

Синтез цифровых фильтров

Заданная частотная характеристика $H_d(j\omega)$ дискретизируется в полосе частот $0 - \omega_D$ с шагом $\Delta\omega = \frac{\omega_D}{N} \leq \Delta\omega_{\text{пер}}(L - 1)$, где L – число выборок в переходной полосе:

$$H_d(j\omega_k) = H_d(j\omega)|_{\omega=\omega_k=\Delta\omega k}, \quad k=0,1,\dots,(N-1)$$

Условия выбора ДЧХ:

- в полосе пропускания $|H_d(j\omega_k)| = 1$;
- в полосе задерживания $|H_d(j\omega_k)| = 0$;
- в переходной полосе $|H_d(j\omega_k)| = H_1 = var$ – определяет качество аппроксимации частотной характеристики.

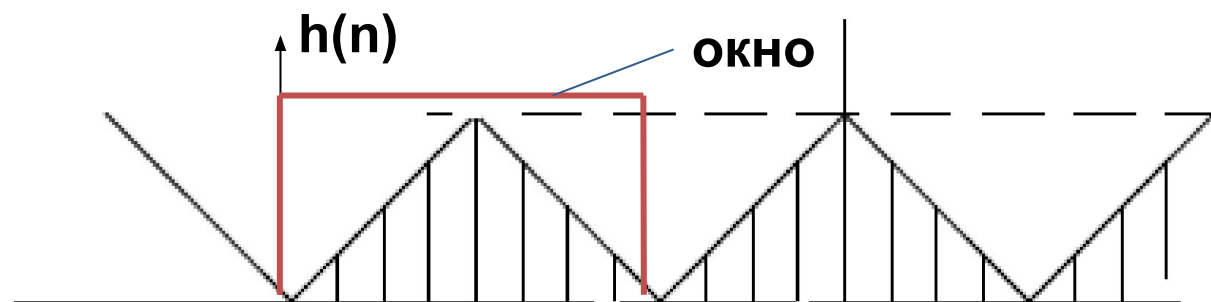
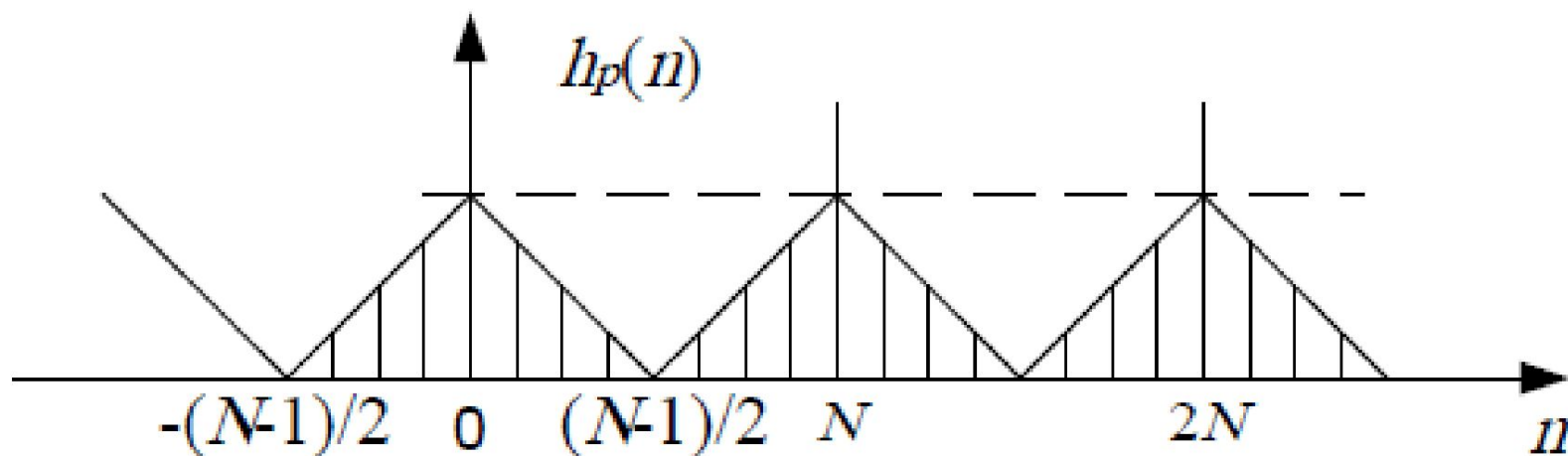
Импульсная характеристика (ОДПФ) – периодическая с периодом $N_p = N$:

$$h_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{j\omega_k n T_D} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{j\omega_k (n+iN) T_D}$$

- где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$

Для обеспечения физической реализуемости НФ выбирается **один** сдвинутый вправо на $(N-1)/2$ отсчетов период $h_p(n)$:

$$h(n) = h_p\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$$



■ Частотная характеристика синтезируемого фильтра :

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n T_d} = e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(\omega_k) \frac{\sin \frac{\omega - \omega_k}{2} N T_d}{\sin \frac{\omega - \omega_k}{2} T_d}$$

Множитель $e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d}$ - определяет линейную ФЧХ фильтра:

$$\varphi(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} T_d$$

Из формулы для АЧХ следует, что $H(\omega) = H_d(\omega_k)$ при $\omega = \omega_k$ и $H(\omega) \neq H_d(\omega_k)$ при $\omega \neq \omega_k$.

Качество аппроксимации зависит от числа выборок в переходной полосе L и поиске их оптимальных значений $H_{i \text{ опт}}$ ($i = 1, 2, \dots, L$).

Пример:

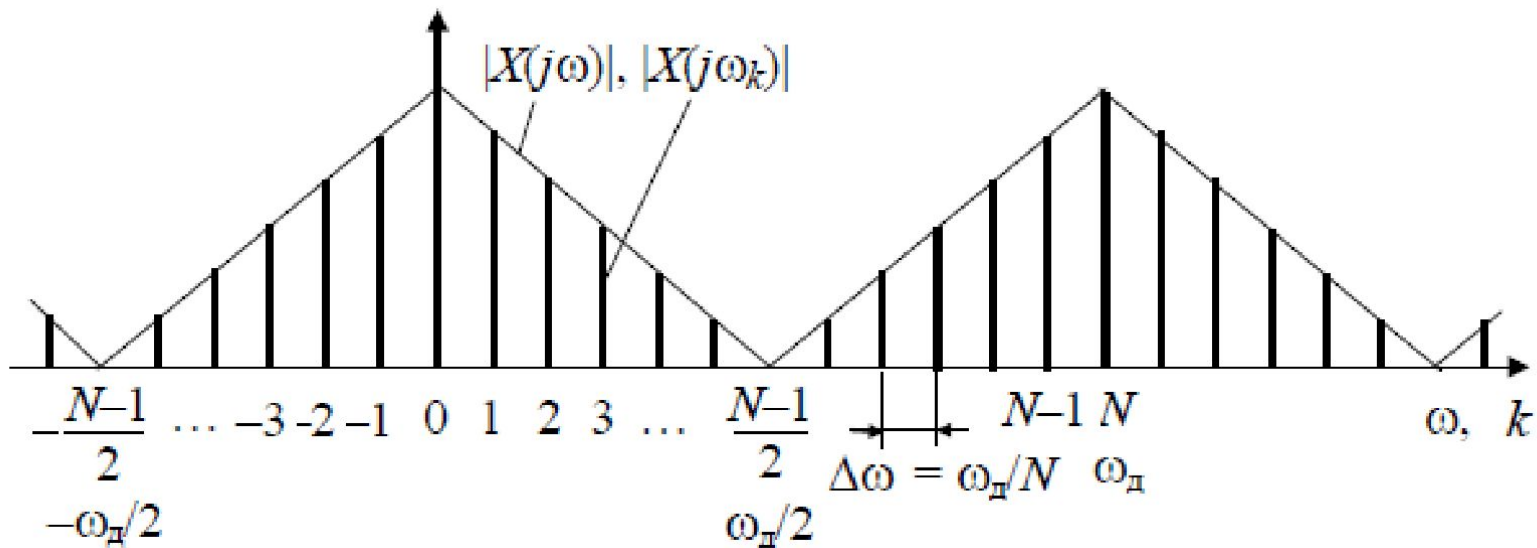
$$\begin{aligned} L = 0; & \quad \delta_{2 \text{ макс}} \approx -20 \text{ дБ}; \\ L = 1; & \quad \delta_{2 \text{ макс}} \approx -40 \text{ дБ}; \\ L = 2; & \quad \delta_{2 \text{ макс}} \approx -(50 \dots 60) \text{ дБ}; \\ L = 3; & \quad \delta_{2 \text{ макс}} \approx -(80 \dots 100) \text{ дБ}; \end{aligned}$$

Алгоритм цифровой фильтрации сигналов на основе дискретного преобразования Фурье

□ Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) соответствует выборкам непрерывного преобразования Фурье $X(j\omega)$ дискретной последовательности $x(n)_{N_1}$ конечной длины N_1 , вычисленным на дискретных равностоящих частотах $\omega_k = k\Delta\omega$: (сравнить с формулой 2.10 – спектр дискретного сигнала)

$$F_{\text{ПН}}[x(n)] = X(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_k} = \sum_{n=0}^{N_1-1} x(n)e^{-j\omega_k n T_d}, \quad (4.18)$$

где $\Delta\omega = \omega_d/N$ – шаг дискретизации по частоте; N – число вычисляемых частотных выборок ДПФ в полосе частот $0 \dots \omega_c$ (в общем случае $N \neq N_1$), $k = 0, 1, \dots, N - 1$ – номер частотной выборки.



Заменив дискретную частоту ω_k на номер частотной выборки k ($\omega_k = k \cdot \Delta\omega$) и с учетом $\Delta\omega = \omega_d/N$, ($N=N_1$) преобразуем (4.18) к виду функции номера частотной выборки k :

$$F_{\Pi N}[x(n)] = X(j\omega_k) = X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.19)$$

□ Обратное преобразование Фурье:

$$x(n) = \frac{T_D}{2\pi} \int_0^{\omega_D} X(j\omega) e^{j\omega n T_D} d\omega.$$

Используя замену $d\omega \rightarrow \frac{\omega_D}{N}$; $\int \rightarrow \sum$; $\omega \rightarrow \omega_k$,
получим обратное дискретное преобразование Фурье:

$$F_{ON}[X(j\omega_k)] = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(j\omega_k) e^{j\omega_k n T_D} \quad (4.20)$$

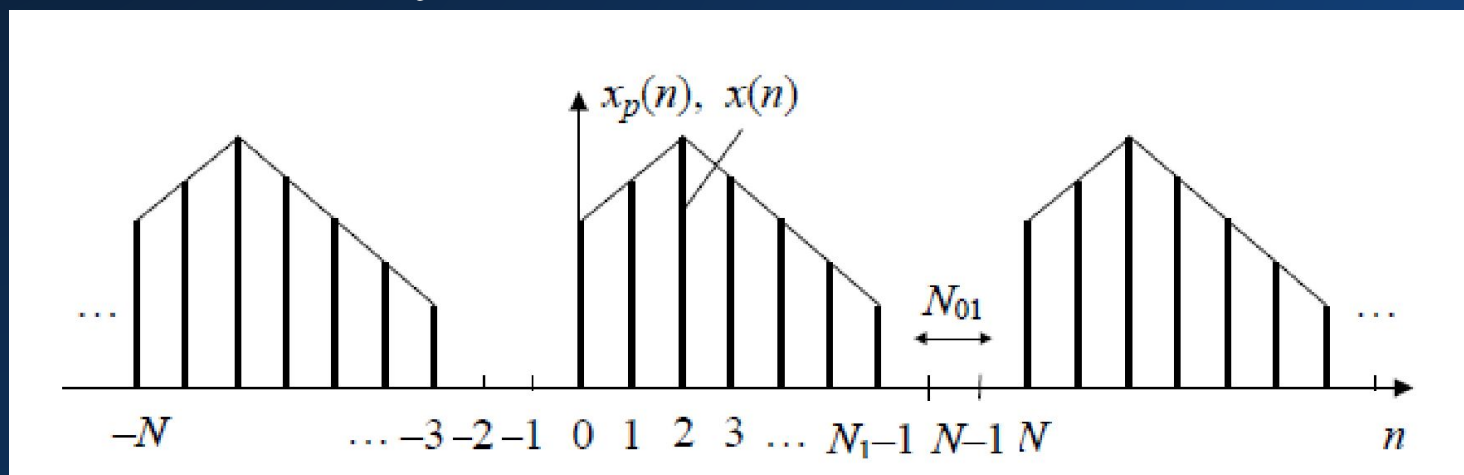
Или

$$F_{ON}[X(jk)] = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.21)$$

$x_p(n)$ – периодический сигнал

Сигнал $x_p(n)$ является периодическим повторением сигнала $x(n)$ с периодом N . При $N=N_1$

$$x_p(n) = \sum_i x(n - iN), \quad \text{при } i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$



При $N > N_1$ дополнительные $N - N_1$ отсчетов равны 0.

Т.е. при $N \geq N_1$ сигнал $x(n)$ восстанавливается точно.

При $N < N_1$ будет происходить перекрытие сигналов $x_p(n)$ т.е. будут искажения сигнала $x(n)$.

Алгоритм цифровой фильтрации конечных последовательностей на основе ДПФ

□ Сигнал на выходе КИХ фильтра (свертка $h(n)$ и $x(n)$)

$$y(n)_N = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)x(n-m), \quad (4.22)$$

N_1 – длина входной последовательности $x(n)$,

N_2 – длина импульсной характеристики $h(n)$ фильтра,

$N = N_1 + N_2 - 1$ – длина выходной последовательности,

$n = 0, 1, \dots, N - 1$.

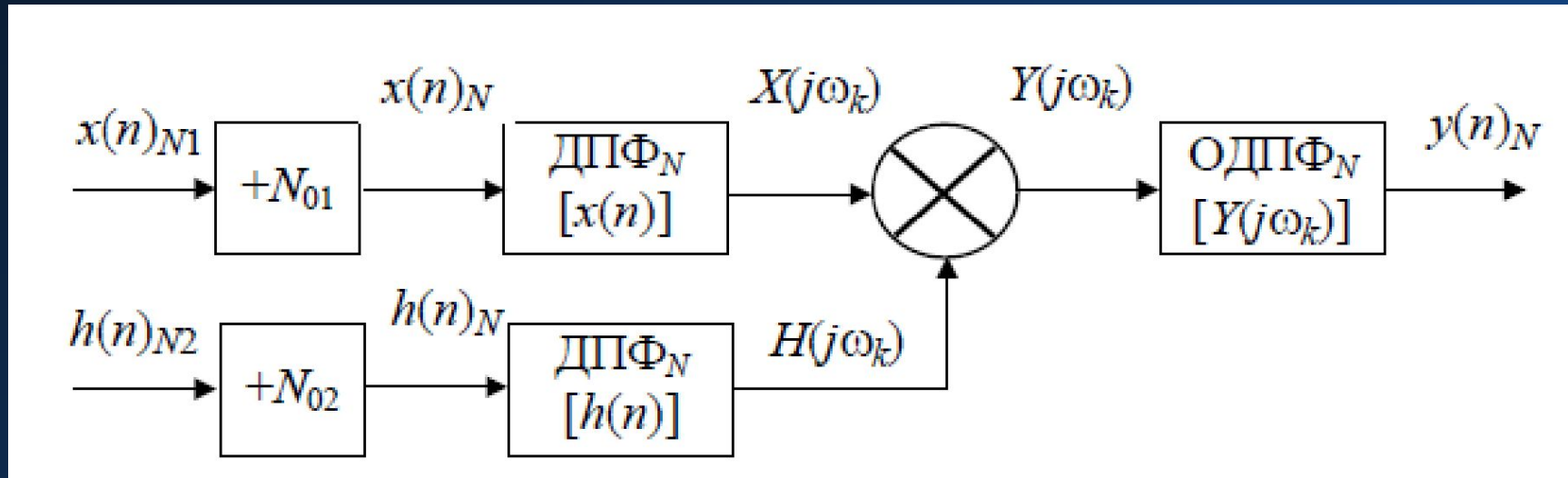
Очевидно, что (свойство свертки)

$$F_{\Pi N}[y(n)] = F_{\Pi N}[h(n)] \cdot F_{\Pi N}[x(n)] = H(j\omega_k) \cdot X(j\omega_k)$$

Тогда

$$y(n) = F_{ON}[H(j\omega_k) \cdot X(j\omega_k)] \quad (4.23)$$

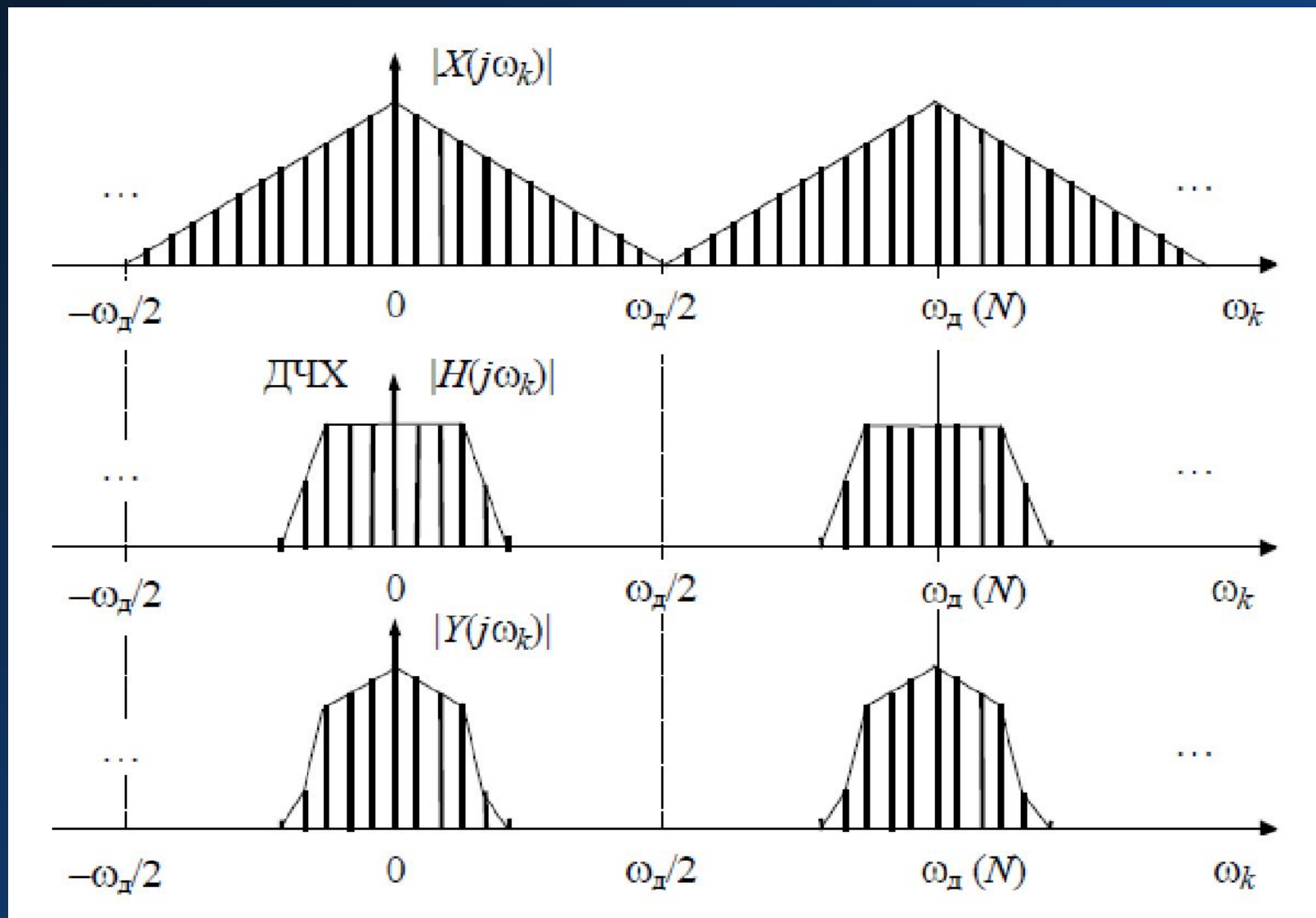
Структурная схема НЦФ на основе ДПФ



$+N_{01}$ и $+N_{02}$ - добавка нулевых отсчетов для выравнивания длины $x(n)$ и $h(n)$

Частотная характеристика $H(j\omega_k)$ может быть задана заранее и отсчеты $H(jk)$ могут храниться в ПЗУ ЦФ.

Частотные диаграммы в структуре НЦФ на основе ДПФ



Недостатки:

1. По объему вычислений фильтр на основе ДПФ уступает НФ на основе ДВС, где на один отсчет сигнала выполняется N_2 операции умножения.

Для рассматриваемого фильтра – число операций умножения $K_{\text{умн}} = 4(2N^2 + N)$ и сложения $K_{\text{сл}} = 4(N - 1)N$, т.е. в пересчете на один отсчет:

$$K_{\text{умн}(1)} = 4(2N + 1) \text{ и } K_{\text{сл}(1)} = 4(N - 1).$$

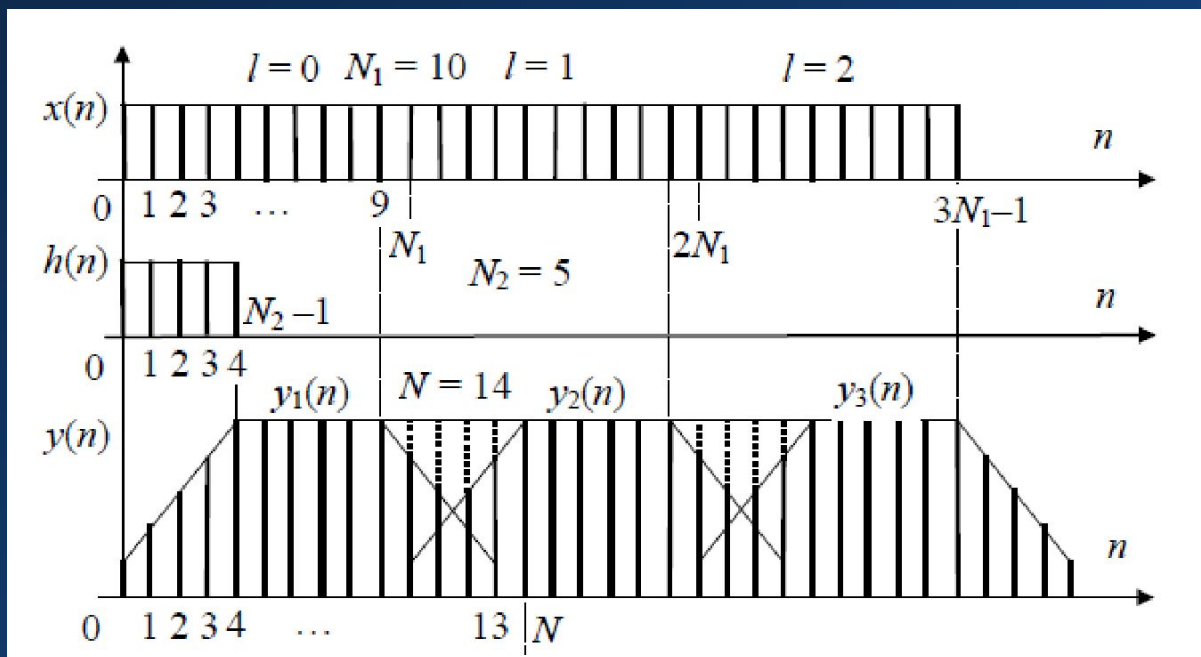
Однако при использовании быстрого преобразования Фурье (БПФ) ситуация меняется:

(пример: $N = 1024$, НФ на основе БПФ - $K_{\text{умн}(1)} = 44$ и $K_{\text{сл}(1)} = 40$.
НФ на основе ДВС - $K_{\text{умн}(1)} = K_{\text{сл}(1)} = 512$).

2. Требуется значительный объем памяти.

При обработке последовательностей, длина которых намного превышает длину импульсной характеристики фильтра входную последовательность $x(n)$ представляют суммой конечного или бесконечного числа примыкающих друг к другу секций $x_l(n)_{N_1}$ конечной длины N_1 .

Полученные секции сигналов $y_l(n)_{N_1}$ «склеивают»:



Численные методы синтеза цифровых фильтров

- Численные, или оптимальные, методы синтеза ЦФ реализуются с помощью процедур непосредственной аппроксимации заданных частотных характеристик фильтра в соответствии с определенными критериями минимизации ошибок аппроксимации.
 - Основными при аппроксимации БИХ и КИХ-фильтров являются критерии минимума среднего квадрата ошибки (СКО) и наилучшего чебышевского приближения (минимаксный критерий).
 - Пусть $H_d(j\omega_i)$ и $H(j\omega_i)$ - заданная и аппроксимирующая частотные характеристики фильтра, вычисляемые на дискретном множестве частот ω_i .

- Тогда целевая функция алгоритма минимизации СКО определяется выражением

$$E = \sum_{i=1}^M [|H(j\omega_i)| - |H_d(j\omega_i)|]^2. \quad (4.24)$$

- Минимаксный критерий заключается в минимизации на множестве частот ω_i максимальных значений взвешенного функционала ошибки:

$$E(\omega) = W(\omega) \cdot |H(j\omega) - H_d(j\omega)|, \quad (4.25)$$

где $W(\omega)$ - положительная весовая функция

- Для численного синтеза КИХ и БИХ-фильтров существует большое количество методов аппроксимации передаточной функции $H(j\omega)$ и эффективных компьютерных программ.

Синтез оптимальных КИХ-фильтров

Искомую АЧХ фильтра представляют в форме тригонометрического полинома

$$H(\omega_H) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} 2b_k \cos \left[\omega_H \left(\frac{N-1}{2} - k \right) \right] = \sum_k^M a_k \cos[\varphi_k(\omega_H)] = H(\omega_H, \bar{a})$$

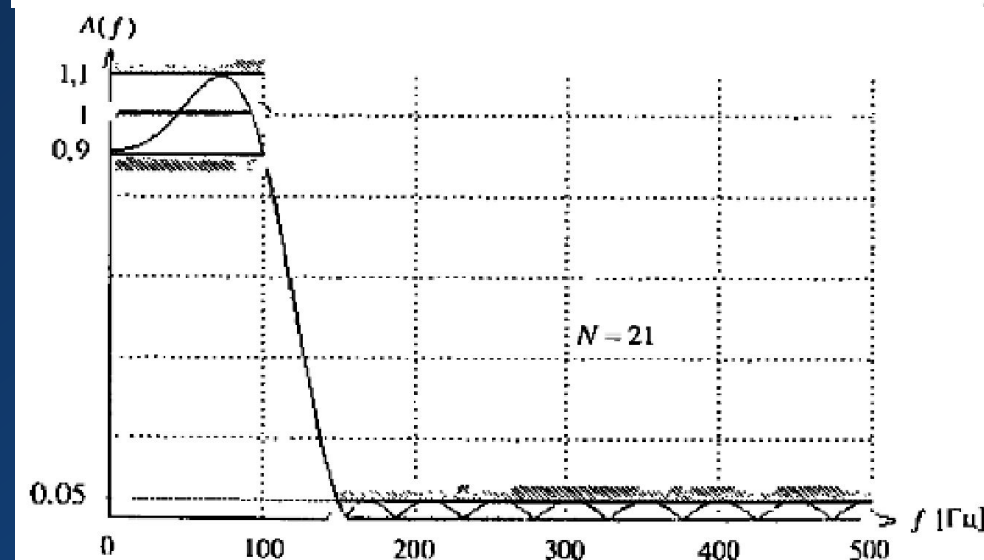
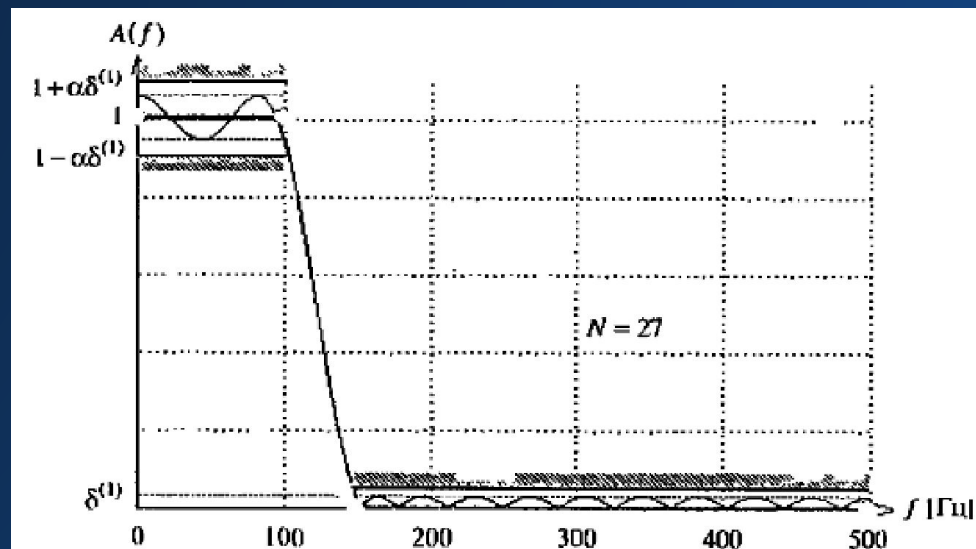
где \bar{a} - вектор коэффициентов, $M=(N-1)/2$ – порядок фильтра.

Зная коэффициенты $a_k = 2b_k$, можно записать передаточную функцию

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}, \quad b_i = b_{N-1-i} = \frac{a_k}{2}, \quad i = k.$$

Задача оптимального синтеза состоит в определении такого вектора коэффициентов \bar{a} полинома $H(\omega_H, \bar{a})$, при котором достигается минимальный порядок передаточной функции.

Пример поиска оптимального решения для ФНЧ



▣ Тригонометрический полином $H(\omega_H, \bar{a})$ может быть представлен в виде суммы полиномов Чебышева $C_k(x)$ с весом a_k , $k = 0, 1, \dots, M$:

$$\begin{aligned} H(\omega_H, \bar{a}) &= \sum_{k=0}^M a_k \cos(k\omega_H) = \sum_{k=0}^M a_k \cos(k \cdot \arccos(x)) \\ &= \sum_{k=0}^M a_k C_k(x), \end{aligned}$$

$$\text{где } x = \cos(2\pi f T_D) = \cos \omega_H, \quad -1 \leq x \leq 1$$

тогда $\omega_H = \arccos(x)$.

Полином Чебышева k -го порядка

$$C_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x))$$

График полинома $C_5(x)$

- Свойства: - $|C_k(x)| \leq 1$ на интервале $-1 \leq x \leq 1$;
- полином N-го порядка N раз переходит через нуль и (N+1) раз достигает значений +1 или -1

