Проверка статистических гипотез

ТЮРНЕВА Т.Г.
ИМЭИ ИГУ

Практическая работа №3

1. Проверить гипотезы:

а) $H_0 : a = a_0$, где $a_0 = \overline{x}$ **+0,5s** ;

б) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, где $\sigma_0^2 =$ **3s**.

2. Проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию χ^2 .

Принять уровень значимости **$\alpha = 0{,}05$.**

Основные понятия

- ***Статистическая гипотеза*** ***– это предположение о значении параметров закона распределения с.в. X (*****параметрическая*****) или его виде (*****непараметрическая*****).***

- ***Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет распределение с.в. X; в противном случае, гипотеза называется сложной.***

Основные понятия

Проверяемую гипотезу обычно называют **нулевой** *(или* **основной***) и обозначают* H_0.

Наряду с нулевой гипотезой рассматривают **альтернативную** *(или* **конкурирующую***) гипотезу* H_1*, являющуюся логическим отрицанием* H_0.

Выбор альтернативной гипотезы определяется конкретной формулировкой задачи.

Проверка статистической гипотезы H состоит в выяснении того, насколько эта гипотеза согласуется с опытными данными X.

Основные понятия

- Решение – **принять или отвергнуть гипотезу** H_0 – принимается на основании некоторого правила или критерия по выборочным данным. При этом выбирается подходящая функция элементов выборки, или **статистика критерия**, которую в общем случае будем обозначать Z.

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0, называется ***критерием К.***

- ***Принцип проверки статистических гипотез:*** маловероятные события считаются невозможными, а события, имеющие большую вероятность – достоверными.

Принцип проверки статистических гипотез

Реализация принципа:

- ***Задать уровень значимости α.***
- ***Выбрать статистику Z критерия K;***
- ***Множество значений статистики Z разбить на непересекающиеся подмножества – критическую область и область принятия гипотезы H_0.***

Критическая область

- Множество значений статистики *Z*, при которых принимается решение **отклонить** гипотезу H_0, называется ***критической областью*.**
- Графически эта область определяется по кривой распределения.

Уровень значимости α определяет «размер» критической области

- *Критическая область выбирается так, чтобы вероятность попадания в нее была минимальной (равной α), если верна нулевая гипотеза H_0, и максимальной в противоположном случае.*

Критическая область

- В зависимости от вида конкурирующей гипотезы и распределения критерия выбирают вид расположения критической области: **правосторонняя, левосторонняя или двусторонняя.**

Границы (***критические точки***) при заданном уровне значимости находят из соотношений для критических областей:

- правосторонней: $P(Z > Z_{кр}) = \alpha$;
- левосторонней: $P(Z < Z_{кр}) = \alpha$;
- двусторонней: $P(Z < Z_{кр}) = \alpha/2$ и $P(Z > Z_{кр}) = \alpha/2$.

Область принятия решения

Множество значений статистики Z, при которых гипотеза H_0 **принимается**, называется ***областью принятия решения***.

Критерий, основанный на использовании заранее заданного уровня значимости α, называют **критерием значимости**.

Проверка статистических гипотез может быть проведена на основе соответствующих **доверительных интервалов.**

Ошибки первого и второго рода

Уровень значимости α – это вероятность ошибки первого рода, т.е. вероятность того, что будет отвергнута гипотеза H_0, если на самом деле для генеральной совокупности верна гипотеза H_0.

Значение *α* устанавливается на основе практического опыта в различных областях исследования. Вероятность α задается заранее малым числом: 0,05; 0,01; 0,005; 0,001.

Вероятность ошибки второго рода обозначают β – это вероятность того, что будет принята гипотеза H_0, если на самом деле верна гипотеза H_1.

Вероятность не совершить ошибку второго рода (1 – β), т. е. вероятность правильного отклонения неверной нулевой гипотезы, называют *мощностью критерия*.

Ошибки первого и второго рода

	Статистическое решение	
	Принять H_0	Отвергнуть H_0
Верна H_0	+	Ошибка первого рода
Ложна H_0	Ошибка второго рода	+

Ошибки первого и второго рода

Статистическая ошибка первого рода (Type I Error) – ошибка обнаружить различия или связи, которые на самом деле не существуют!

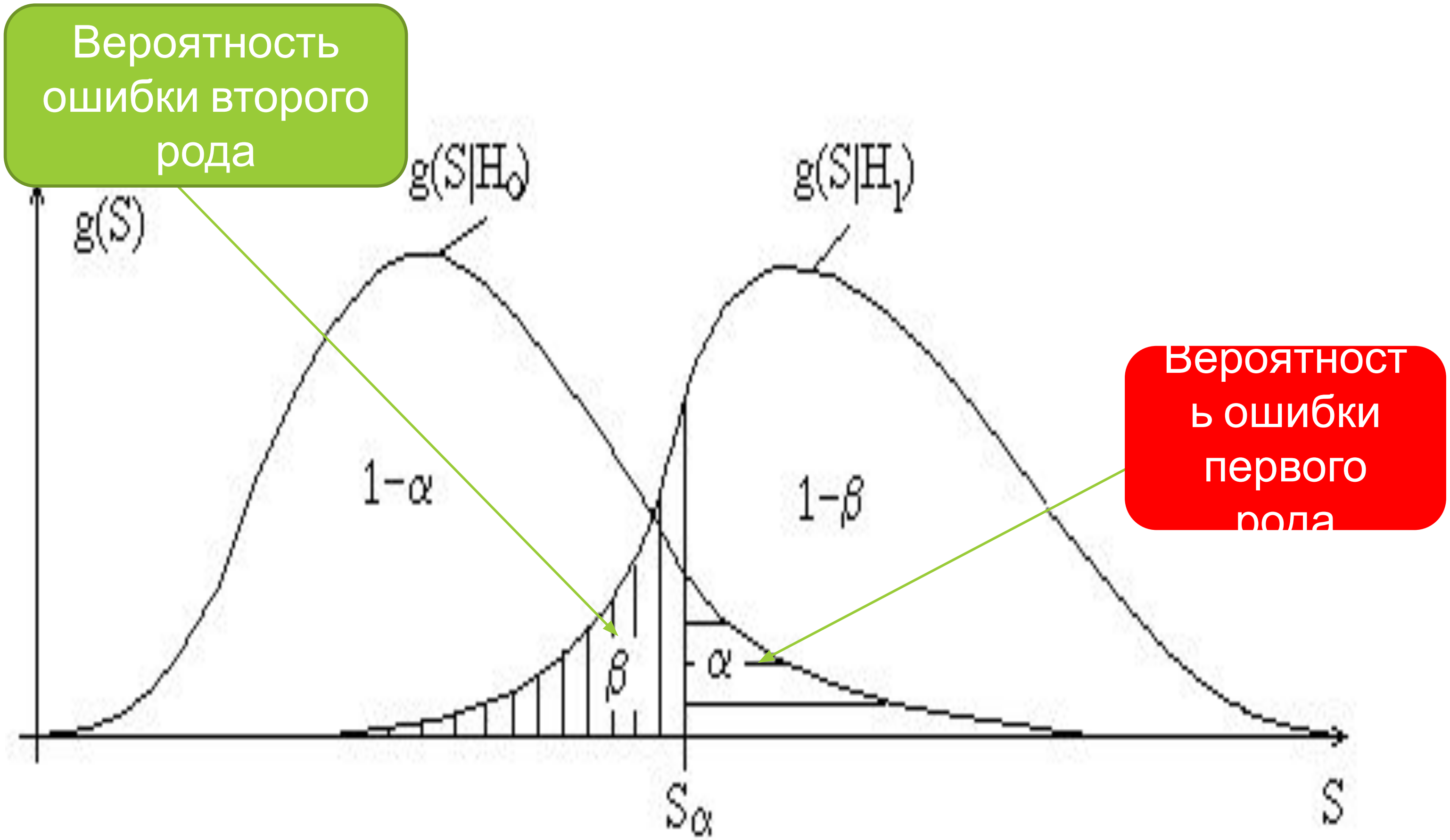
Статистическая ошибка второго рода (Type II Error) - не обнаружить различия или связи, которые на самом деле существуют

«Судебная» аналогия: Вердикт «Не виновен» или «Виновен»

Ошибка первого рода - невинный обвинен

Ошибка второго рода - виновный освобожден

Ошибки первого и второго рода



Этапы проверки гипотезы о параметрах распределения

1. формулируются гипотезы H_0 и H_1;

2. задается уровень значимости α;

3. выбирается статистика Z *критерия* для проверки H_0; определяется выборочное распределение статистики Z *при условии, что верна* H_0;

4. в зависимости от H_1 определяется критическая область;

5. вычисляется выборочное значение статистики z;

6. принимается статистическое решение.

Статистическое решение

Если $z_в$ принадлежит критической области

- Отклонить гипотезу H_0 как несогласующуюся с результатами наблюдений

Если $z_в$ не принадлежит критической области

- Принять гипотезу $H_{0,}$ т.е. считать, что она не противоречит результатам наблюдений

Замечания

1. На этапах 4-7 используют статистику, квантили которой табулированы.

2. В статистических пакетах обычно не используется значения задаваемого уровня значимости. В выходных данных содержатся выборочные значения статистики критерия и вероятность того, что с.в. превышает выборочное значение.

Эта вероятность называется p-значением (p-level).

Пример 1

Сб. задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. А.В. Ефимова.

По паспортным данным автомобильного двигателя расход топлива на 100 км. пробега составляет 10л. В результате изменения конструкции двигателя ожидается, что расход топлива уменьшится. Для проверки проводятся испытания 25 случайно отобранных автомобилей с модернизированным двигателем, причем выборочное среднее расходов топлива на 100 км. пробега по результатам испытаний составило 9,3 л. Предположим, что выборка расходов топлива получена из нормально распределенной генеральной совокупности со средним a и дисперсией 4 $л^2$. Используя критерий значимости, проверить гипотезу, утверждающую, что изменение конструкции двигателя не повлияло на расход топлива.

Пример 2

- В условиях примера 1 предположим, что наряду с гипотезой H_0 :a=10л рассматривается альтернативная гипотеза H_1 :a=9л. В качестве статистики критерия рассмотрим выборочное среднее $\overline{X}$. Предположим, что критическая область задана неравенством $\overline{X} <$ 9,44л. Найти вероятности ошибок первого и второго рода для критерия с такой критической областью.

Критерии согласия

Пусть x_1 , x_2 ….. x_n– выборка наблюдений случайной величины *X*.

Проверяется гипотеза H_0 о том, что случайная величина *X* имеет функцию распределения *F*(*x*).

- 1. По выборке наблюдений находят оценки неизвестных параметров предполагаемого закона распределения с.в. X.
- 2. Область возможных значений с.в. X разбивается на r множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_r$. Если X-непрерывная с.в., то на r интервалов, если X-дискретная с.в., то r-число групп.
- 3. Подсчитывается число элементов выборки - n_k, принадлежащих множеству $\Delta_к$, к=1,2, ….r. $\sum_1^r n_k=n$.

Критерий χ^2

4. Используя предполагаемый закон распределения с.в. X, находят вероятности $p_k = P[X \in \Delta_к]$, к=1,2, ….r. Очевидно, что $\sum p_i = 1$.

5. **Выборочное значение** статистики критерия вычисляется по формуле

$$\chi^2_{\text{в}} = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

Критерий χ^2

6. Гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости , если $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{1-\alpha}(r\text{-}l\text{-}1)$,

где $\chi^2_{1-\alpha}(r\text{-}l\text{-}1)$ – *квантиль порядка* $1\text{-}\alpha$ *распределения* χ^2 *с* $(r\text{-}l\text{-}1)$ *степенями свободы, l – число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке.*

Необходимо, чтобы для всех интервалов выполнялось условие $np_k \geq 5$.

Если для некоторых интервалов это условие не выполняется, то их следует объединить с соседними.

Проверить гипотезу:
$H_0 : a = a_0,$ где $a_0 = \overline{x} + 0{,}5s$

$a_0 = \overline{x} + 0{,}5s = 11 + 0{,}5 \cdot 2{,}97 = 12{,}48 \approx \mathbf{12{,}5}$ $\quad S = 2{,}97 \approx 3$

1. $H_0 : a = 12{,}5$

   $H_1 : a > 12{,}5$

2. уровень значимости $\alpha = 0{,}05$

3. статистика $T = \dfrac{\overline{x} - a_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

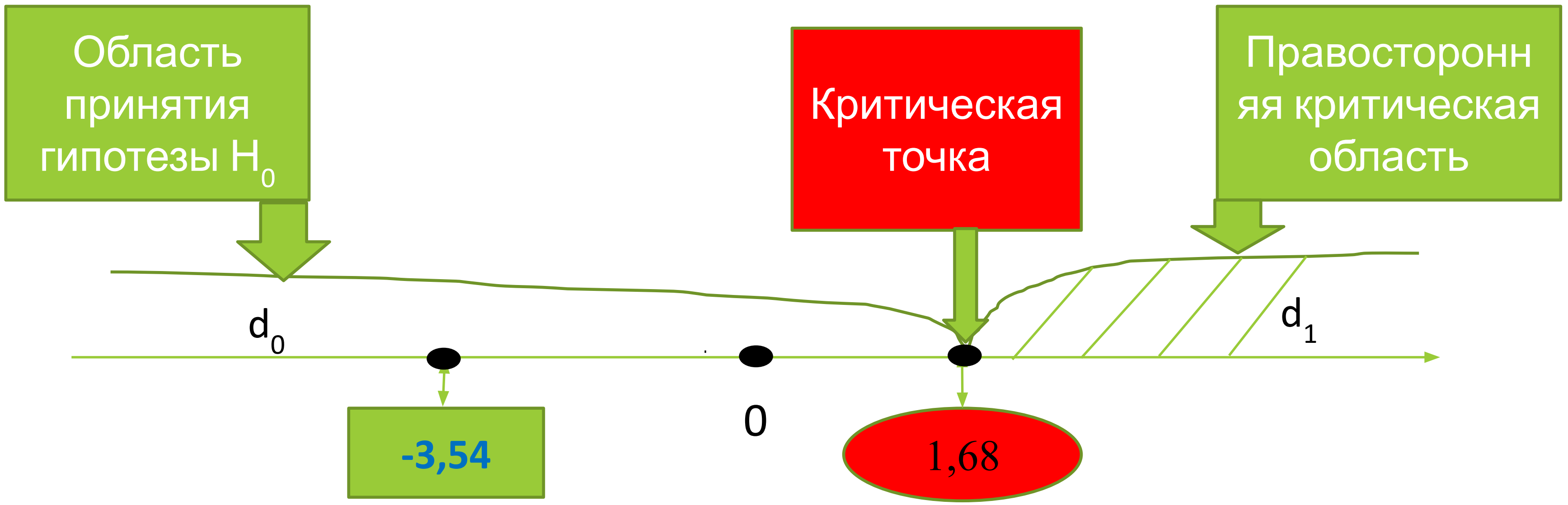
4. $t_{крит.} = t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0{,}95}(49) = 1{,}68$

5. $T_{выб} = \dfrac{11 - 12{,}5}{3/\sqrt{50}} = \mathbf{-3{,}54}$

Статистическое решение: принять гипотезу H_0, т.е. считать что она не противоречит результатам наблюдений

4. $t_{\text{крит.}} = t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0,95}(49) = \mathbf{1{,}68}$ 5. $T_{\text{выб}} = \dfrac{11-12{,}5}{3/\sqrt{50}} = \mathbf{-3{,}54}$

6. статистическое решение:



Проверить гипотезу:

$H_0: \boldsymbol{\sigma^2} = \sigma_0^2$, где $\sigma_0^2 = 3s$

1. $H_0: \boldsymbol{\sigma^2} =$ 8,91 S=2,97 $\sigma_0^2 = \mathbf{3s} = 8{,}91$

2. уровень значимости α=0,05

$H_1: \boldsymbol{\sigma^2} \neq \mathbf{8,91}$

3. статистика $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2\,(n-1)$

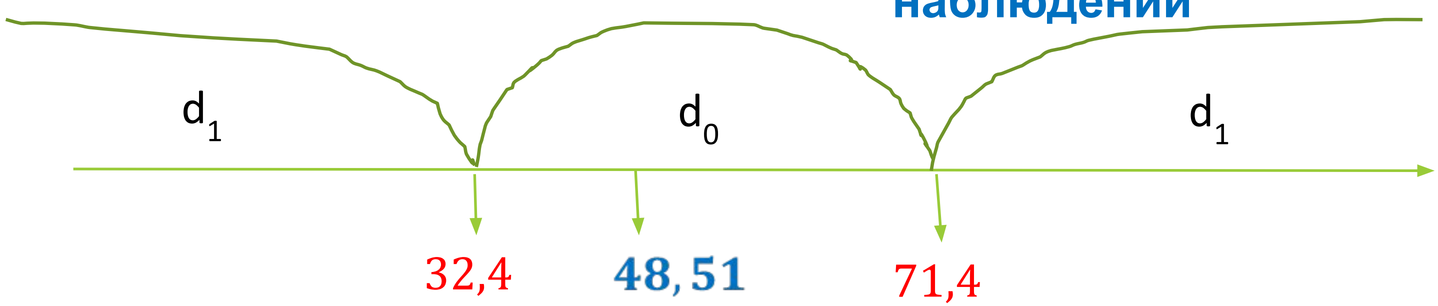
4. $\chi^2_{\alpha/2}\,(n-1) = \chi^2_{0,025}\,(49) = 32{,}4$

$\chi^2_{1-\alpha/2}\,(n-1) = \chi^2_{1-0,025}\,(49) = \chi^2_{0,975}\,(49) = 71{,}4$

5. $\chi^2_{\text{выб}} = \dfrac{49 \cdot 8{,}82}{8{,}91} = \mathbf{48,51}$

Статистическое решение:
принять гипотезу H_0, т.е. считать что она не противоречит результатам наблюдений

6.



Критерий χ^2

Объем выборки n=50.

Оценка математического ожидания $\overline{x}$ =11

Оценка дисперсии S^2 = 8,82 S=2,97 ≈ 3

1. H_0: X распределена по нормальному закону

2. уровень значимости α=0,05

3. $\chi^2_{\text{в}} = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$

$$p_k = P[X \in \Delta_к] = \Phi\left(\frac{c_{к+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{c_к - \bar{x}}{s}\right)$$

Номер интервала	Границы интервалов					
1			- 1,67	**- 0,5**	**- 0,4525**	0,0475
2	6 - 8	- 1,67	- 1	**- 0,4525**	**- 0,3413**	0,1112
3	8 - 10	- 1	- 0,33	**- 0,3413**	**- 0,1293**	0,212
4	10 - 12	- 0,33	0,33	**- 0,1293**	**0,1293**	0,2586
5	12 - 14	0,33	1	**0,1293**	**0 ,3413**	0,212
6	14 - 16	1	1,67	**0 ,3413**	**0, 4525**	0,1112
7		1,67		**0, 4525**	**0 ,5**	0,0475
						1

Выборочное значение статистики критерия

Номер интервала	Наблюдаемая частота n_k		Ожидаемая частота			
1	2	0,0475	2,375			
2	7	0,1112	5,56	7,935	1,065	0,143
3	9	0,212	10,6	10,6	-1,6	0,242
4	13	0,2586	12,93	12,93	0,07	0,000
5	11	0,212	10,6	10,6	0,4	0,015
6	6	0,1112	5,56	7,935	0,065	0,001
7	2	0,0475	2,375			
	50	1	50			0,401

Статистическое решение

Гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости , если $\chi^2_{В} < \chi^2_{1-\alpha}$*(r-l-1),*

где $\chi^2_{1-\alpha}$*(r-l-1) – квантиль порядка* $1\text{-}\alpha$ *распределения* χ^2 с *(r-l-1) степенями свободы, l – число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке.*

r=5; l=2

Число степеней свободы *r-l-1 = 5-2-1=2*

$\chi^2_{1-\alpha}$*(r-l-1)=* $\chi^2_{1-0,05}$*(2) =*$\chi^2_{0,95}$*(2)=5,99*

$\chi^2_{В}$ = 0,401

Гипотеза о нормальном распределении выборки согласуется с результатами наблюдений