

# Экономико-математические методы и модели

# Учебные вопросы

- Основы динамического программирования:
  - Решение задачи «О рюкзаке» методом динамического программирования

Имеется рюкзак с заданной вместимостью

(под вместимостью понимается максимально возможная масса), и имеются предметы ( $n$  штук), причем каждый предмет характеризуется массой  $w$  и ценностью  $P$ .

$w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

$p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

Требуется собрать рюкзак с максимальной ценностью и минимальным возможным весом, не превышающим  $W_{\max}$ .

1 способ: перебор (простой)

2 способ: метод ветвей и границ, который заключается в умном переборе. Могут быть случаи, когда перебираются все возможные варианты.

3 способ: использование «жадного» алгоритма (берется каждый текущий момент («лучший» элемент), ориентированный на их относительной точности). Решение будет получено достаточно быстро, но не факт, что оно будет оптимальным.

# Математическая формулировка задачи

Имеется рюкзак с целочисленным значением «веса»  $W$ .  
Имеется  $n$  предметов, характеризующихся целочисленными показателями весов  $w_i$  и ценностей  $p_i$ . Требуется построить вектор бинарных величин  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  ( $0$  – не положили в рюкзак,  $1$  – положили) так, чтобы при выполнении ограничения  $b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_nw_n = ( ) \leq W$   
 $b_1p_1 + b_2p_2 + \dots + b_np_n = F(\text{набора предметов}) \square \max$

Вход:  $W_{\max}$ ,  $b_i$ ,  $p_i$

Выход: вес рюкзака, который получится  $W$ ,  $p_i$ ,  $B$  и номера предметов.

# Использование метода динамического программирования

Главной идеей метода динамического программирования является сохранение результата, достигнутого на предыдущих этапах, то есть, каждый раз, решая задачу о необходимости загрузить рассматриваемый предмет в рюкзак, пытаемся решить задачу, анализируя те результаты, которые были достигнуты ранее, то есть до того как мы начали рассматривать текущий  $k$ -й предмет, а именно, основываясь на том как был упакован рюкзак предметами с номерами  $1, 2, \dots, k-1$ , причем, необходимо еще учитывать минимальность веса, то есть рассматривать возможность веса рюкзака от  $0$  до  $w$ .

# Метод решения

Для хранения результата предыдущих вычислений будем хранить все значения в матрице  $A(k,s)$ .

Все величины целочисленные.

$k$  – номер текущего предмета, который может быть положен в рюкзак;

$s$ - текущий рассматриваемый вес рюкзака.

Учитывая исходные данные, матрица будет  $(5 \times 15)$ . Элемент матрицы  $A$  будет иметь смысл максимальной возможной стоимости при весе меньшем или равном  $s$  в случае возможности разместить в рюкзаке  $k$ -первых предметов. Для удобства расчетов будем рассматривать нулевой столбец и нулевую строку, которые полностью заполнены нулями.

$A(0,i) = 0$ ;  $A(j,0) = 0$ ; для любых  $i=0,15$ ;  $j=0,5$

# Пример 1: N=5, W max=15

<b>k</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>w</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>5</b>
<b>p</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>6</b>

Расчетная формула:

$$A[k,s] = \max( A[k-1,s], A[k-1, s - w[k]] + p[k] )$$

Будем заполнять матрицу по строкам, то есть каждая строка соответствует анализу k-го предмета.

$$A[4,10] = \max( A[3,10], A[3,8] + 3 ) = \max( 8, 11 )$$

<b>k</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>											
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>11</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>12</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>14</b>

Пример 2:

$W_{\max} = 21$

$n = 6$

k	1	2	3	4	5	6
w	3	5	7	2	4	8
p	2	6	5	3	5	7

$k \setminus s$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	0	2	2	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
3	0	0	0	2	2	6	6	6	8	8	8	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	3	3	3	6	6	9	9	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	3	3	5	6	8	9	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
6	0	0	3	3	5	6	8	9	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
										1	1	4	4	4	6	6	6	8	9	1	1	1	1