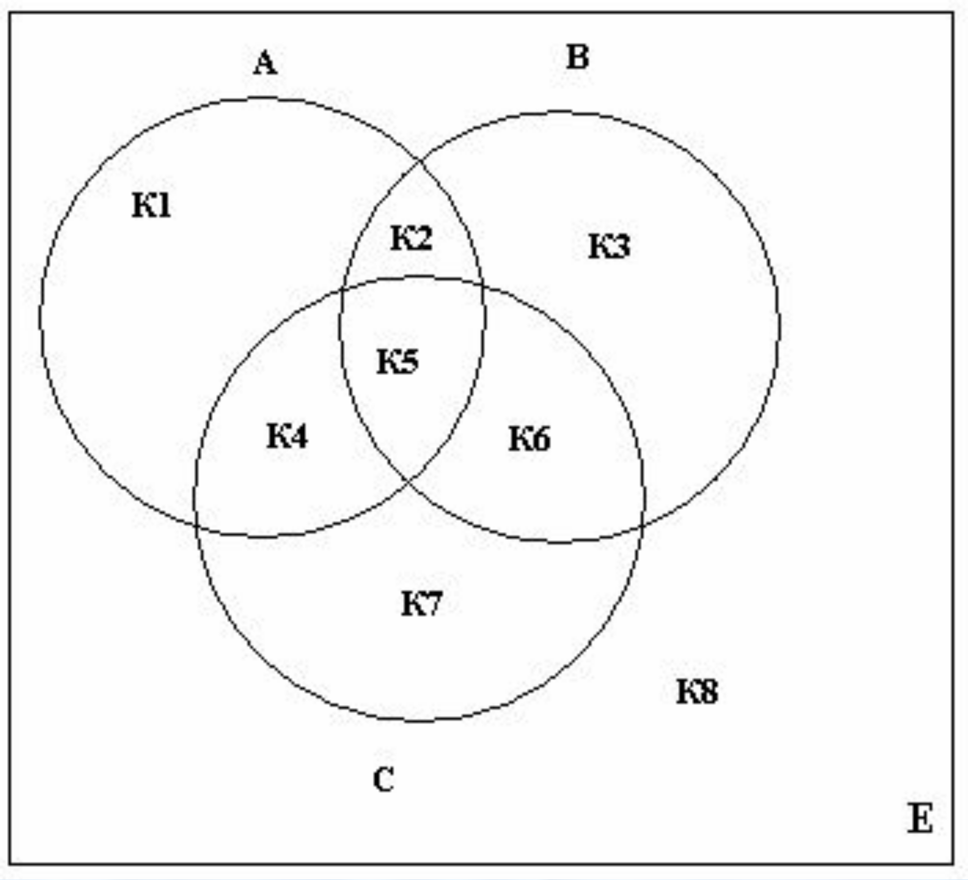
Тема: Математические основы экономической кибернетики. Элементы теории множеств и математической логики



Общие понятия

На сегодня наиболее эффективный путь изучения **экономических явлений и процессов** связан с построением **математических моделей**. Это требует знания и умения применять не только традиционных разделов математики, но и тех, которые сформировались сравнительно недавно и относятся к **дискретной математики**.

Курс дискретной математики является фундаментом математической кибернетики и состоит из следующих основных частей:

1) теория чисел;

2) теория множеств;

3) математическая логика;

4) теория графов и сетей;

5) теория автоматов и формальных грамматик;

6) комбинаторный анализ.

Общие понятия

Под **множеством** понимается некоторая определенная совокупность объектов или элементов, которые имеют определенные свойства и находятся в определенных отношениях между собой или элементами других множеств.

Обозначают множества используя прописные латинские буквы (A,B,C,D,…S,N) или те же буквы только с индексами. А элементы множеств будем обозначать: a,b,c,d или a_1,b_1,c_1,d_1.

Пример: Множество десятичных цифр, множество студентов.

Существует несколько способов задания множества:

1. Словесный (вербальный) с помощью описания характеристических свойств, которые обладают элементы этого множества.
2. Список (перечень) всех элементов множества в фигурных скобках X={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A={2,4,6,8,….}
3. Предикатный (высказывательный) множество задается в виде:

   {x: P(x)}

   P(x) – предикат (высказывание, которое получает значение «истина» для всех элементов данного множества. Например {x: x- студент ЗГИА}.

Общие понятия. Отношения между множествами.

<u>Множества бывают:</u>

- конечными
- бесконечными (Например, множество всех точек прямой)
- пустыми

Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

Например, множество решений уравнения $x^2+1=0$ в области действительных чисел пусто, т.е. $\{x\}=\varnothing$.

Если объект *a* является элементом множества *A*, то пишут $a \in A$, если же объект *a* не является элементом множества *A*, то пишут $a \notin A$.

Подмножество.

Рассмотрим множества *A* = {1, 2, 3, 4, 5, 6} и *B* = {2, 4, 6}. Каждый элемент множества *B* принадлежит множеству *A*.

Определение. Множество *B* называется подмножеством множества *A*, если каждый элемент множества *B* является элементом множества *A*, т.е. $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$.

Обозначение. $B \subset A$ или $A \supset B$.

Общие понятия. Отношения между множествами.

Если в множестве *B* найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству *A*, то множество *B* не будет являться подмножеством множества *A*.

Обозначение. $B \not\subset A$.

Множества A и B называются **равными** если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение. $A=B$.

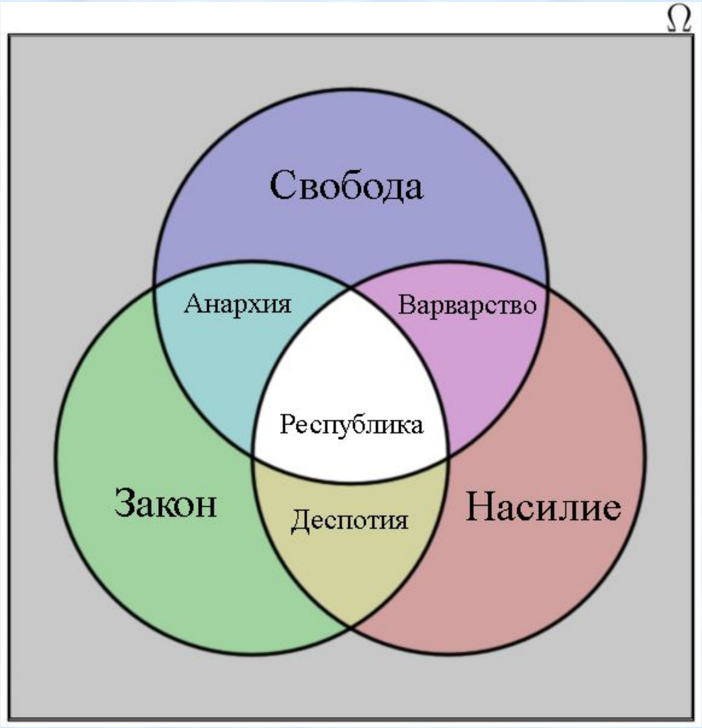
Замечание:

1. Считают что пустое множество является подмножеством любого множества.
2. Любое множество является подмножеством самого себя.

Универсальным множеством U называется множество обладающее такими свойствами, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

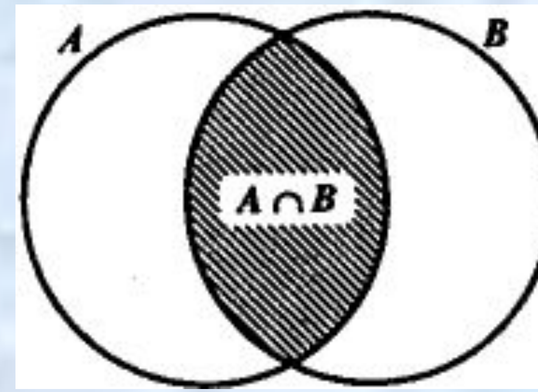
Общие понятия. Пересечение множеств.

Часто в качестве инструмента позволяющего изображать множества и иллюстрировать операции над ними используют **диаграммы Венна (Эйлера).** Множество представляется в виде внутренней части круга, а универсальное множество U обозначается прямоугольником.



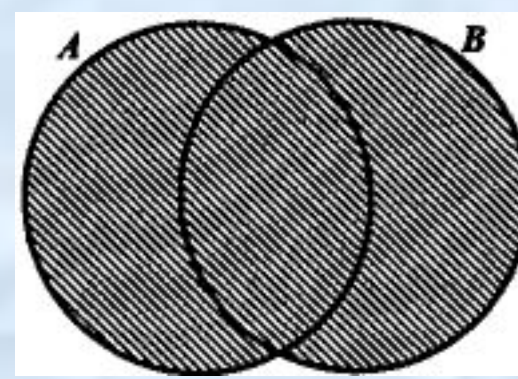
Общие понятия. Отношения между множествами.

1.Определение. **<u>Пересечением</u>** **<u>множеств</u>** А и В называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А и множеству В. Пересечение множеств А и В обозначают $A \cap B$. Таким образом, по определению, $A \cap B = \{x\colon x \in A$ **<u>и</u>** $x \in B\}$. При помощи кругов Эйлера пресечением данных множеств является штрихованная область.



Пример. Множества $A = \{1, 2, 5\}$ и $B = \{2, 3, 5,7\}$. $A \cap B = \{2,5\}$

2.Определение **<u>Объединением множеств</u>** А и



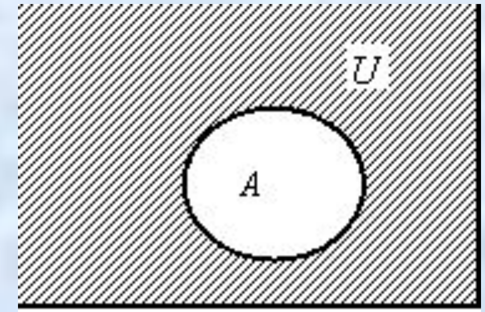
$\cup$

$\cup$

$\cup$

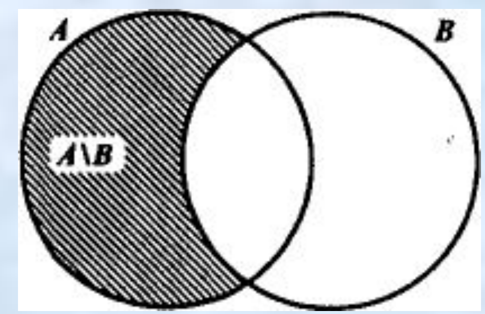
Общие понятия. Отношения между множествами.

1.Определение. **Пересечением множеств** А и В называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А и множеству В. Пересечение множеств А и В обозначают А В. Таким образом, по определению, А В = {x: x ∈ A **и** x ∈ B}. При помощи кругов Эйлера пресечением данных множеств является штрихованная область.



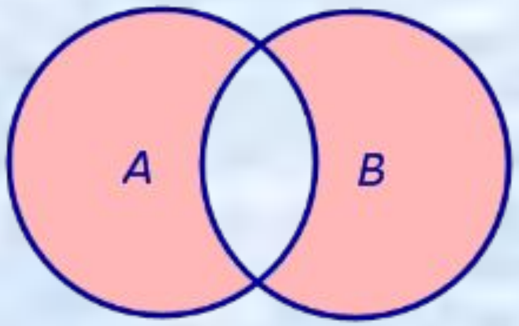
Пример. Множества A = {1, 2, 5} и B = {2, 3, 5,7}. А В = {2,5}

2.Определение **Объединением множеств** А и В называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А **или** множеству В. Объединение множеств А и В обозначают А В. Таким образом, по определению, А В = {x: x ∈ A **или** x ∈ B}.



Пример. Множества A = {1, 2, 5} и B = {2, 3, 5,7}. А В = {1,2,3,5,7}

Общие понятия. Отношения между множествами.



5. Симметричная разность множеств А и В это множество тех элементов А, которые не принадлежат множеству В или множество элементов В не принадлежащих множеству А**.**

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A\ и\ x \notin B \text{ или } x \in B\ и\ x \in A)\}$$

$$A \oplus B = (A/B) \cup (B/A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

$$A \oplus B = \{1,3,7\}$$

Операции над множествами. Свойства

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

1.Свойство коммутативности

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A, \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

2.Свойство ассоциативности

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3.Закон дистрибутивности

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4.Закон идемпотентности

$$\begin{cases} A \cup A = A, \\ A \cap A = A. \end{cases}$$

Операции над множествами. Свойства

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

5. Закон поглощения:

$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A, \\ A \cap (A \cup B) = A. \end{cases}$$

6. Свойство инволюции:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

7. Правило де Моргана:

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{cases}$$

8. Свойство пустого множества и универсального:

$$\begin{cases} A \cup \overline{A} = U, \\ A \cap \overline{A} = \varnothing \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{U} = \varnothing, \\ \overline{\varnothing} = U; \end{cases} \quad \begin{matrix} A \cup \varnothing = A, \\ A \cap U = A; \end{matrix} \quad \begin{matrix} A \cup U = A, \\ A \cap \varnothing = \varnothing. \end{matrix}$$