КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Основные понятия

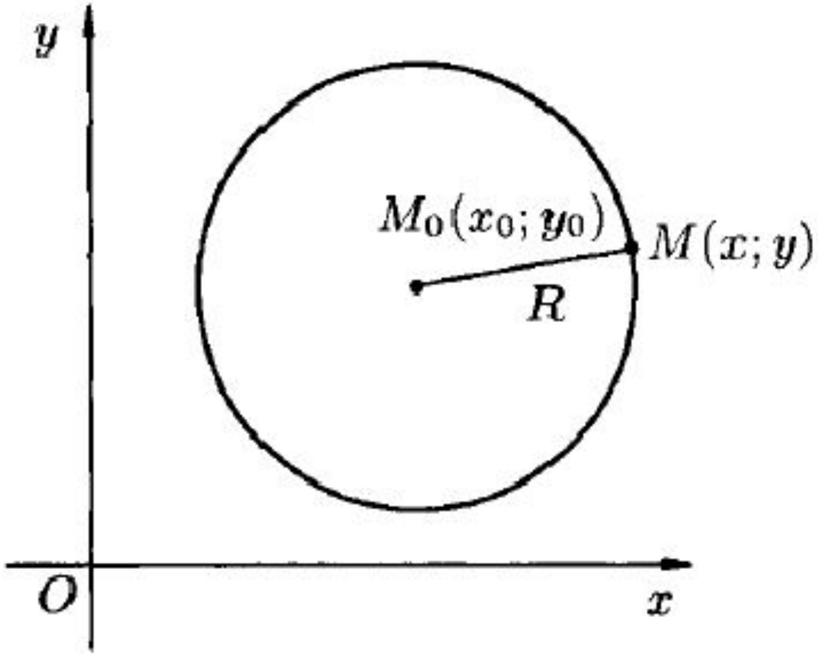
Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения — действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Такие линии называются *линиями (кривыми) второго порядка*. Ниже будет установлено, что уравнение (1) определяет на плоскости окружность, эллипс, гиперболу или параболу. Прежде, чем переходить к этому утверждению, изучим свойства перечисленных кривых.

Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что ***окружностью*** радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$. Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат Oxy имеет координаты x_0, y_0, а $M(x;y)$ — произвольная точка окружности (см. рис.).



Тогда из условия $M_0M = R$ получаем уравнение

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R,$$

то есть

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.} \quad (2).$$

Уравнение (2) называется *каноническим уравнением окружности.*

В частности, полагая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение окружности (.2) после несложных преобразований примет вид $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$. При сравнении этого уравнения с общим уравнением (1). кривой второго порядка легко заметить, что для уравнения окружности выполнены два условия:

1) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой;

2) отсутствует член, содержащий произведение xy текущих координат.

Рассмотрим обратную задачу. Положив в уравнении (1). значения $B = 0$ и $A = C \neq 0$, получим

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (.3)$$

Преобразуем это уравнение:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{D^2}{A^2} + y^2 + 2\frac{E}{A}y + \frac{E^2}{A^2} + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{A^2} - \frac{E^2}{A^2} = 0,$$

т. е.

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что уравнение (3) определяет окружность при условии $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}>0$. Ее центр находится в точке $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$, а радиус

$$R=\sqrt{\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}}.$$

Если же $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}=0$, то уравнение имеет вид $\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=0.$

Ему удовлетворяют координаты единственной точки $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$. В этом случае говорят: «окружность выродилась в точку» (имеет нулевой радиус).

Если $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}<0$, то уравнение (4), а следовательно, и равносильное уравнение (3), не определяет никакой линии, так как правая часть уравнения (4). отрицательна, а левая часть — не отрицательна (говорят: «окружность мнимая»).

Пример Найти координаты центра и радиус окружности $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$.

△ Разделив уравнение на 2 и сгруппировав члены уравнения, получим $x^2-4x+y^2+(5/2)y=2$. Дополним выражения x^2-4x и $y^2+(5/2)y$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 4 и ко второму $(5/4)^2$ (одновременно к правой части прибавляется сумма этих чисел):

$$(x^2-4x+4)+\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}\right)=2+4+\frac{25}{16},$$

или

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}.$$

Таким образом, координаты центра окружности $a=2$, $b=-5/4$, а радиус окружности $r=11/4$.

Пример Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы уравнениями $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

△ Найдем координаты вершин треугольника, решив совместно три системы уравнений:

$$\begin{cases} 9x-2y-41=0, \\ 7x+4y+7=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x-2y-41=0, \\ x-3y+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x+4y+7=0, \\ x-3y+1=0. \end{cases}$$

В результате получим $A(3; -7)$, $B(5; 2)$, $C(-1; 0)$.

Пусть искомое уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Для нахождения a, b и r напишем три равенства, подставив в искомое уравнение вместо текущих координат координаты точек A, B и C:

$$(3-a)^2+(-7-b)^2=r^2; \quad (5-a)^2+(2-b)^2=r^2; \quad (-1-a)^2+b^2=r^2.$$

Исключая r^2, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} (3-a)^2+(-7-b)^2=(5-a)^2+(2-b)^2, \\ (3-a)^2+(-7-b)^2=(-1-a)^2+b^2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4a+18b=-29, \\ 8a-14b=57. \end{cases}$$

Отсюда $a=3{,}1$, $b=-2{,}3$. Значение r^2 находим из уравнения $(-1-a)^2+b^2=r^2$, т. е. $r^2=22{,}1$. Итак, искомое уравнение записывается в виде $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$

Пример. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A\ (5;\ 0)$ и $B\ (1;\ 4)$, если ее центр лежит на прямой $x+y-3=0$.

Найдем координаты точки M — середины хорды AB; имеем $x_M=(5+1)/2=3$, $y_M=(4+0)/2=2$, т. е. $M\ (3;\ 2)$. Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Уравнение прямой AB имеет вид

$$(y-0)/(4-0)=(x-5)/(1-5),\ \text{т. е.}\ x+y-5=0.$$

Так как угловой коэффициент этой прямой есть -1, то угловой коэффициент перпендикуляра к ней равен 1, а уравнение этого перпендикуляра $y-2=1\times\times(x-3)$, т. е. $x-y-1=0$.

Очевидно, что центр окружности C есть точка пересечения прямой AB с указанным перпендикуляром, т. е. координаты центра определяются путем решения системы уравнений $x+y-5=0$, $x-y-1=0$. Следовательно, $x=2$, $y=1$, т. е. $C\ (2;\ 1)$. Радиус окружности равен длине отрезка CA, т. е. $r=\sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$.

Итак, искомое уравнение имеет вид $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

Пример Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2=2x+4y-4$ относительно прямой $x-y-3=0$.

△ Приведем уравнение данной окружности к каноническому виду $(x-1)^2+(y-2)^2=1$; центр окружности находится в точке $C(1;\ 2)$ и ее радиус равен 1.

Найдем координаты центра $C_1(x_1;\ y_1)$ симметричной окружности, для чего через точку $C(1;\ 2)$ проведем прямую, перпендикулярную прямой $x-y-3=0$; ее уравнение $y-2=k(x-1)$, где $k=-1/1=-1$, откуда $y-2=-x+1$, или $x+y-3=0$.

Решая совместно уравнения $x-y-3=0$ и $x+y-3=0$, получим $x=3, y=0$, т. е. проекция точки $C(1;\ 2)$ на данную прямую — точка $P(3;\ 0)$. Координаты же симметричной точки получим по формулам координат середины отрезка: $3=(1+x_1)/2$, $0=(2+y_1)/2$; таким образом, $x_1=5$, $y_1=-2$. Значит, точка $C_1(5;\ -2)$ — центр симметричной окружности, а уравнение этой окружности имеет вид $(x-5^2)+(y+2)^2=1$.

Эллипс

Каноническое уравнение эллипса

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

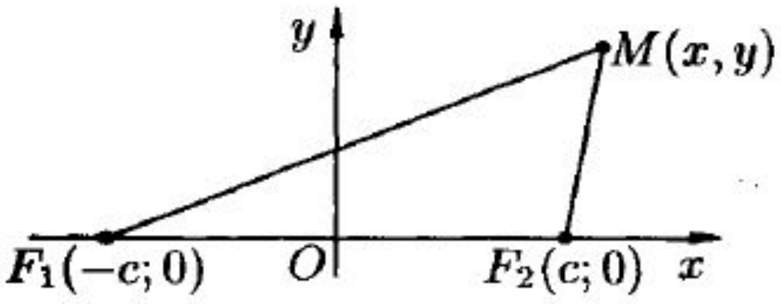


Рис. 49

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов — через $2a$ (см. рис. 49). По определению $2a > 2c$, т. е. $a > c$.

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда, согласно определению эллипса, $MF_1 + MF_2 = 2a$, т. е.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (5)$$

Это, по сути, и есть уравнение эллипса.

Преобразуем уравнение (11.5) к более простому виду следующим образом:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$$
$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Положим

$$\boxed{a^2-c^2=b^2.} \qquad (.6)$$

Тогда последнее уравнение примет вид $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \qquad (7)$$

Можно доказать, что уравнение (.7) равносильно исходному уравнению. Оно называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Эллипс — кривая второго порядка.

Исследование формы эллипса по его уравнению

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

1. Уравнение (.7) содержит x и y только в четных степенях, поэтому если точка $(x;y)$ принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$. Отсюда следует, что эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют *центром эллипса*.

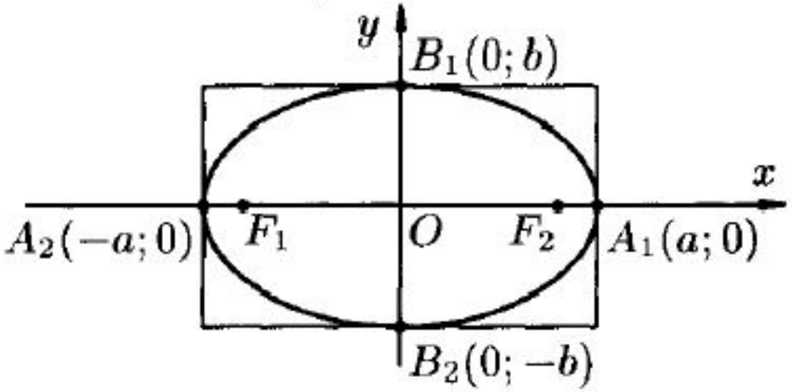


Рис.

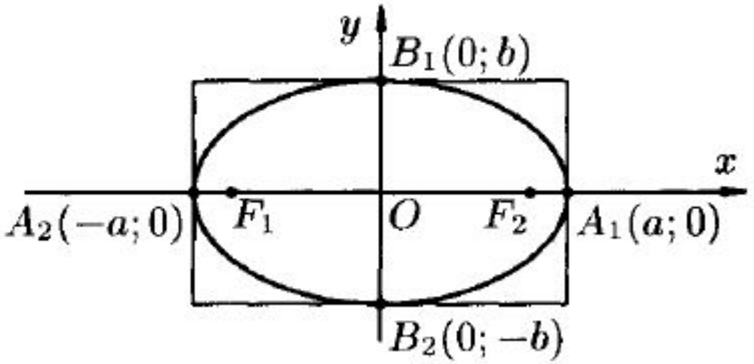
2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив $y=0$, находим две точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс (см. рис.). Положив в уравнении (.7) $x=0$, находим точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса*. Отрезки A_1A_2 и

B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно *большой и малой осями* эллипса. Числа a и b называются соответственно большой и малой *полуосями* эллипса.

3. Из уравнения (.7). следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т. е. имеют место неравенства $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ или $-a \leqslant x \leqslant a$ и $-b \leqslant y \leqslant b$. Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. В уравнении (.7) сумма неотрицательных слагаемых $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т. е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается и наоборот.

Из сказанного следует, что эллипс имеет форму, изображенную на рис. (овальная замкнутая кривая).



Дополнительные сведения об эллипсе

Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$. При $b = a$ эллипс превращается в окружность, уравнение эллипса (7). принимает вид $x^2+y^2 = a^2$.
В качестве характеристики формы эллипса чаще пользуются отношением $\frac{c}{a}$.

Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса называется ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначается буквой ε («эпсилон»):

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a},} \qquad (8).$$

причем $0 < \varepsilon < 1$, так как $0 < c < a$. С учетом равенства (6) формулу (8) можно переписать в виде

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

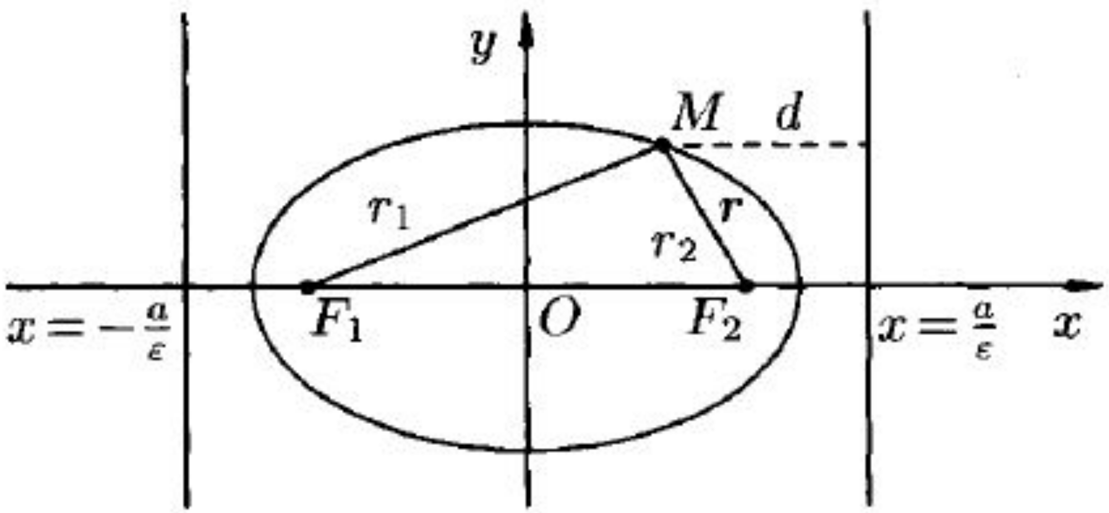
т. е.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплющенным; если положить $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2 (см. рис) Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются *фокальными радиусами* точки M. Очевидно,

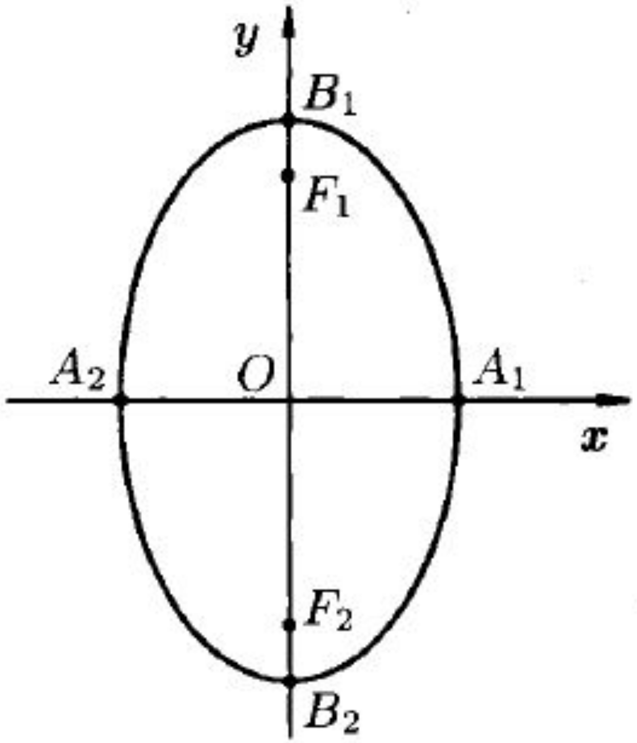
$$r_1 + r_2 = 2a.$$



Имеют место формулы

$$r_1 = a + \varepsilon x \quad \text{и} \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами*** эллипса. Значение директрисы эллипса выявляется следующим утверждением.



Теорема.1. Если r — расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Из равенства (.6) следует, что $a > b$. Если же $a < b$, то уравнение (.7) определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, а малая ось $2a$ — на оси Ox (см. рис.). Фокусы такого эллипса находятся в точках $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Пример Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\,(5/2;\ \sqrt{6}/4)$ и $N\,(-2;\ \sqrt{15}/5)$.

△ Пусть $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ — искомое уравнение эллипса. Этому уравнению должны удовлетворять координаты данных точек. Следовательно,

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1,\quad \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1.$$

Отсюда находим $a^2=10$, $b^2=1$. Итак, уравнение эллипса имеет вид $x^2/10+y^2=1$.

Пример Какую линию определяет уравнение $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$?

△ Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$4\,(x^2-2x)+9\,(y^2-4y)=-4;$$

$$4\,(x^2-2x+1-1)+9\,(y^2-4y+4-4)=-4;$$

$$4\,(x-1)^2+9\,(y-2)^2=-4+4+36;\quad 4\,(x-1)^2+9\,(y-2)^2=36.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O'\,(1;\ 2)$. Воспользуемся формулами преобразования координат: $x=x'+1$, $y=y'+2$. Относительно новых осей уравнение кривой примет вид

$$4x'^2+9y'^2=36,\quad \text{или}\quad x'^2/9+y'^2/4=1.$$

Таким образом, заданная кривая является эллипсом.

Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

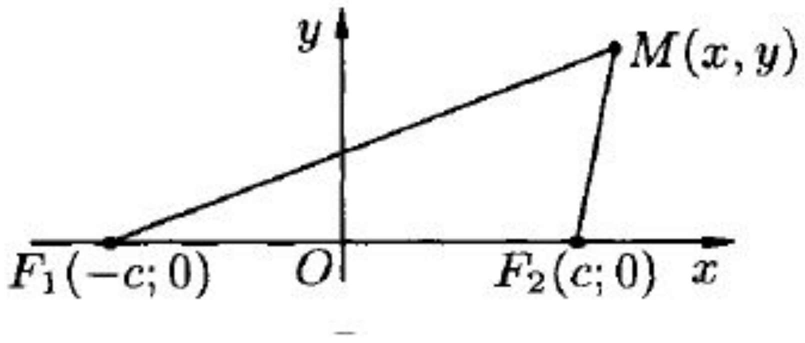


Рис.

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а модуль разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов через $2a$. По определению $2a < 2c$, т. е. $a < c$.

Для вывода уравнения гиперболы выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2 (см. рис.). Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка гиперболы. Тогда согласно определению гиперболы $|MF_1 - MF_2| = 2a$ или $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$, т. е. $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$. После упрощений, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим ***каноническое уравнение гиперболы***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{9}$$

где

$$\boxed{b^2 = c^2 - a^2.} \tag{10}$$

Гипербола есть линия второго порядка.

Исследование формы гиперболы по ее уравнению

Установим форму гиперболы, пользуясь ее каконическим уравнением.

1. Уравнение $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,}$ содержит x и y только в четных степенях.

Сле довательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют ***центром гиперболы*** .

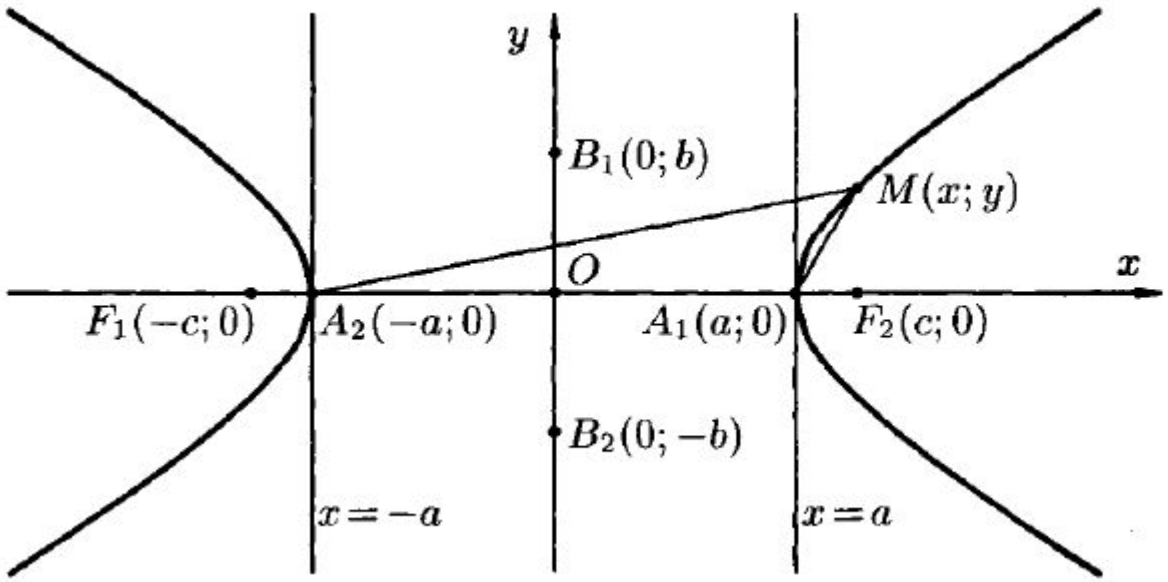
2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Поло жив $y = 0$ в уравнении (.9), находим две точки пересечения гиперболы с осью Ox: $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$. Положив $x = 0$ в (.9), получаем $y^2 = -b^2$. Следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются ***вершинами*** гиперболы, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ — ***действительной осью***, отрезок $OA_1 = OA_2 = a$ — ***действительной полуосью*** гиперболы.

Отрезок B_1B_2 ($B_1B_2 = 2b$), соединяющий точки $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называется ***мнимой осью***, число b — ***мнимой полуосью.*** Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется ***основным прямоуголь ником гиперболы.***

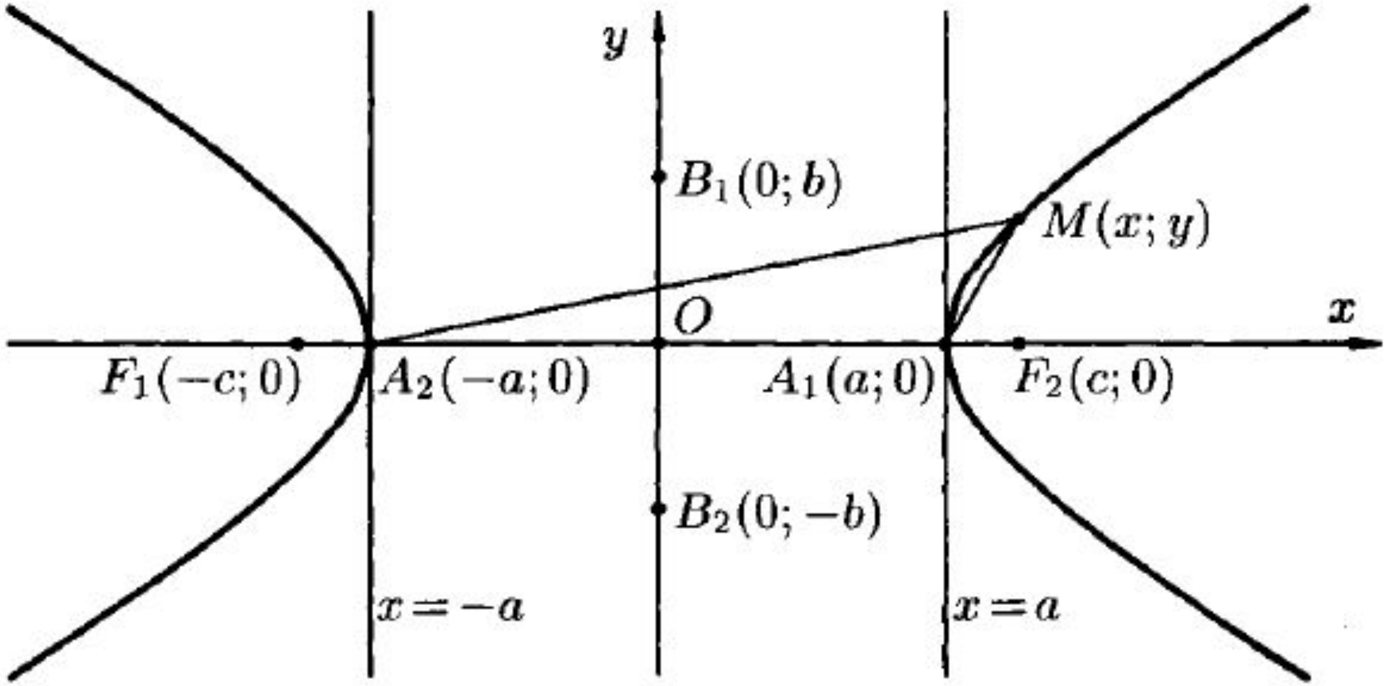
3. Из уравнения (.9) следует, что уменьшаемое $\frac{x^2}{a^2}$ не меньше единицы т. е. что $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$ или $|x| \geqslant a$. Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (*правая ветвь* гиперболы) и слева от прямой $x = -a$ (*левая ветвь* гиперболы).

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \qquad (.9)$$



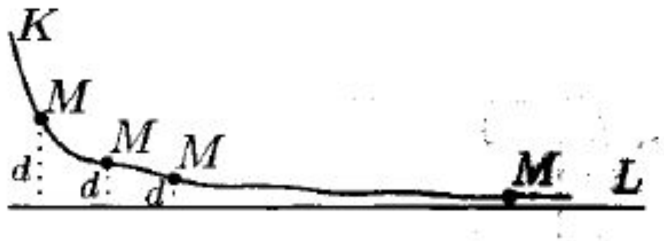
4. Из уравнения (9).. гиперболы видно, что когда $|x|$ возрастает, то и $|y|$ возрастает. Это следует из того, что разность $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ сохраняет постоянное значение, равное единице. Из сказанного следует, что гипербола имеет форму, изображенную на рисунке (кривая, состоящая из двух неограниченных ветвей).

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \qquad (.9)$$



...птоты гиперболы

...Прямая L называется *асимптотой* неограниченной кривой K, ес-
...сстояние d от точки M кривой K до этой прямой стремится к нулю
...неограниченном удалении точки M вдоль кривой K от начала ко-
...нат. На рисунке приведена иллюстрация понятия асимптоты:
...ая L является асимптотой для кривой K.



...жем, что гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет две асимптоты:

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.} \quad (11)$$

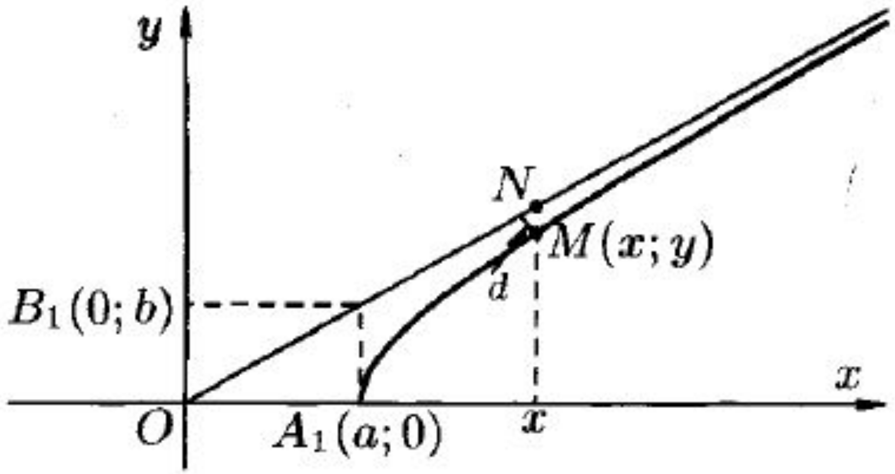
...как прямые (.11) и гипербола $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,}$ симметричны относительно координатных осей,

...достаточно рассмотреть только те точки указанных линий, которые расположены в первой четверти.

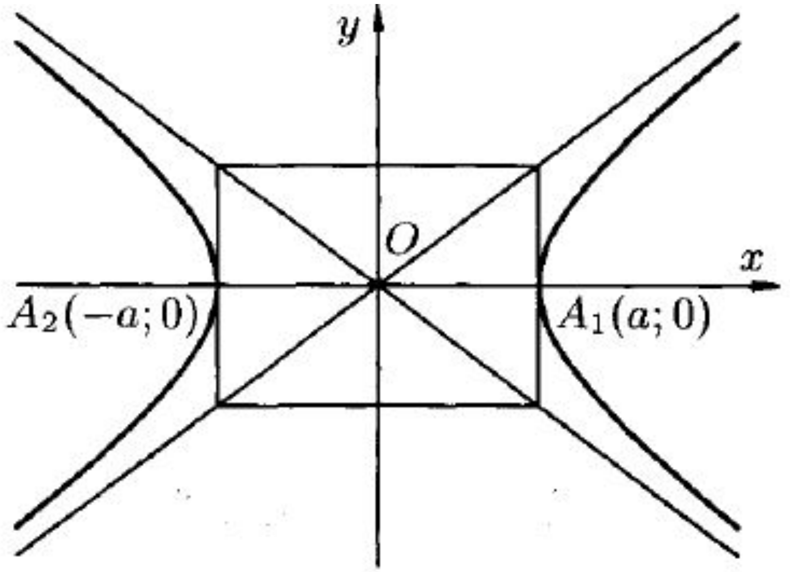
Возьмем на прямой $y = \frac{b}{a}x$ точку N имеющей ту же абсциссу x, что и точка $M(x;y)$ на гиперболе
$\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (см. рис.), и найдем разность MN между ординатами прямой и ветви гиперболы:

Как видно, по мере возрастания x знаменатель дроби увеличивается; числитель — есть постоянная величина. Стало быть, длина отрезка MN стремится к нулю. Так как MN больше расстояния d от точки M до прямой, то d и подавно стремится к нулю. Итак, прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гипербол

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,}$$



При построении гиперболы (9) целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы (см. рис.), провести пря мые, проходящие через противоположные вершины этого прямоуголь ника — асимптоты гиперболы и отметить вершины A_1 и A_2 гиперболы.



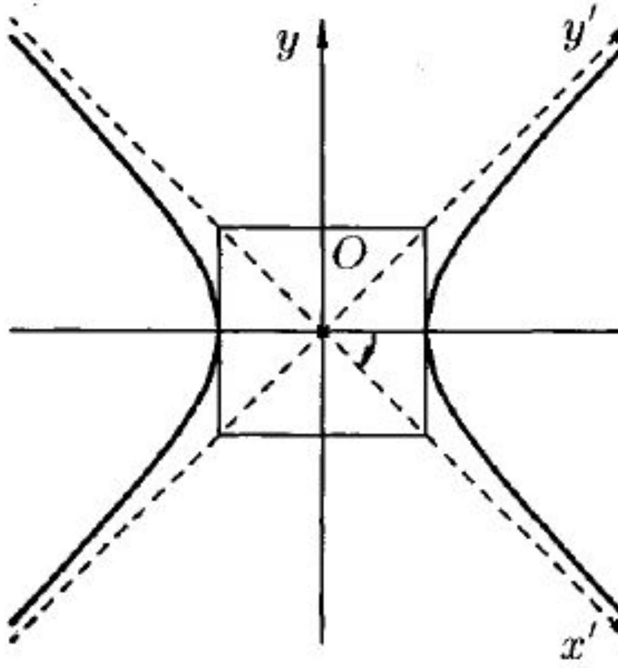
Уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат оси координат

Гипербола $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,}$ называется ***равносторонней***, если ее полуоси равны ($a = b$).

Ее каноническое уравнение $x^2 - y^2 = a^2$ (.12)

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $y = x$ и $y = -x$ и, следовательно, являются биссектрисами координатных углов.

Рассмотрим уравнение этой гиперболы в новой системе координат $Ox'y'$ полученной из старой поворотом осей координат



на угол $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Используем формулы поворота осей координат

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Подставляем значения x и y в уравнение (12):

$$\left(x'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-y'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-\left(x'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+y'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=a^2,$$

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2-\frac{1}{2}(-x'+y')^2=a^2,\quad x'\cdot y'=\frac{a^2}{2},\text{ или } y'=\frac{k}{x'},$$

где $k=\dfrac{a^2}{2}$.

Уравнение равносторонней гиперболы, для которой оси Ox и Oy являются асимптотами, будет иметь вид $y=\dfrac{k}{x}$.

Дополнительные сведения о гиперболе

Эксцентриситетом гиперболы $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,}$ (9) называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси гиперболы, обозначается ε: $\boxed{\varepsilon=\dfrac{c}{a}.}$

Так как для гиперболы $c>a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы: $\varepsilon>1$.

Эксцентриситет характеризует форму гиперболы.

Действительно, из равенства (10) следует, что $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{a^2}-1$, т. е. $\dfrac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ и $\varepsilon=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$ ее полуосей, а значит, тем более вытянут ее основной прямоугольник.

Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$. Действительно,

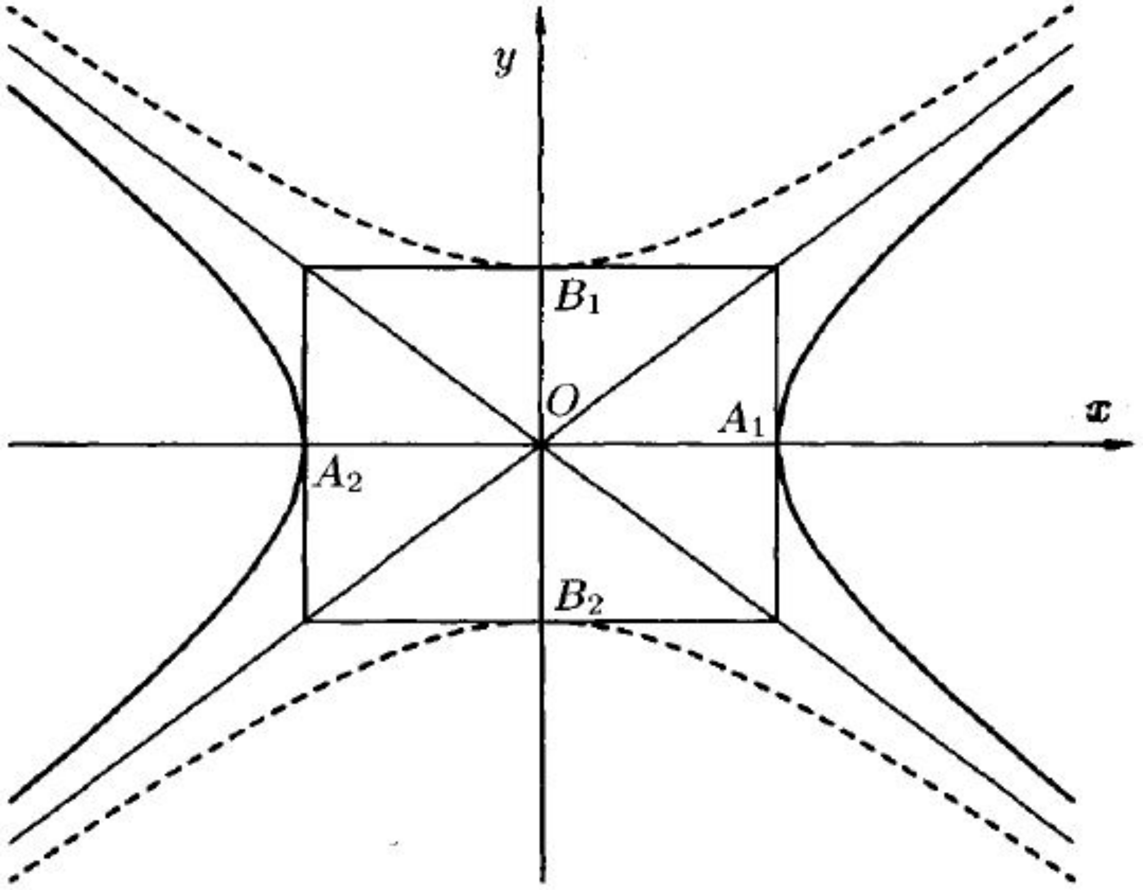
$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

Фокальные радиусы $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ для точек правой ветви гиперболы имеют вид $r_1 = \varepsilon x + a$ и $r_2 = \varepsilon x - a$, а для левой — $r_1 = -(\varepsilon x + a)$ и $r_2 = -(\varepsilon x - a)$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Это значит, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, левая — между центром и левой вершиной.

Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, что и директрисы эллипса.

Кривая, определяемая уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, также есть гипербола, действительная ось $2b$ которой расположена на оси Oy, а мнимая ось $2a$ — на оси Ox. На рисунке она изображена пунктиром.



Очевидно, что гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ имеют общие асимптоты. Такие гиперболы называются *сопряженными*.

Пример На правой ветви гиперболы $x^2/16-y^2/9=1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в два раза меньше ее расстояния от левого фокуса.

△ Для правой ветви гиперболы фокальные радиусы-векторы определяются по формулам $r_1=ex-a$ и $r_2=ex+a$. Следовательно, имеем уравнение $ex+a=2(ex-a)$, откуда $x=3a/e$; здесь $a=4$, $e=c/a=\sqrt{a^2+b^2}/a=\sqrt{16+9}/4=5/4$, т. е. $x=9,6$.

Ординату находим из уравнения гиперболы:

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}=\pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2-16}=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(9,6;\ 0,6\sqrt{119})$ и $M_2(9,6;\ -0,6\sqrt{119})$.

Пример Даны точки $A(-1;\ 0)$ и $B(2;\ 0)$. Точка M движется так, что в треугольнике AMB угол $\hat{B}$ остается вдвое больше угла $\hat{A}$. Найти уравнение кривой, которую опишет точка M.

△ Взяв точку M с координатами x и y, выразим $\operatorname{tg}\hat{B}$ и $\operatorname{tg}\hat{A}$ через координаты точек A, B и M:

$$\operatorname{tg}\hat{B} = -\frac{y}{x-2} = \frac{y}{2-x}, \quad \operatorname{tg}\hat{A} = \frac{y}{x+1}.$$

Согласно условию, получаем уравнение $\operatorname{tg}\hat{B} = \operatorname{tg} 2\hat{A}$, т. е. $\operatorname{tg}\hat{B} = 2\operatorname{tg}\hat{A}/(1-\operatorname{tg}^2\hat{A})$. Подставив в это равенство найденные для $\operatorname{tg}\hat{B}$ и $\operatorname{tg}\hat{A}$ выражения, приходим к уравнению

$$\frac{y}{2-x} = \frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2};$$

после сокращения на y $(y \neq 0)$ и упрощения получаем $x^2 - y^2/3 = 1$. Искомая кривая — гипербола.

Пример Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$.

△ Согласно определению эксцентриситета, имеем $c/a=\sqrt{2}$, или $c^2=2a^2$. Но $c^2=a^2+b^2$; следовательно, $a^2+b^2=2a^2$, или $a^2=b^2$, т. е. гипербола равнобочная.

Другое равенство получим из условия нахождения точки M на гиперболе, т. е. $(\sqrt{3})^2/a^2-(\sqrt{2})^2/b^2=1$, или $3/a^2-2/b^2=1$. Поскольку $a^2=b^2$, получим $3/a^2-2/a^2=1$, т. е. $a^2=1$.

Таким образом, уравнение искомой гиперболы имеет вид $x^2-y^2=1$.

Пример Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

△ Так как известны длина хорды и расстояние ее от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды — точки M, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$; полагая в нем $x=6$, $y=8$, находим $8^2=2p\cdot 6$, откуда $2p=32/3$. Итак, уравнение искомой параболы $y^2=32x/3$.

Пример Какую линию определяет уравнение $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$?

△ Преобразуем данное уравнение так:

$$(x^2+2x+1-1)-9(y^2-4y+4-4)=44;$$

$$(x+1)^2-9(y-2)^2=44+1-36, \quad (x+1)^2-9(y-2)^2=9.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O'(-1;\ 2)$. Формулы преобразования координат имеют вид $x=x'-1$, $y=y'+2$. После преобразования координат получим уравнение

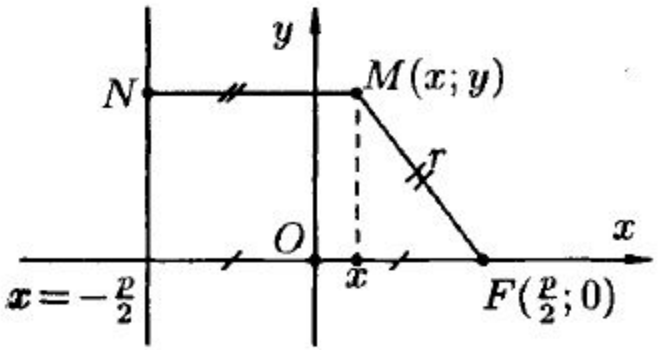
$$x'^2-9y'^2=9, \quad \text{или} \quad x'^2/9-y'^2=1.$$

Кривая является гиперболой. Асимптотами этой гиперболы относительно новых осей служат прямые $y'=\pm(1/3)x'$.

Парабола

Каноническое уравнение параболы

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой *директрисой*. Расстояние от фокуса F до директрисы называется ***параметром*** параболы и обозначается через p $(p > 0)$.



Для вывода уравнения параболы выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к F, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой (см. рис). В выбранной системе фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$, или $x + \frac{p}{2} = 0$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка параболы. Соединим точку M с F. Проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе. Согласно определению параболы $MF = MN$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad \text{а} \quad MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

т. е.

$$\boxed{y^2 = 2px.} \quad (13)$$

Уравнение (.13) называется ***каноническим уравнением параболы.***

Парабола есть линия второго порядка.

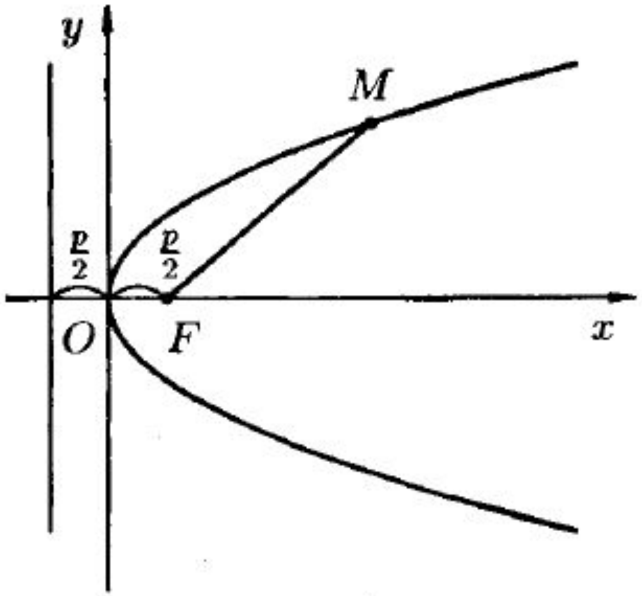
Исследование форм параболы по ее уравнению

1. В уравнении (13) переменная y входит в четной степени, зна чит, парабола симметрична относительно оси Ox; ось Ox является *осью симметрии* параболы.

2. Так как $p > 0$, то из (13) следует, что $x \geqslant 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

3. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.

4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограничен но возрастает.

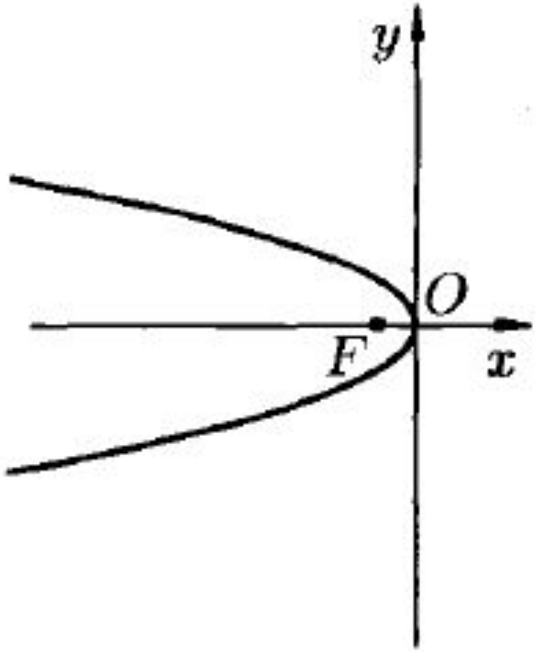


Парабола $y^2 = 2px$ имеет вид (форму), изображенный на рисунке

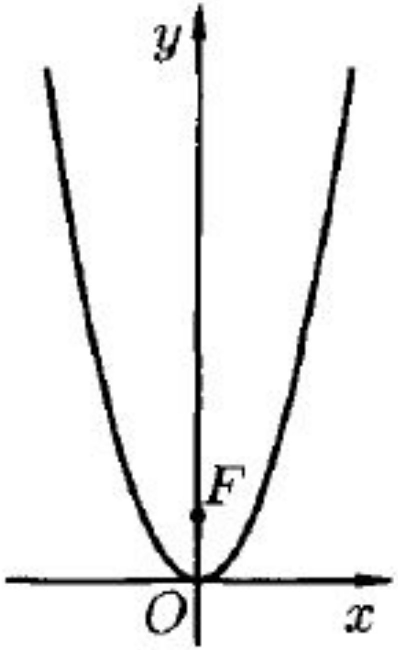
Точка $O(0;0)$ называется *вершиной параболы*.

отрезок $FM = r$ называется *фокальным радиусом* точки M.

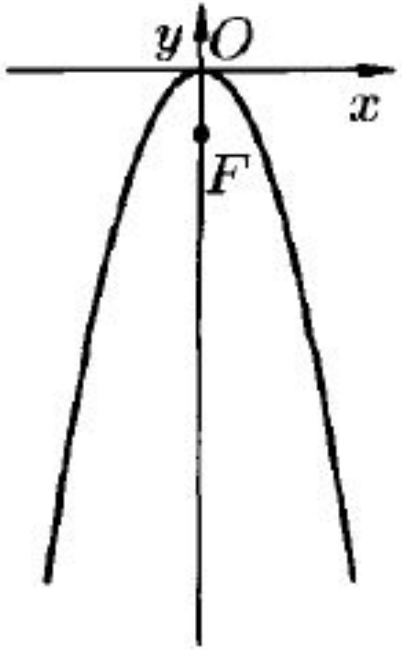
Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы, они изображены на рисунке



$y^2 = -2px$



$x^2 = 2py$



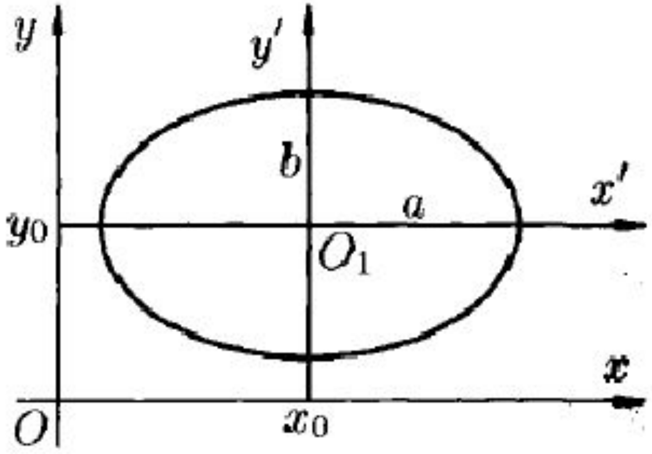
$x^2 = -2py$

Нетрудно показать, что график квадратного трехчлена $y = Ax^2 + Bx + C$, где $A \neq 0$, B и C любые действительные числа, представляет собой параболу в смысле приведенного выше ее определения.

Общее уравнение линий второго порядка

Уравнения кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Найдем сначала уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$, оси симметрии которого параллельны координатным осям Ox и Oy и полуоси соответственно равны a и b. Поместим в центре эллипса O_1 начало новой системы координат $O_1x'y'$, оси которой O_1x' и O_1y' параллельны соответствующим осям Ox и Oy и одинаково с ними направленны (см. рис.).



В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

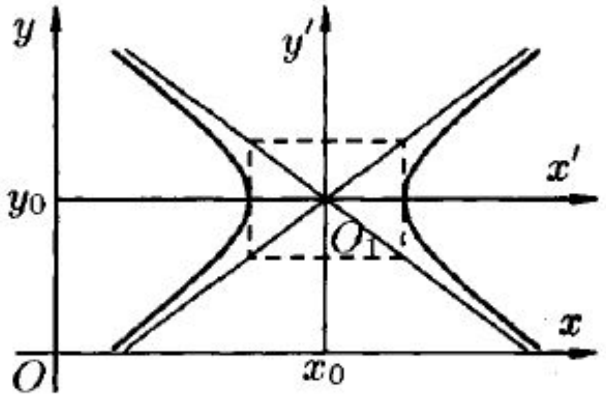
Так как $x' = x - x_0$, $y' = x - y_0$ (формулы параллельного переноса), то в старой системе координат уравнение эллипса запишется в

виде

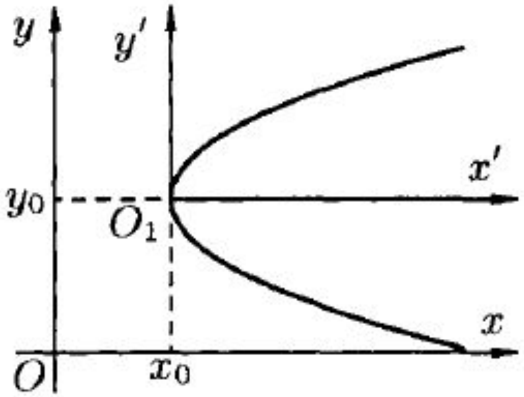
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично рассуждая, получим уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$ и полуосями a и b (см. рис.):

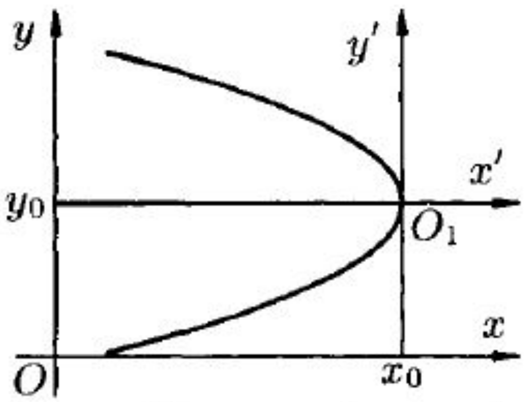
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$



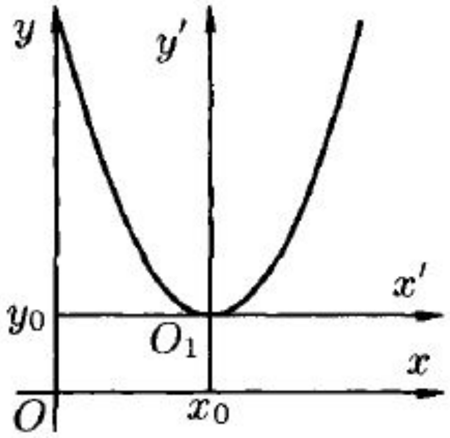
И, наконец, параболы, изображенные на рисунке, имеют соответствующие уравнения.



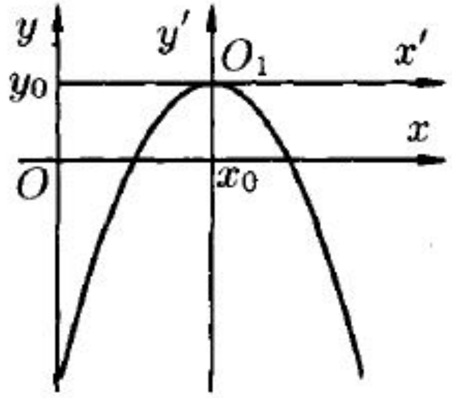
$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$



$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$



$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$



$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$

Уравнение $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Уравнения эллипса, гиперболы, параболы и уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ после преобразований (раскрыть скобки, перенести все члены уравнения в одну сторону, привести подобные члены, ввести новые обозначения для коэффициентов) можно записать с помощью *единого* уравнения вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{14}$$

где коэффициенты A и C не равны нулю одновременно.

Возникает вопрос: всякое ли уравнение вида (14) определяет одну из кривых (окружность, эллипс, гипербола, парабола) второго порядка? Ответ дает следующая теорема.

Теорема . Уравнение (.14) всегда определяет: либо окружность (при $A = C$), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) — в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы — в пару пересекающихся прямых, для параболы — в пару параллельных прямых.

Пример. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$.

Решение: Предложенное уравнение определяет эллипс ($A \cdot C = 4 \cdot 5 > > 0$). Действительно, проделаем следующие преобразования:

$$4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 5(y^2 - 6y + 9) - 25 - 45 + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y-3)^2 = 60, \quad \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1.$$

Получилось каноническое уравнение эллипса с центром в $O_1\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$ и полуосями $a = \sqrt{15}$ и $b = \sqrt{12}$.

Пример. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$.

Решение: Указанное уравнение определяет параболу ($C = 0$). Действительно,

$$x^2 + 10x + 25 - 2y + 11 - 25 = 0,$$

$$(x+5)^2 = 2y + 14, \quad (x+5)^2 = 2(y+7).$$

Получилось каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(-5; -7)$ и $p = 1$.

Пример Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равна 6.

△ Так как известны длина хорды и расстояние ее от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды — точки M, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$; полагая в нем $x=6$, $y=8$, находим $8^2=2p\cdot 6$, откуда $2p=32/3$. Итак, уравнение искомой параболы $y^2=32x/3$.

Пример Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

△ Искомое уравнение параболы $x^2=2py$, уравнение биссектрисы $y=x$. Таким образом, получаем точки пересечения параболы с биссектрисой: $O(0;\ 0)$ и $M(2p;\ 2p)$. Длина хорды определяется как расстояние между двумя точками: $8\sqrt{2}=\sqrt{4p^2+4p^2}$, откуда $2p=8$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2=8y$.

Пример Привести к каноническому виду уравнение параболы $y=9x^2-6x+2$.

△ Заменим x на $x'+a$ и y на $y'+b$:

$$y'+b=9(x'+a)^2-6(x'+a)+2,$$

или

$$y'=9x'^2+6x'(3a-1)+(9a^2-6a+2-b).$$

Найдем такие значения a и b, при которых коэффициент при x' и свободный член обратятся в нуль: $3a-1=0$, $9a^2-6a+2-b=0$, т. е. $a=1/3$, $b=1$. Следовательно, каноническое уравнение параболы имеет вид $x'^2=(1/9)y'$. Вершина параболы находится в точке $O_1(1/3;\ 1)$ и $p=1/18$.

Другой способ решения таких задач заключается в том, что заданное уравнение вида $y=Ax^2+Bx+C$ (или $x=Ay^2+By+C$) приводится к виду $(x-a)^2=2p(y-b)$ [соответственно $(y-b)^2=2p(x-a)$]. Тогда точка $O_1(a;\ b)$ служит вершиной параболы, а знак параметра p определит, в какую сторону — положительную или отрицательную соответствующей оси (Oy или Ox) — направлена парабола.

Так, уравнение $y=9x^2-6x+2$ преобразуется следующим образом:

$$y=9\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)-1+2;$$

$$y-1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2;\quad \left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}(y-1).$$

Отсюда снова получаем, что вершина параболы находится в точке $O_1(1/3;\ 1)$, параметр $p=1/18$, а ветвь параболы направлена в положительную сторону оси Oy.

Пример. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0$ $(A \cdot C = -4 < 0)$.

Решение: Преобразуем уравнение:

$$4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16) - 4 + 16 - 12 = 0,$$

$$4(x + 1)^2 - (y + 4)^2 = 0,$$

$$(2(x + 1) + (y + 4)) \cdot (2(x + 1) - (y + 4)) = 0,$$

$$(2x + y + 6)(2x - y - 2) = 0.$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся прямые $2x + y + 6 = 0$ и $2x - y - 2 = 0$.