

Функция. Свойства функции.

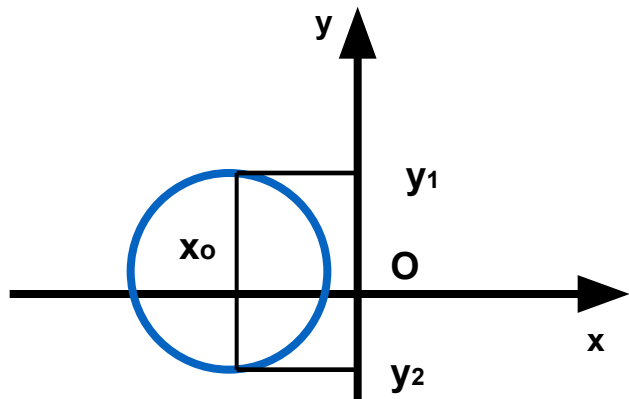
Определение функции

Зависимость между двумя переменными x и y , при котором **каждому** значению переменной x соответствует **единственное** значение переменной y называют **функцией**.

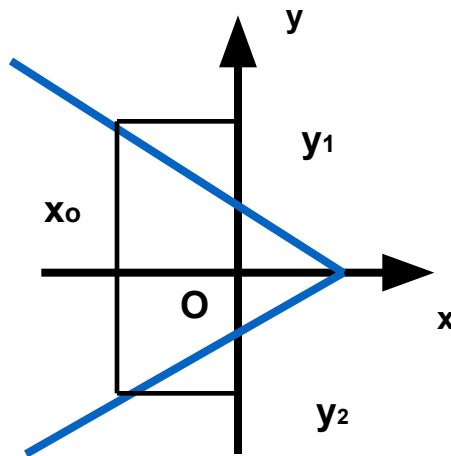
Обозначают **$y = f(x)$** ,

где x – независимая переменная (аргумент),

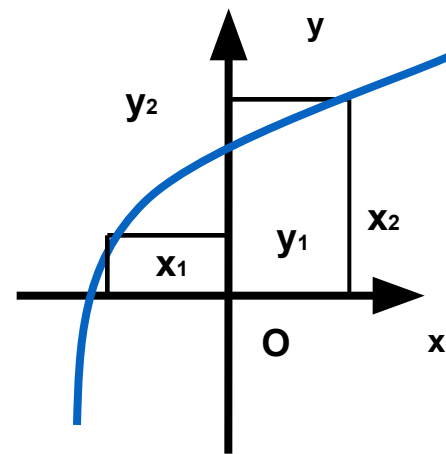
$y = f(x)$ – зависимая переменная (функция).



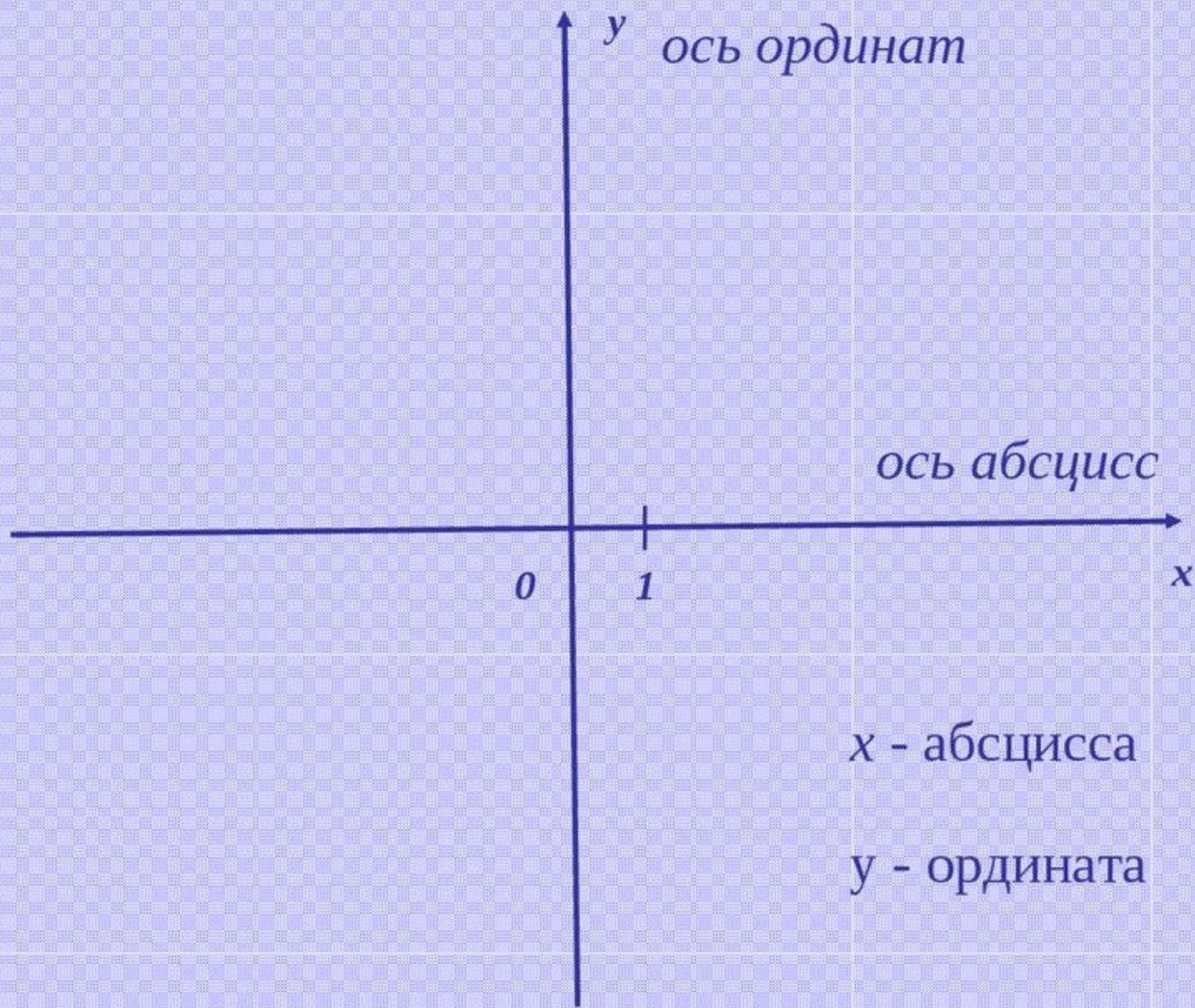
Не является функцией



Не является функцией



Является функцией



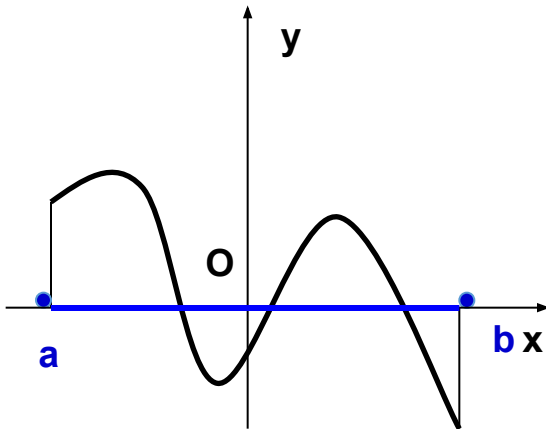
Алгоритм исследования функции

- *Область определения.*
- *Область значений.*
- *Четность, нечетность функции.*
- *Возрастание, убывание функции.*
- *Ограниченность функции.*
- *Наибольшее, наименьшее значения функции.*
- *Непрерывность функции.*
- *Выпуклость, вогнутость функции.*

Область определения функции

Множество всех допустимых значений x (аргумента, независимой переменной) при которых выражение имеет смысл.

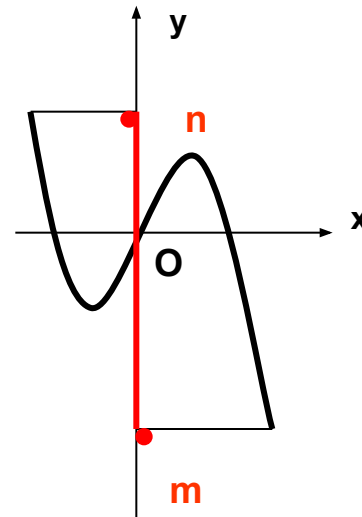
Обозначение: $D(f) = [a;b]$



Область значений функции

Множество всех значений функции $y = f(x)$, где x принадлежит X (области определения).

Обозначение: $E(f) = [m;n]$



Способы задания функции

Аналитический (формулой)

1) $y = 2x + 5;$

2) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < -2; \\ 0,5x + 3, & \text{если } -2 \leq x \leq 2; \\ 7 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

Описанием (с помощью естественного языка)

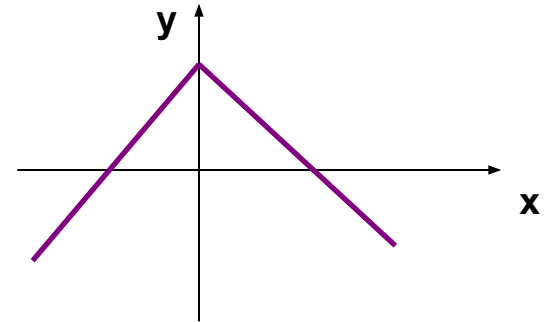
Например:

«Каждому отрицательному числу соответствует -1 , нулю – число 0 , а каждому положительному – число 1 »

Табличный.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n ²	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Графический

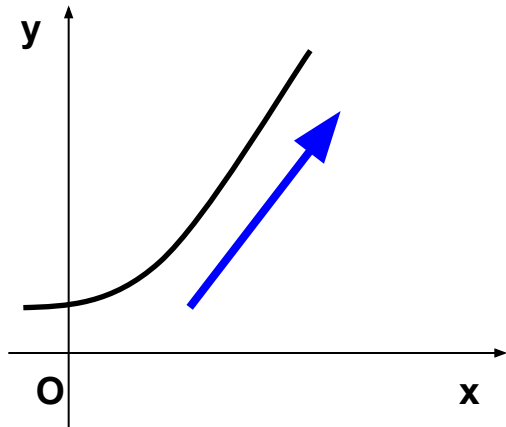


Свойства функции

• Возрастание

Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей** на множестве $D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 области определения, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

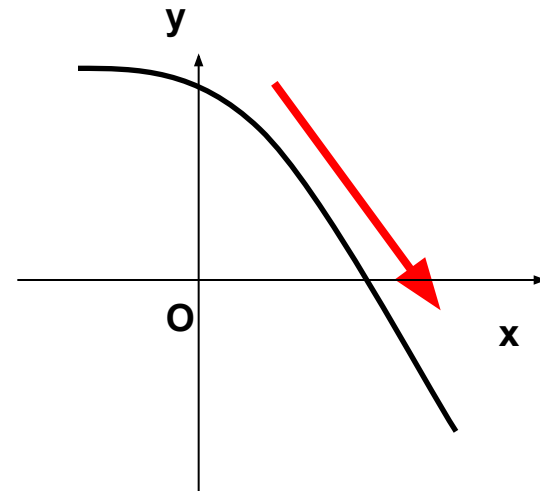
(Если **большему значению** аргумента соответствует **большее значение** функции)



• Убывание

Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей** на множестве $D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 области определения, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

(Если **большему значению** аргумента соответствует **меньшее значение** функции)

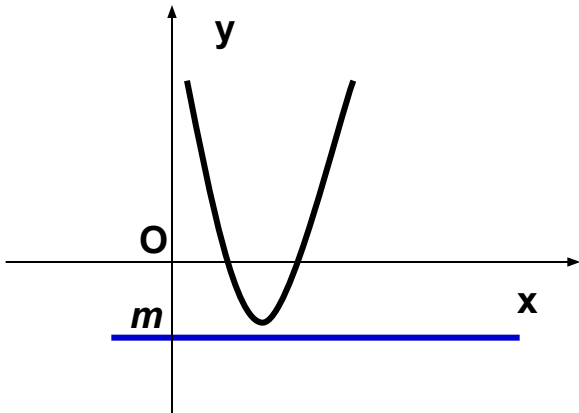


- Термины **«возрастающая»**, **«убывающая»** функция объединяют общим названием **МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ**.

Ограниченность функции

- Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу** на множестве $D(f)$, если все значения функции на области определения **больше** некоторого числа.

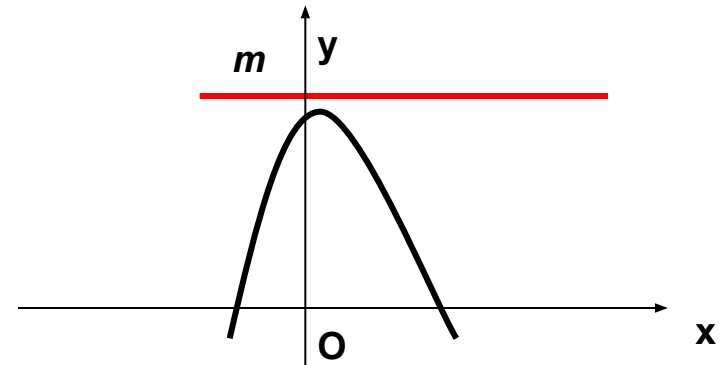
(Если существует число m такое, что для любого значения x области определения выполняется неравенство $f(x) > m$.)



- Если функция **ограничена снизу**, то ее **график** целиком **расположен выше** некоторой горизонтальной **прямой** $y = m$.

- Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху** на множестве $D(f)$, если все значения функции на области определения **меньше** некоторого числа.

(Если существует число m такое, что для любого значения x области определения выполняется неравенство $f(x) < m$.)



- Если функция **ограничена сверху**, то ее **график** целиком **расположен ниже** некоторой горизонтальной **прямой** $y = m$.

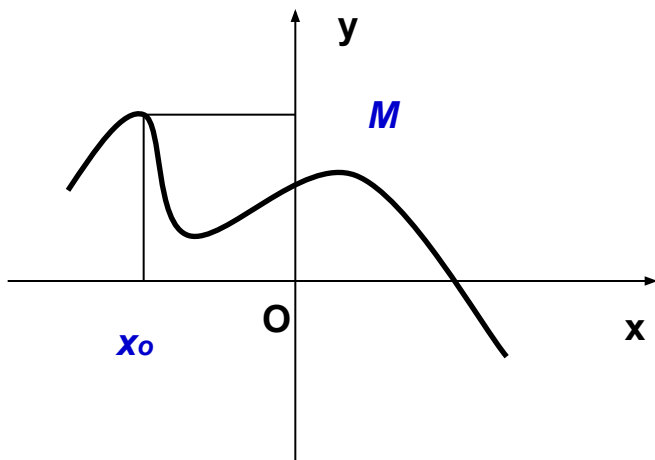
- Если функция **ограничена и сверху и снизу**, то ее называют **ограниченной**.

Наибольшее (наименьшее) значения функции

• Число M называют **наибольшим** значением функции $y = f(x)$ на множестве $D(f)$, если:

- 1) в области определения существует такая точка x_0 , что $f(x_0) = M$;
- 2) для всех x из области определения выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Обозначение: $y_{\text{наиб.}} = y(x_0) = M$.

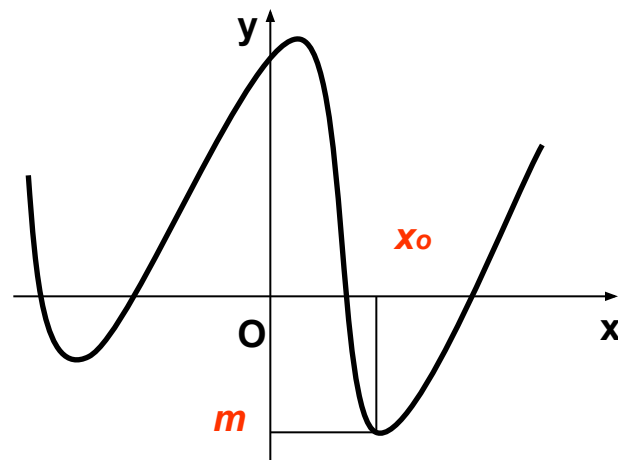


- Если у функции **существует $y_{\text{наиб.}}$** , то она **ограничена сверху**.
- Если функция **не ограничена сверху**, то **$y_{\text{наиб.}}$ не существует**.

• Число m называют **наименьшим** значением функции $y = f(x)$ на множестве $D(f)$, если:

- 1) в области определения существует такая точка x_0 , что $f(x_0) = m$;
- 2) для всех x из области определения выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

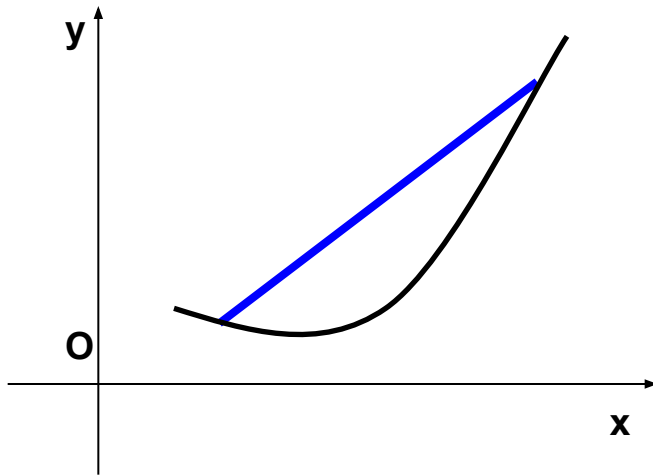
Обозначение: $y_{\text{наим.}} = y(x_0) = m$.



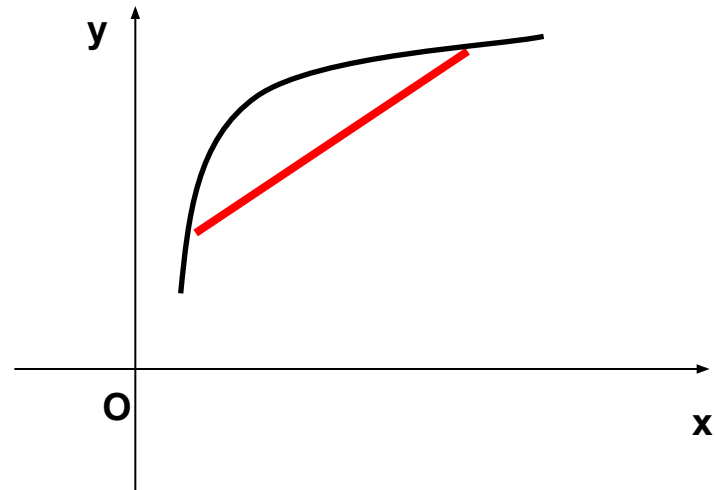
- Если у функции **существует $y_{\text{наим.}}$** , то она **ограничена снизу**.
- Если функция **не ограничена снизу**, то **$y_{\text{наим.}}$ не существует**.

Выпуклость, вогнутость функции

- Функция **выпукла вниз**, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит **ниже** проведенного отрезка.



- Функция **выпукла вверх**, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит **выше** проведенного отрезка.



Четность, нечетность функции

Функция $y = f(x)$ называют **четной**, если:

- 1) Область определения ее симметрична относительно начала координат;
- 2) Для любого x из $D(y)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

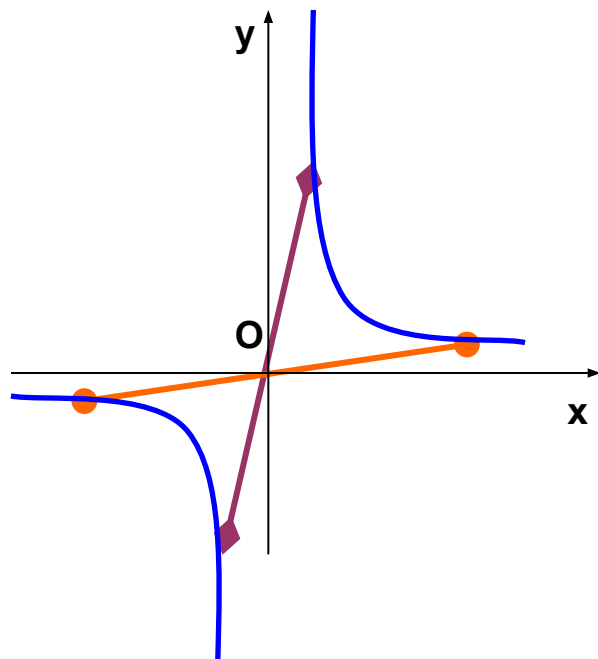


График симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называют **нечетной**, если:

- 1) Область определения ее симметрична относительно оси ОУ;
- 2) Для любого x из $D(y)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

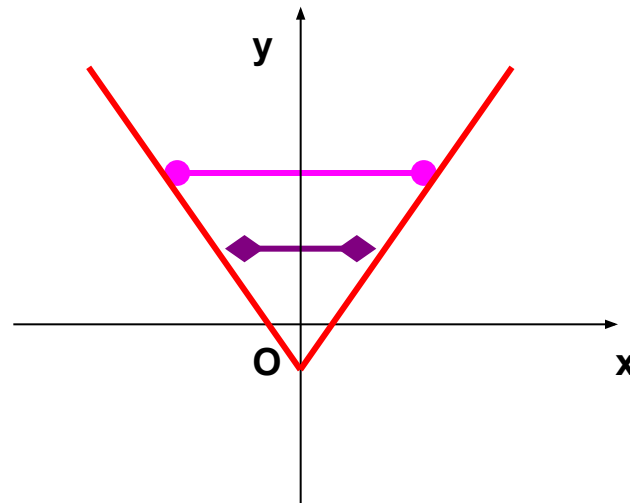
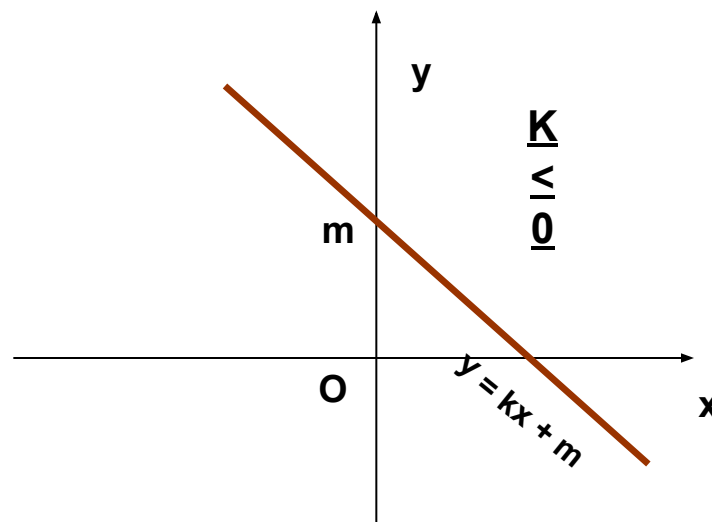
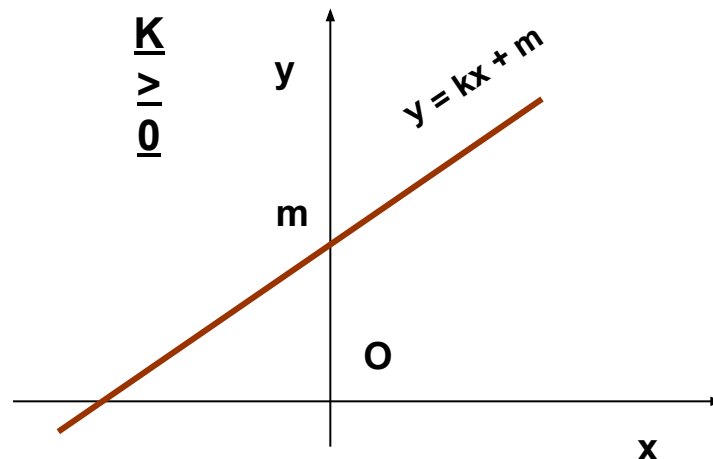


График симметричен относительно оси ОУ.

Линейная функция

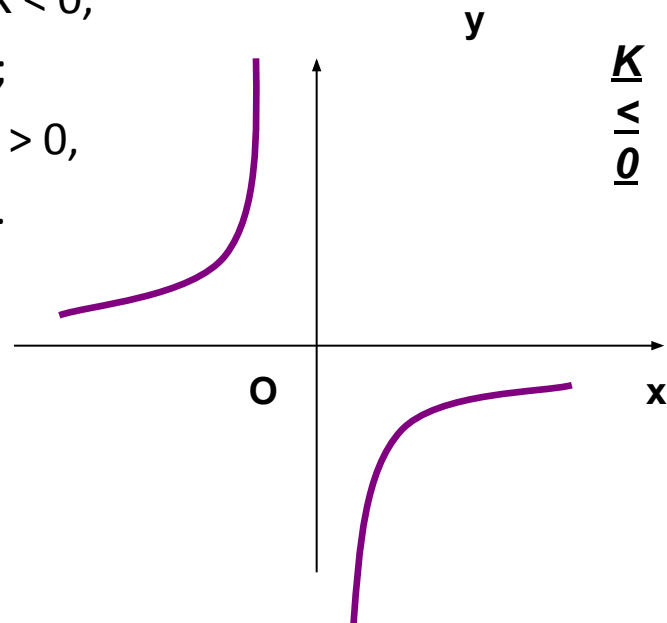
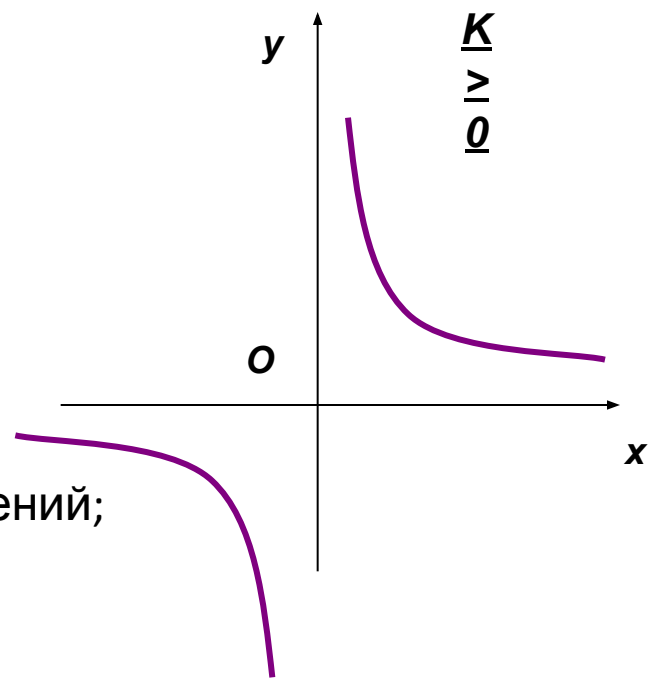
$$y = kx + m (k \neq 0)$$

1. $D(f) = \mathbb{R}$;
2. Не является ни четной ни нечетной;
3. Если $k > 0$, возрастает, если $k < 0$ убывает;
4. Не ограничена ни снизу, ни сверху;
5. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
6. Функция непрерывна;
7. $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Не имеет выпуклости.



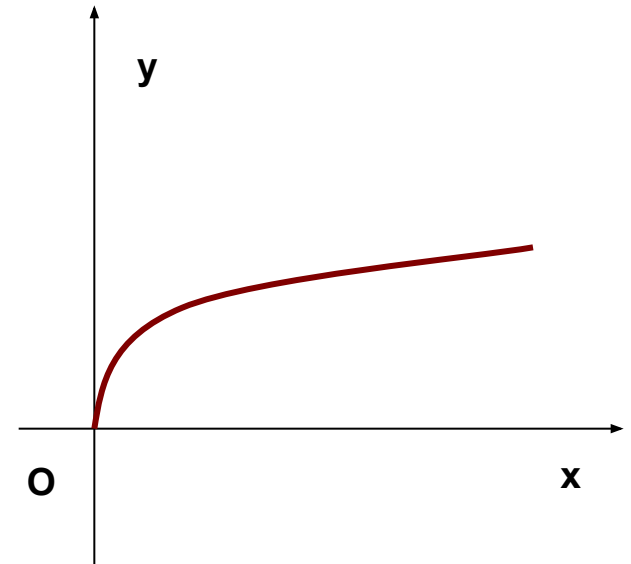
Функция $y = \frac{k}{x}$

1. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2. Нечетная функция;
3. Если $k > 0$, то функция убывает на $D(f)$,
если $k < 0$, то функция возрастает на $D(f)$;
4. Не ограничена ни сверху, ни снизу;
5. Нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;
6. Функция терпит разрыв в точке $x = 0$;
7. $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Если $k > 0$, то функция выпукла вверх при $x < 0$,
и выпукла вниз при $x > 0$;
Если $k < 0$, то функция выпукла вверх при $x > 0$,
и выпукла вниз при $x < 0$.

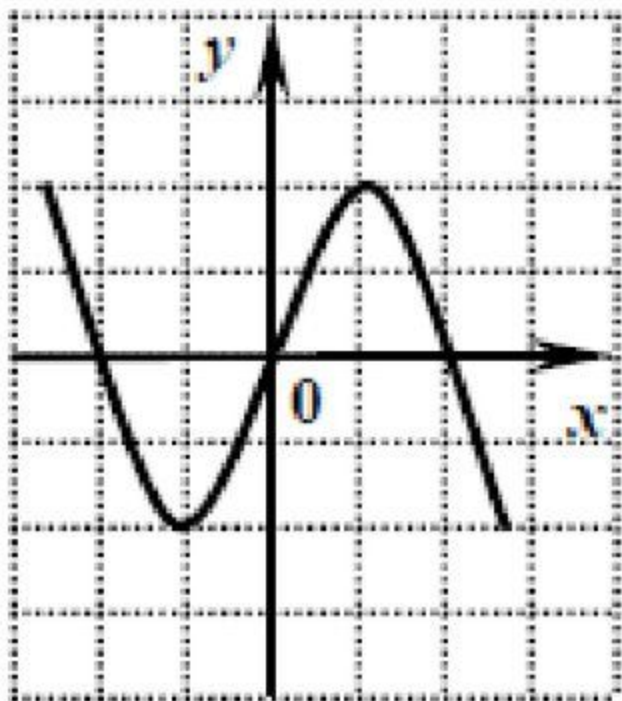


Функция $y = \sqrt{x}$

1. $D(f) = [0; +\infty)$;
2. Не является ни четной ни нечетной;
3. Возрастает;
4. Не ограничена ни снизу, ни сверху;
5. Наибольшего значения нет, наименьшее значение 0, при $x = 0$;
6. Функция непрерывна;
7. $E(f) = [0; +\infty)$
8. Выпукла вверх.



Выполните самостоятельно

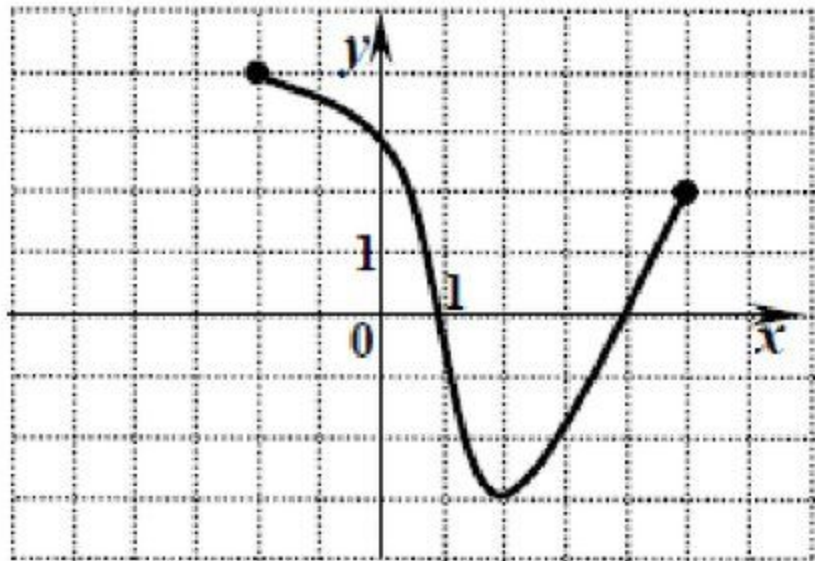


Для функции $y = f(x)$,
представленной на рисунке,
укажите:

- а) область ее определения;
- б) множество значений;
- в) нули функции;
- г) промежутки
знакопостоянства функции;
- д) промежутки возрастания,
убывания функции;
- е) наибольшее, наименьшее
значение функции.



Выполните самостоятельно



Для функции $y = f(x)$, представленной на рисунке, укажите:

- область ее определения;
- множество значений;
- нули функции;
- промежутки знакопостоянства функции;
- промежутки возрастания, убывания функции;
- наибольшее, наименьшее значение функции.

