) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, где $\sigma_0^2 = 3s$.

2. Проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию χ^2 .

Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Основные понятия

- **Статистическая гипотеза** – это предположение о значении параметров закона распределения с.в. X (**параметрическая**) или его виде (**непараметрическая**).
- **Статистическая гипотеза называется простой**, если она однозначно определяет распределение с.в. X ; в противном случае, гипотеза называется **сложной**.

Основные понятия

Проверяемую гипотезу обычно называют **нулевой** (или основной) и обозначают H_0 .

Наряду с нулевой гипотезой рассматривают **альтернативную** (или конкурирующую) гипотезу H_1 , являющуюся логическим отрицанием H_0 .

Выбор альтернативной гипотезы определяется конкретной формулировкой задачи.

Проверка статистической гипотезы H состоит в выяснении того, насколько эта гипотеза согласуется с опытными данными X .

Основные понятия

- Решение – **принять или отвергнуть гипотезу H_0** – принимается на основании некоторого правила или критерия по выборочным данным. При этом выбирается подходящая функция элементов выборки, или **статистика критерия**, которую в общем случае будем обозначать Z .

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0 , называется ***критерием K*** .

- ***Принцип проверки статистических гипотез:*** маловероятные события считаются невозможными, а события, имеющие большую вероятность – достоверными.

Принцип проверки статистических гипотез

Реализация принципа:

- *Задать уровень значимости α .*
- *Выбрать статистику Z критерия K ;*
- *Множество значений статистики Z разбить на непересекающиеся подмножества – критическую область и область принятия гипотезы H_0 .*

Критическая область

- Множество значений статистики Z , при которых принимается решение **отклонить** гипотезу H_0 , называется **критической областью**.
- Графически эта область определяется по кривой распределения.

Уровень значимости α определяет «размер» критической области

- *Критическая область выбирается так, чтобы вероятность попадания в нее была минимальной (равной α), если верна нулевая гипотеза H_0 , и максимальной в противоположном случае.*

Критическая область

- В зависимости от вида конкурирующей гипотезы и распределения критерия выбирают вид расположения критической области: **правосторонняя, левосторонняя или двусторонняя.**

Границы (**критические точки**) при заданном уровне значимости находят из соотношений для критических областей:

- правосторонней: $P(Z > Z_{кр}) = \alpha$;
- левосторонней: $P(Z < Z_{кр}) = \alpha$;
- двусторонней: $P(Z < Z_{кр}) = \alpha / 2$ и $P(Z > Z_{кр}) = \alpha / 2$.

Область принятия решения

Множество значений статистики Z , при которых гипотеза H_0 **принимается**, называется **областью принятия решения**.

Критерий, основанный на использовании заранее заданного уровня значимости α , называют **критерием значимости**.

Проверка статистических гипотез может быть проведена на основе соответствующих **доверительных интервалов**.

Ошибки первого и второго рода

Уровень значимости α – это **вероятность ошибки первого рода**, т.е. вероятность того, что будет отвергнута гипотеза H_0 , если на самом деле для генеральной совокупности верна гипотеза H_0 .

Значение α устанавливается на основе практического опыта в различных областях исследования. Вероятность α задается заранее малым числом: 0,05; 0,01; 0,005; 0,001.

Вероятность ошибки второго рода обозначают β – это вероятность того, что будет принята гипотеза H_0 , если на самом деле верна гипотеза H_1 .

Вероятность не совершить ошибку второго рода ($1 - \beta$), т. е. вероятность правильного отклонения неверной нулевой гипотезы, называют **мощностью критерия**.

Ошибки первого и второго рода

	Статистическое решение	
	Принять H_0	Отвергнуть H_0
Верна H_0	+	Ошибка первого рода
Ложна H_0	Ошибка второго рода	+

Ошибки первого и второго рода

Статистическая **ошибка первого рода** (Type I Error) – ошибка обнаружить различия или связи, которые на самом деле **не существуют!**

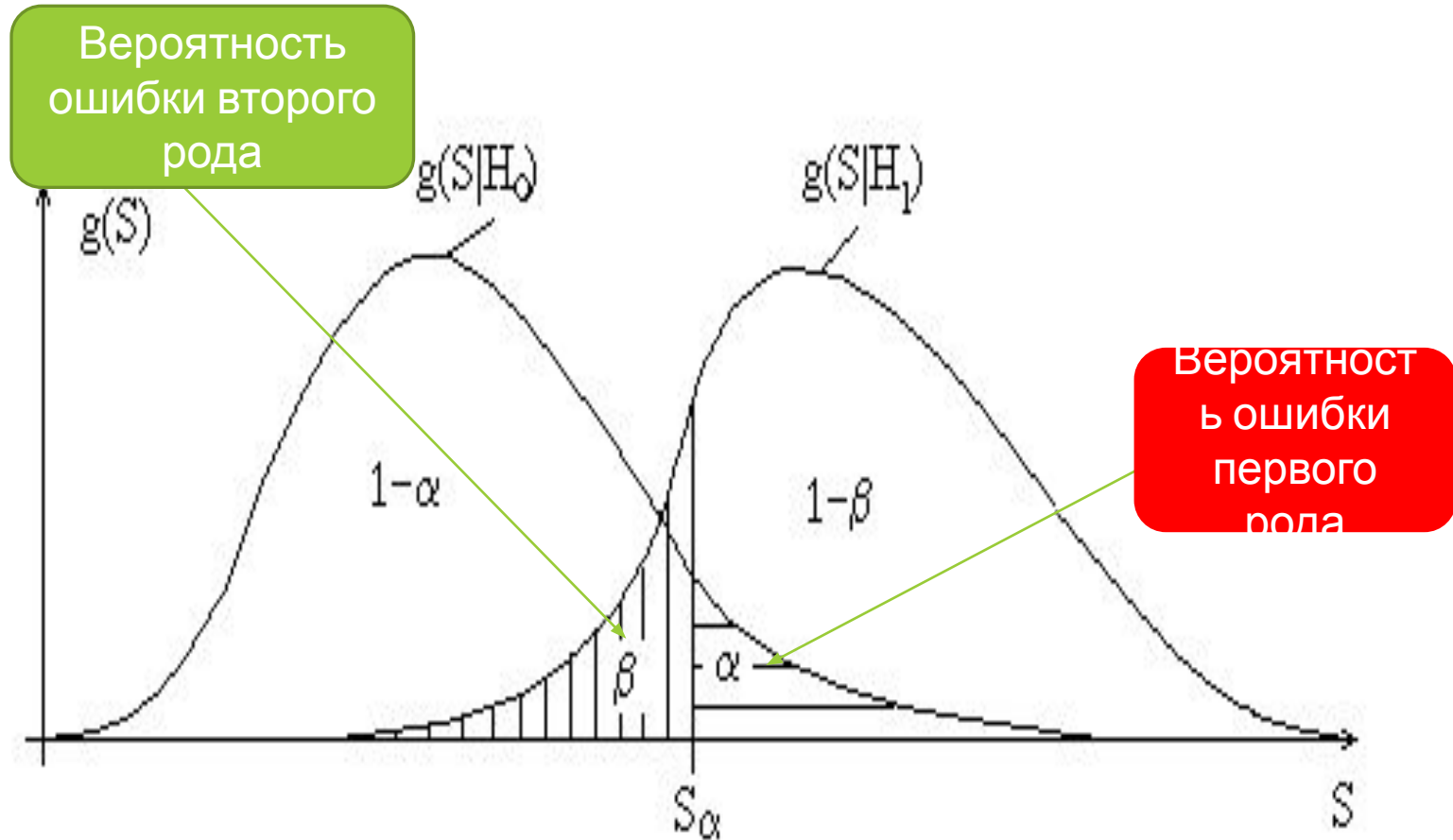
Статистическая ошибка **второго рода** (Type II Error) - не обнаружить различия или связи, которые на самом деле существуют

«Судебная» аналогия: Вердикт «Не виновен» или «Виновен»

Ошибка первого рода - невинный обвинен

Ошибка второго рода - виновный освобожден

Ошибки первого и второго рода



Этапы проверки гипотезы о параметрах распределения

1. формулируются гипотезы H_0 и H_1 ;
2. задается уровень значимости α ;
3. выбирается статистика Z критерия для проверки H_0 ; определяется выборочное распределение статистики Z при условии, что верна H_0 ;
4. в зависимости от H_1 определяется критическая область;
5. вычисляется выборочное значение статистики z ;
6. принимается статистическое решение.

Статистическое решение

Если $z_{\text{в}}$ принадлежит критической области

- Отклонить гипотезу H_0 как несогласующуюся с результатами наблюдений

Если $z_{\text{в}}$ не принадлежит критической области

- Принять гипотезу H_0 , т.е. считать, что она не противоречит результатам наблюдений

Замечания

1. На этапах 4-7 используют статистику, квантили которой табулированы.
2. В статистических пакетах обычно не используется значения задаваемого уровня значимости. В выходных данных содержатся выборочные значения статистики критерия и вероятность того, что с.в. превышает выборочное значение.

Эта вероятность называется p -значением (p -level).

Пример 1

Сб. задач по математике для вузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. А.В. Ефимова.

По паспортным данным автомобильного двигателя расход топлива на 100 км. пробега составляет 10л. В результате изменения конструкции двигателя ожидается, что расход топлива уменьшится. Для проверки проводятся испытания 25 случайно отобранных автомобилей с модернизированным двигателем, причем выборочное среднее расходов топлива на 100 км. пробега по результатам испытаний составило 9,3 л. Предположим, что выборка расходов топлива получена из нормально распределенной генеральной совокупности со средним μ и дисперсией 4 л^2 . Используя критерий значимости, проверить гипотезу, утверждающую, что изменение конструкции двигателя не повлияло на расход топлива.

Пример 2

- В условиях примера 1 предположим, что наряду с гипотезой $H_0 : a=10\text{л}$ рассматривается альтернативная гипотеза $H_1 : a=9\text{л}$. В качестве статистики критерия рассмотрим выборочное среднее \bar{X} . Предположим, что критическая область задана неравенством $\bar{X} < 9,44\text{л}$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода для критерия с такой критической областью.

Критерии согласия

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – выборка наблюдений случайной величины X .

Проверяется гипотеза H_0 о том, что случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$.

- 1. По выборке наблюдений находят оценки неизвестных параметров предполагаемого закона распределения с.в. X .
- 2. Область возможных значений с.в. X разбивается на r множеств $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$. Если X -непрерывная с.в., то на r интервалов, если X -дискретная с.в., то r -число групп.
- 3. Подсчитывается число элементов выборки - n_k , принадлежащих множеству Δ_k , $k=1, 2, \dots, r$. $\sum_{k=1}^r n_k = n$.

Критерий χ^2

4. Используя предполагаемый закон распределения с.в. X , находят вероятности $p_k = P[X \in \Delta_k]$, $k=1, 2, \dots, r$. Очевидно, что $\sum p_i = 1$.


5. **Выборочное значение** статистики критерия вычисляется по формуле

$$\chi_{\text{В}}^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

Критерий χ^2

6. Гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости α , если $\chi^2_B < \chi^2_{1-\alpha}(r-l-1)$,

где $\chi^2_{1-\alpha}(r-l-1)$ – квантиль порядка $1-\alpha$ распределения χ^2 с $(r-l-1)$ степенями свободы, l – число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке.

 Необходимо, чтобы для всех интервалов выполнялось условие $nr_k \geq 5$.

Если для некоторых интервалов это условие не выполняется, то их следует объединить с соседними.

Проверить гипотезу: $H_0: a = a_0$, где $a_0 = \bar{x} + 0,5s$

$$a_0 = \bar{x} + 0,5s = 11 + 0,5 \cdot 2,97 = 12,48 \approx 12,5 \quad S = 2,97 \approx 3$$

1. $H_0: a = 12,5$

$H_1: a > 12,5$

2. уровень значимости $\alpha = 0,05$

3. статистика $T = \frac{\bar{x} - a_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

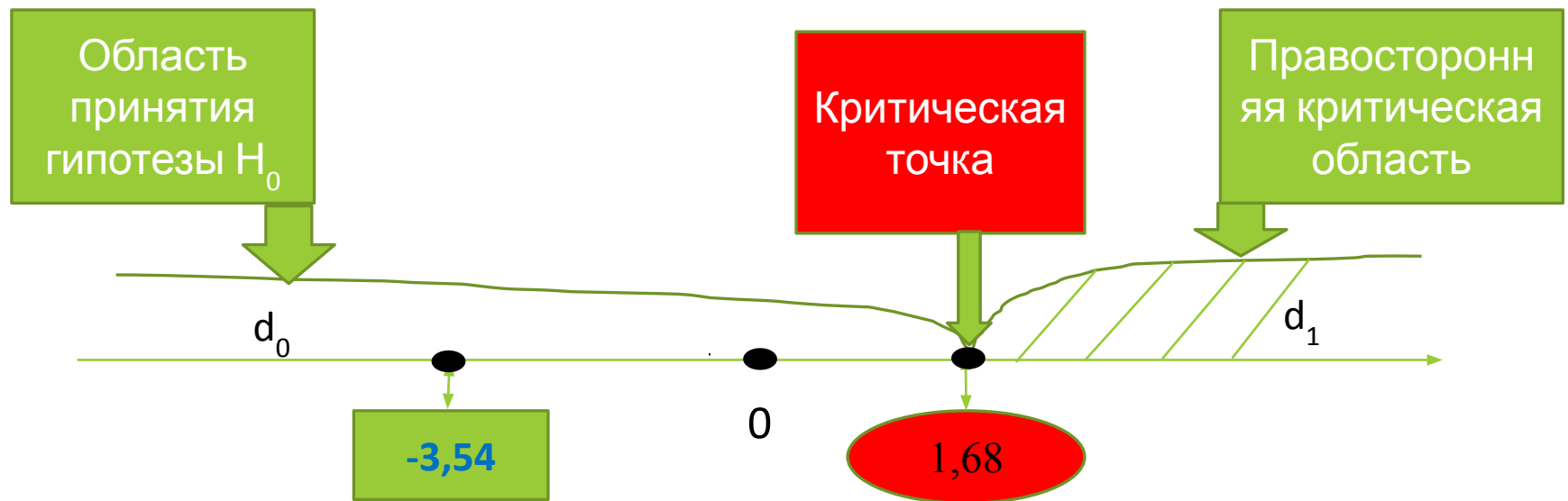
4. $t_{\text{крит.}} = t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0,95}(49) = 1,68$

5. $T_{\text{выб}} = \frac{11 - 12,5}{3/\sqrt{50}} = -3,54$

Статистическое решение: принять гипотезу H_0 , т.е. считать что она не противоречит результатам наблюдений

4. $t_{\text{крит.}} = t_{1-\alpha} (n-1) = t_{0,95} (49) = \mathbf{1,68}$ 5. $T_{\text{выб}} = \frac{11-12,5}{3/\sqrt{50}} = \mathbf{-3,54}$

6. статистическое решение:



Проверить гипотезу:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, \text{ где } \sigma_0^2 = 3s$$

1. $H_0: \sigma^2 = 8,91$ $S=2,97$ $\sigma_0^2 = 3s = 8,91$

2. уровень значимости $\alpha=0,05$

$$H_1: \sigma^2 \neq 8,91$$

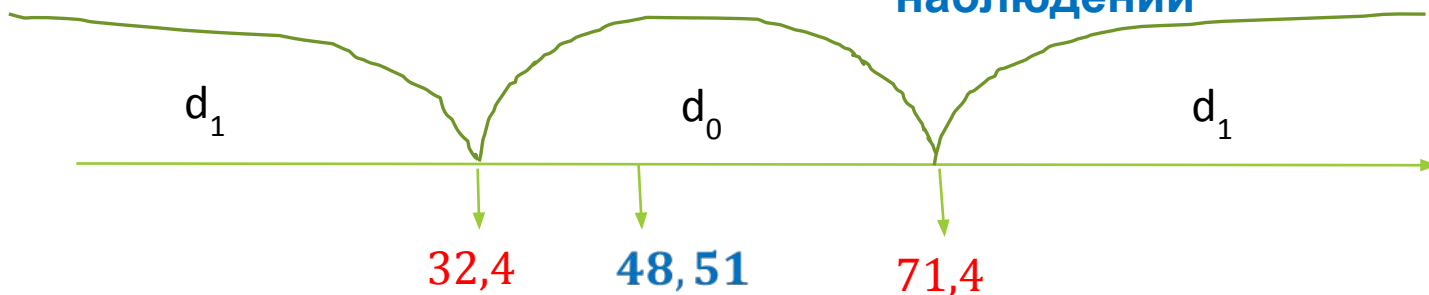
3. статистика $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

4. $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,025}(49) = 32,4$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{1-0,025}(49) = \chi^2_{0,975}(49) = 71,4$$

5. $\chi^2_{\text{выб}} = \frac{49 \cdot 8,82}{8,91} = 48,51$

6.



Статистическое решение:
принять гипотезу H_0 , т.е. считать что она не противоречит результатам наблюдений

Критерий χ^2

Объем выборки $n=50$.

Оценка математического ожидания $\bar{x}=11$

Оценка дисперсии $S^2 = 8,82$ $S=2,97 \approx 3$

1. H_0 : X распределена по нормальному закону

2. уровень значимости $\alpha=0,05$

3.
$$\chi_{\text{в}}^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

$$p_k = P[X \in \Delta_k] = \Phi\left(\frac{C_{k+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{C_k - \bar{x}}{s}\right)$$

Номер интервала	Границы интервала					
1			- 1,67	- 0,5	- 0,4525	0,0475
2	6 - 8	- 1,67	- 1	- 0,4525	- 0,3413	0,1112
3	8 - 10	- 1	- 0,33	- 0,3413	- 0,1293	0,212
4	10 - 12	- 0,33	0,33	- 0,1293	0,1293	0,2586
5	12 - 14	0,33	1	0,1293	0,3413	0,212
6	14 - 16	1	1,67	0,3413	0,4525	0,1112
7		1,67		0,4525	0,5	0,0475
						1

Выборочное значение статистики критерия

Номер интервала а	Наблюдаемая частота n_k		Ожидаемая частота					
1	2	}	0,0475	2,375	}			
2	7		0,1112	5,56		7,935	1,065	0,143
3	9		0,212	10,6	10,6	-1,6	0,242	
4	13		0,2586	12,93	12,93	0,07	0,000	
5	11		0,212	10,6	10,6	0,4	0,015	
6	6	}	0,1112	5,56	}	7,935	0,065	0,001
7	2		0,0475	2,375				
	50		1	50			0,401	

Статистическое решение

Гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости α , если $\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2(r-l-1)$,

где $\chi_{1-\alpha}^2(r-l-1)$ – квантиль порядка $1-\alpha$ распределения χ^2 с $(r-l-1)$ степенями свободы, l – число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке.

$$r=5; l=2$$

Число степеней свободы $r-l-1 = 5-2-1=2$

$$\chi_{1-\alpha}^2(r-l-1) = \chi_{1-0,05}^2(2) = \chi_{0,95}^2(2) = 5,99$$

$$\chi_B^2 = 0,401$$

Гипотеза о нормальном распределении выборки согласуется с результатами наблюдений