

Глава 3

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§3.1. Случайные величины

Случайной величиной называется величина (X), которая в результате опыта может принимать одно из значений $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, образующих полную группу несовместных событий, причем неизвестно заранее, какое именно.

$$X = x_i; P(X = x_i) = p_i \qquad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Дискретной (не непрерывной) случайной величиной называют случайную величину X , которая принимает отдельные, изолированные возможные значения x_i с определенными вероятностями p_i .

Законом распределения случайной величины X называется совокупность пар чисел (x_i, p_i) , где x_i – возможные значения случайной величины, p_i – вероятности, с которыми она принимает эти значения. При этом

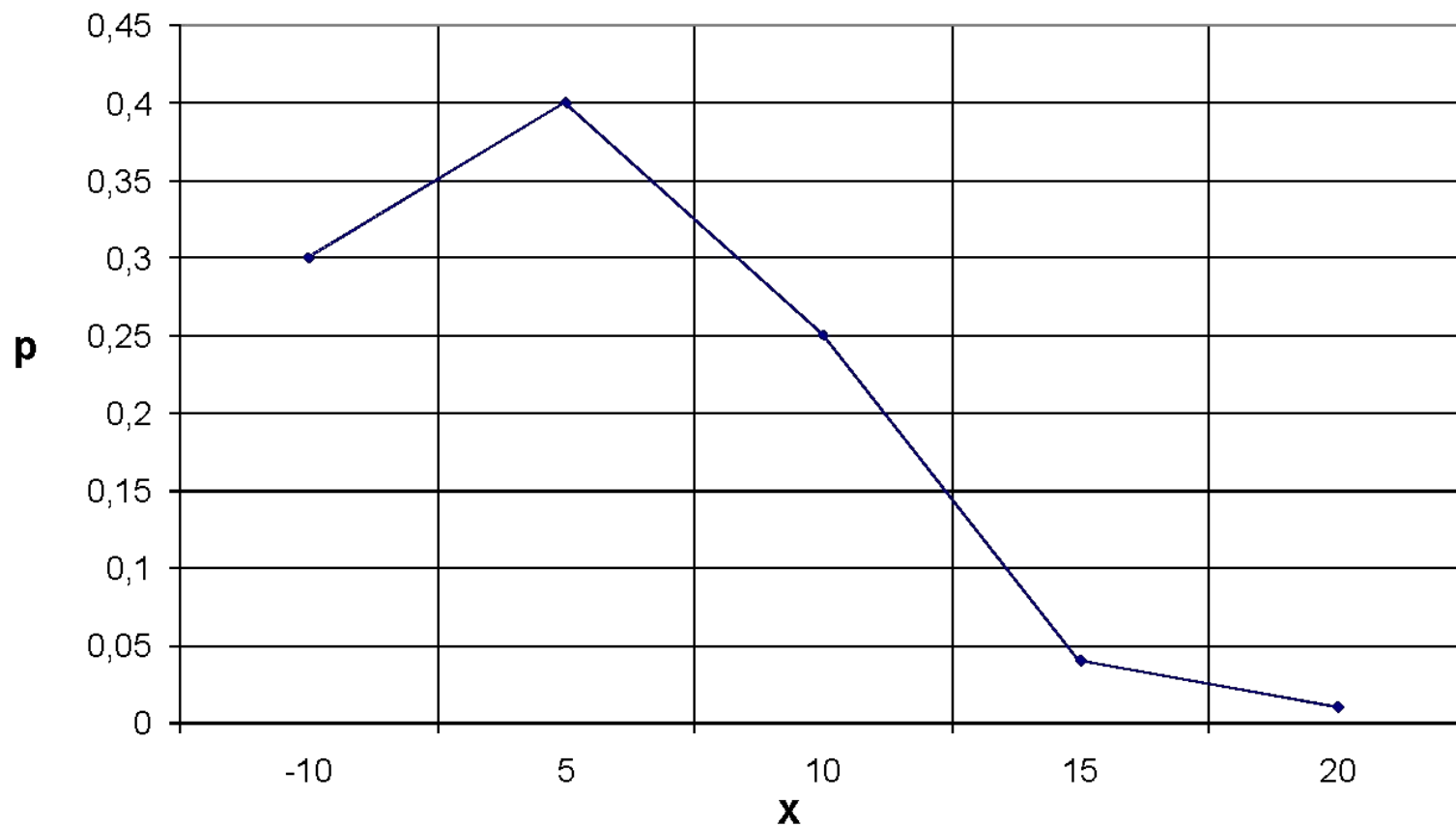
$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Пример:

X	-10	5	10	15	20
p	0,30	0,40	0,25	0,04	0,01

Многоугольник распределения



Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений случайной непрерывной величины бесконечно.

Числовая функция $X(\omega)$ называется случайной величиной, если для любого ее возможного значения $x_i \in \Omega = (-\infty < x_i < \infty)$, где множество Ω есть множество элементарных событий ω , определена вероятность $P\{X(\omega) < x\}$ и $P\{-\infty < X(\omega) < \infty\} = 1$.

§3.2. Числовые характеристики случайной ВНЛИЧИНЫ

В теории вероятностей числовые характеристики условно можно разделить на две группы:

- характеристики положения;
- характеристики рассеивания и вероятностных взаимодействий.

§3.2.1. Характеристики положения

Математическое ожидание, мода и медиана.

N независимых испытаний; СВ принимает определенные значения $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$.

Причем, x_1 благоприятствовали m_1 случаев, x_2 - m_2 случаев, далее x_n - m_n случаев.

Арифметическое значений СВ X обозначим через $M[X]$:

$$M[X] = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_i m_i + \dots + x_n m_n}{N} =$$

$$= x_1 \frac{m_1}{N} + x_2 \frac{m_2}{N} + \dots + \sum_{i=1}^n x_i \frac{m_i}{N} = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad \text{где} \quad N = \sum_{i=1}^n m_i$$

Если ряд $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i p_i$ сходится абсолютно и

$$\sum_{i=1}^n |x_i| p_i < \infty$$

то $M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

Для дискретной СВ $M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

Для непрерывной СВ $M[X] =$

Свойства МО СВ: $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$

1. $M[C] = C$;

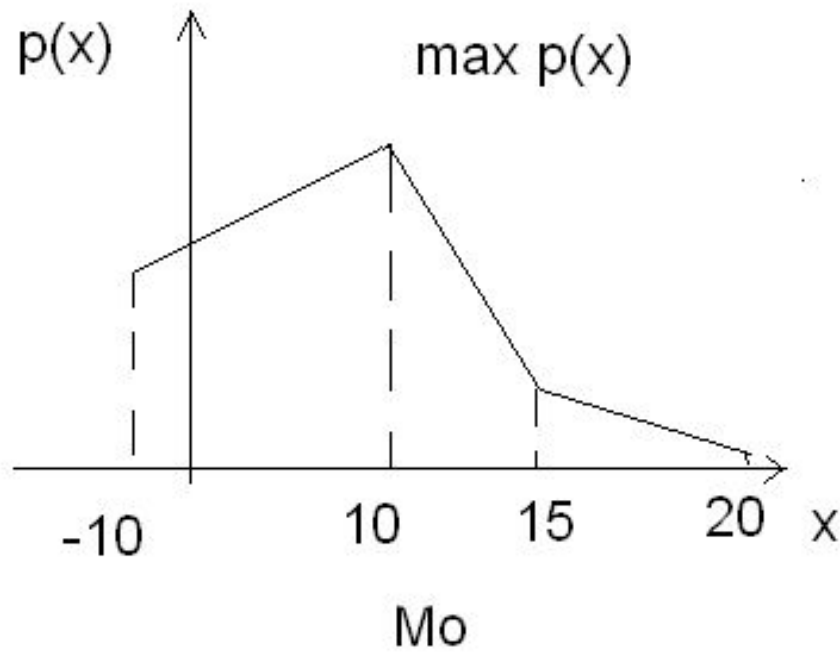
2. $M[CX] = CM[X]$;

3. $M[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + \dots + M[X_n]$;

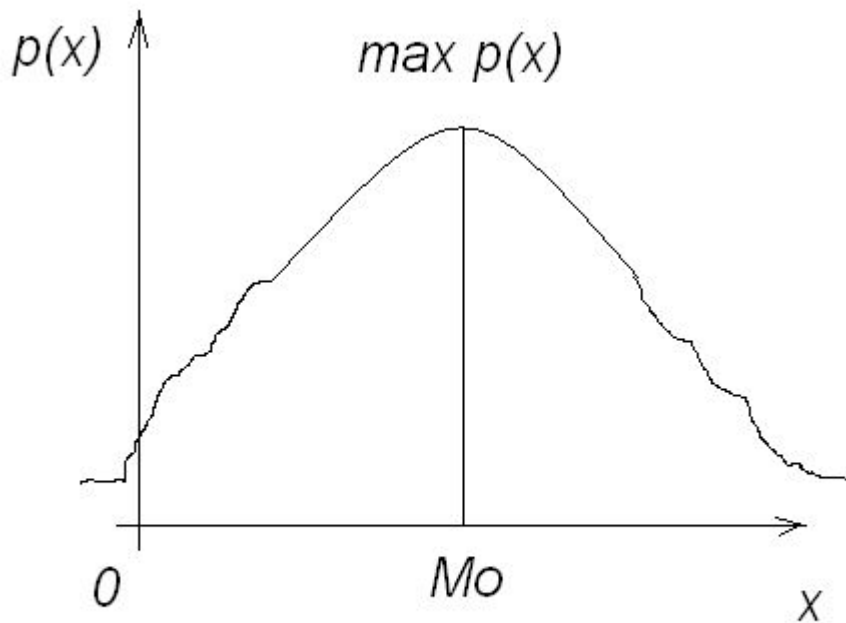
4. $M[X_1 X_2 \dots X_n] = M[X_1] M[X_2] \dots M[X_n]$.

Кроме МО вводят такие характеристики, как мода (M_o) и медиана (M_e).

Модой дискретной

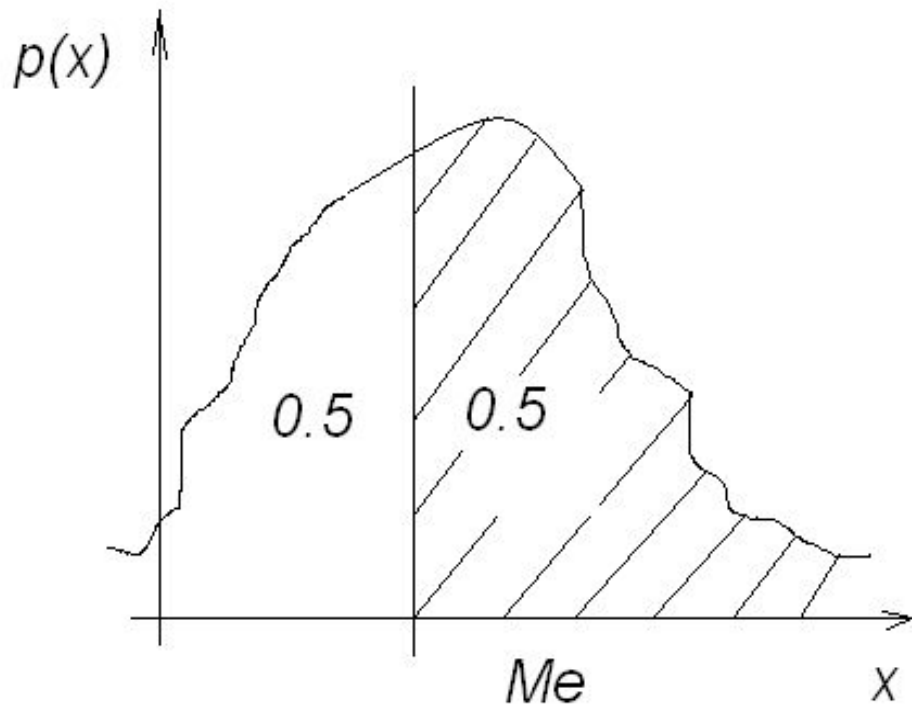


наиболее
значение(рис.1).



непрерывной
значению,
плотность

максимальное
значение (рис.2).



СВ

значение
которого $P(X < Me) =$
 $0,5$

Симметричное распределение: $M[X] = Mo = Me$

§3.2.2. Характеристики рассеивания и взаимодействия

Моменты двух видов: начальные и центральные.

Начальным моментом k -го порядка $\alpha_k[X]$ СВ X называется МО k -ой степени от этой СВ, т.е. $\alpha_k[X] = M[X^k]$.

Для дискретной СВ: $\alpha_k[X] = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i$

Для непрерывной СВ: $\alpha_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$

Центрированной СВ X° , соответствующей СВ X , называется отклонение СВ от ее МО $M[X]=m$, т.е. $X^\circ=X-m$.

$$M[X^\circ]=0.$$

Для дискретной СВ X : $M[X^\circ]=M[X-m]=$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - m) p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i - m \sum_{i=1}^n p_i = 0$$

Центральным моментом k -го порядка $\mu_k[X]$ СВ X называется МО k -ой степени центрированной СВ X° , т.е. $\mu_k[X]=M[(X^\circ)^k]=M[(X-m)^k]$.

Для дискретной СВ X : $\mu_k[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^k p_i$

Для непрерывной СВ X : $\mu_k[X] =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^k p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^k dF(x)$$

$$\mu_1[X] = M[X^\circ] = M[X - m] = 0.$$

$$\mu_2[X] = M[(X^\circ)^2] = M[(X - m)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2m \sum_{i=1}^n x_i p_i + m^2 \sum_{i=1}^n p_i = \alpha_2[X] - m^2 = \alpha_2[X] - (\alpha_1[X])^2$$

$$\mu_2[X] = D[X] = D_x = \sigma^2 .$$

Для дискретной СВ: $D[X] = M[(X^\circ)^2] = M[(X -$

$$-m)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

Для непрерывной СВ: $D[X] =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 dF(x)$$

Среднее квадратическое или стандартное отклонение СВ σ : $\sigma = \sqrt{D[X]}$

Свойства дисперсии:

$$D[X] \geq 0. \text{ При } X=C : D[C]=0.$$

$$D[CX]=C^2D[X].$$

$$D[X_1+X_2+\dots+X_n]=D[X_1]+D[X_2]+\dots+D[X_n].$$

$$D[C+X]=D[X].$$

$$D[X-Y]=D[X]+D[Y].$$

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K(x,y).$$

Коэффициент асимметрии $A = \frac{\mu_3[X]}{\sqrt{D^3[X]}} = \frac{\mu_3[X]}{\sigma^3}$

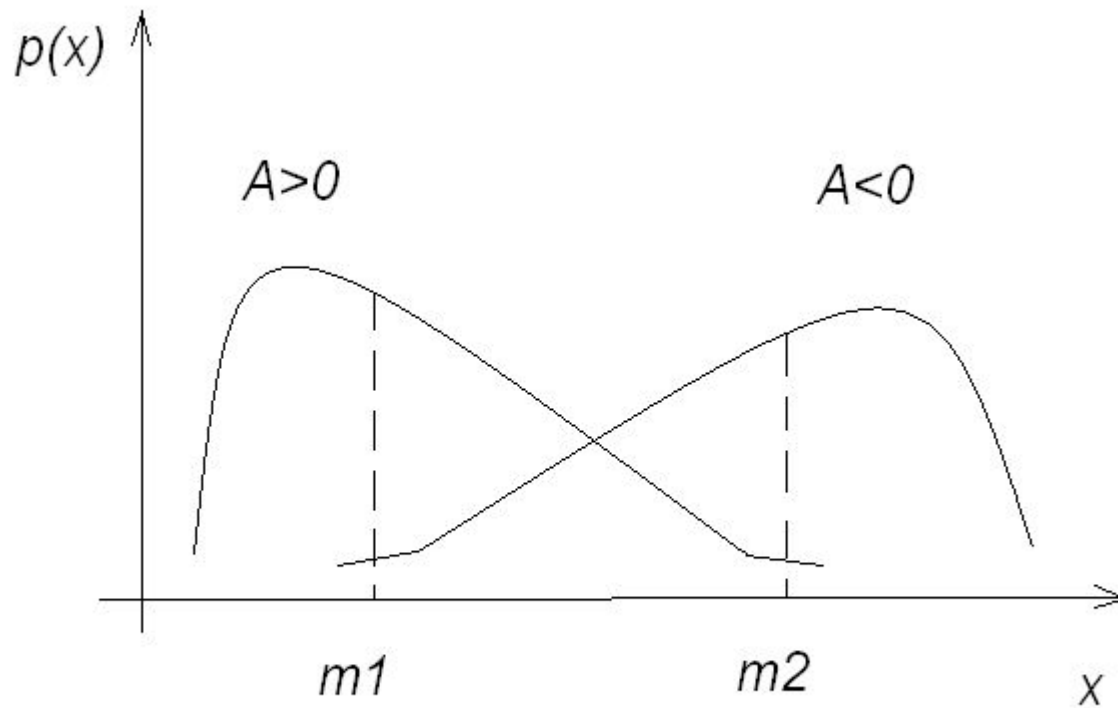


Рис.4

Коэффициент эксцесса: $E = \frac{\mu_4[X]}{\sqrt{D^4[X]} - 3} = \frac{\mu_4[X]}{\sigma^4} - 3$

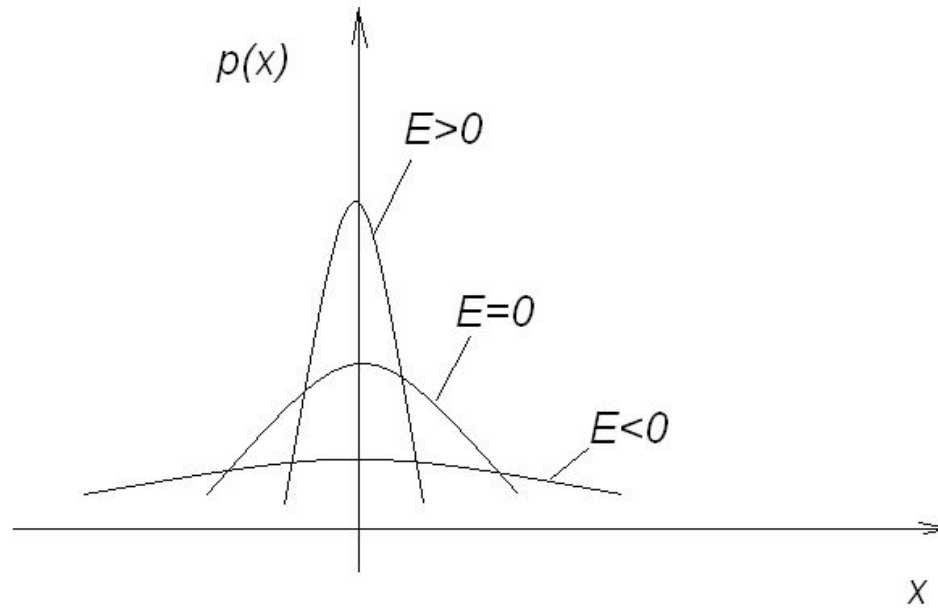


Рис.5

Для нормального закона распределения

$$E = \frac{\mu_4[X]}{\sqrt{D^4[X]} - 3} = \frac{\mu_4[X]}{\sigma^4} - 3 = 0$$