Математика. ИМИТ-1 курс, 2 семестр

Лекция 2. Интегрирование некоторых классов функций

- ***Интегрирование тригонометрических функций***
- ***Интегрирование функций, содержащих квадратный трёхчлен***
- ***Интегрирование дробно-рациональных функций***
- ***Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции***

3. Интегрирование некоторых классов функций

3.1. Интегрирование тригонометрических функций

Случай 1. $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x\,dx$, где хотя бы одно из чисел α, β – ***положительное нечетное*** число. В этом случае следует отделить от нечетной степени $\sin x$ (или $\cos x$) одну степень и подвести ее под знак дифференциала.

Пример 3.1. Найти $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

Подынтегральная функция $\operatorname{ctg}^3 x = \dfrac{\cos^3 x}{\sin^3 x}$ содержит $\cos x$ в нечетной положительной степени. Поэтому отделим в числителе $\cos x$ и воспользуемся тем, что $\cos x\,dx = d(\sin x)$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Тогда

$$\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x\,dx}{\sin^3 x} = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}\,d(\sin x) = \int \sin^{-3} x\,d(\sin x) - \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{\sin^{-2} x}{-2} - \ln|\sin x| + C.$$

Случай 2. $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x\, dx$, где α, β – ***четные неотрицательные*** числа. В этом случае следует понизить степень, используя формулы удвоения угла:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \qquad (3.1)$$

Пример 3.2. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

Подынтегральная функция содержит $\sin x$ и $\cos x$ в четной степени. Поэтому понизим степени, используя формулы (3.1):

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \int \frac{1-\cos 4x}{8} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 4x\, d(4x)\right) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Случай 3. $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x\, dx$, где α, β – целые числа и $\alpha + \beta = -2$.

Следует подынтегральное выражение выразить через $\operatorname{tg} x$ и $d(\operatorname{tg} x)$, или через $\operatorname{ctg} x$ и $d(\operatorname{ctg} x)$.

Пример 3.3. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x\, d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$,

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \operatorname{ctg}^5 x\, d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{6} + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти интегралы: 1. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$, 2. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$, 3. $\int \cos^2 x\,dx$,

4. $\int \sin^4 x\,dx$, 5. $\int \dfrac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x}$.

Ответы. 1. $\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln\left|\cos x\right|+C$, 2. $\dfrac{\cos^5 x}{5}-\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$, 3. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$,

4. $\dfrac{3x}{8}-\dfrac{\sin 2x}{4}+\dfrac{\sin 4x}{32}+C$, 5. $-\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$.

3.2. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интегралы следующих двух типов:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^k}, \quad I_2 = \int \frac{(mx+n)\,dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^k},$$

где $k = 1$ или $k = \frac{1}{2}$. Отметим, что эти интегралы при $k = 1$ возникают при интегрировании дробно-рациональных функций (п. 3.3).

Укажем общие рекомендации по отысканию интегралов этих типов.

В интеграле I_1 выделить из квадратного трехчлена полный квадрат. В интеграле I_2 выделить в числителе производную квадратного трехчлена.

Пример 3.4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Имеем интеграл первого типа при $k=1/2$. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат: $x^2+2x+4=\left(x^2+2x+1\right)+3=(x+1)^2+3$.

Используя это равенство и формулу (13) п. 1.3, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+3}\right|+C.$$

Пример 3.5. Найти интеграл $I=\int \frac{(7x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Имеем интеграл второго типа при $k=1/2$. Найдем производную квадратного трехчлена $\left(x^2+2x+4\right)'=2x+2$ и выделим ее в числителе следующим образом:

$$(7x-1)=(2x+2)\cdot\frac{7}{2}-7-1=\left(x^2+2x+4\right)'\cdot\frac{7}{2}-8.$$

Тогда $$I=\frac{7}{2}\int\frac{\left(x^2+2x+4\right)'dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}-8\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}.$$

Второй интеграл в этой сумме был найден в примере 3.4:

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+3}\right|+C_2.$$

В первом интеграле воспользуемся тем, что

$$I_1=\int\frac{u'(x)dx}{\sqrt{u(x)}}=\int\frac{du(x)}{\sqrt{u(x)}}=\int u^{-1/2}du=\frac{u^{1/2}}{1/2}+C_1=2\sqrt{u}+C_1.$$

Обозначив $C=C_1+C_2$, окончательно получим:

$$I=\frac{7}{2}I_1-8I_2=7\sqrt{x^2+2x+4}-8\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right|+C.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти интегралы 1. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$, 2. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$.

Ответы. 1. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+4\,\mathrm{arctg}\,(x+2)+C$, 2. $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C$.

3.3. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью $R(x)$ называется отношение двух многочленов: $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, $(a_0\neq 0,\ b_0\neq 0)$.

Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, т.е. $n<m$, то рациональная дробь называется правильной. В противном случае рациональная дробь называется неправильной.

Интегрирование дробно-рациональной функции проводится в несколько этапов. Сначала мы перечислим эти этапы, а потом подробно поясним каждый из них на примере. Итак, для интегрирования дробно-рациональной функции $R(x)$ следует:

1) если рациональная дробь неправильная, то выделить из нее целую часть и правильную рациональную дробь $R_0(x)$: $R_0(x)=\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$, $(k<m)$;

2) знаменатель дроби $Q_m(x)$ разложить на линейные множители $(x-a)^{\alpha}$, $(x-b)^{\beta}$ и квадратные множители $\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}$ с действительными коэффициентами;

3) правильную рациональную дробь разложить методом неопределенных коэффициентов на простейшие дроби

$$R_0(x)=\frac{P_k(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\lambda}}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{\left(x-a\right)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{\left(x-a\right)^{\alpha}}+\ldots$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{\left(x-b\right)^2}+\ldots+\frac{B_{\beta}}{\left(x-b\right)^{\beta}}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{C_{\lambda}x+D_{\lambda}}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}};$$

4) найти неопределенные (неизвестные пока) коэффициенты $A_1,\ldots,A_{\alpha}$, $B_1,\ldots B_{\beta},C_1,D_1,\ldots,C_{\lambda},D_{\lambda}$;

5) найти интегралы от целой части и простейших дробей.

Интегрирование элементарных дробей.

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{1}{ax+b}$; III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t = ax + b$.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 6x-5; & du = 6dx; \\ x = \dfrac{u+5}{6}; & \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}du = \frac{7}{3}\int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} arctg \frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3} arctg \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x+3; & du = dx; \\ x = u-3; & \end{array} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Интегрирование дробей IV типа – достаточно тяжёлый процесс, рассмотрение этого вопроса рекомендуется самым сильным студентам, остальные могут пропустить этот пункт и перейти на слайд 18

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{ \begin{aligned} & dv_1 = \frac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ & v_1 = \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{aligned} \right\}$

$$\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}+\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{2n-3}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int\frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx=(4a)^n\int\frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx=\left\{\begin{matrix}u=2ax+b; & du=2adx;\\ x=\dfrac{u-b}{2a}; & s=4ac-b^2;\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{\dfrac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du=\frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}+\frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Пример:

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx = \left\{\begin{matrix} u = x-2; & du = dx; \\ x = u+2; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du =$$

$$= 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{\begin{matrix} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{matrix}\right\} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 3.6. Найти интеграл $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}dx$.

Подынтегральная функция есть неправильная рациональная дробь, так как степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе. Поэтому выделим из неправильной дроби ее целую часть, поделив числитель на знаменатель. В результате деления получим

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2} = x+1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}. \tag{3.2}$$

Теперь знаменатель получившейся правильной дроби разложим на множители $x^3-x^2=x^2(x-1)$, а саму правильную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}. \tag{3.3}$$

Умножив это равенство на $x^2(x-1)$, получим:

$$x^2+1 = Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2. \tag{3.4}$$

Подставив в это равенство значения $x=0$ и $x=1$, получим $B=-1$, $C=2$.

Для отыскания коэффициента A можно либо в равенстве (3.4) подставить еще одно частное значение x, либо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства (3.4), например, при x^2: $1 = A + C$. Тогда $A = 1 - C = -1$. Подставляя найденные $A = -1$, $B = -1$, $C = 2$ в равенство (3.3) и используя равенство (3.2), окончательно получим

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}dx = \int \left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2}+x-\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C.$$

Пример 3.7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\left(x^7+2\right)}$.

Здесь разложение знаменателя на линейные и квадратичные множители и разложение дроби на простейшие требуют громоздких выкладок. Значительно проще вынести из скобки x^7: $\int \frac{dx}{x\left(x^7+2\right)} = \int \frac{dx}{x^8\left(1+2x^{-7}\right)}$

и воспользоваться тем, что $\frac{dx}{x^8} = x^{-8}dx = \frac{dx^{-7}}{-7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\left(2x^{-7}\right)}{-7} = -\frac{1}{14}d\left(1+2x^{-7}\right)$.

Тогда $\int \frac{dx}{x\left(x^7+2\right)} = -\frac{1}{14}\int \frac{d\left(1+2x^{-7}\right)}{1+2x^{-7}} = -\frac{1}{14}\ln\left|1+2x^{-7}\right| + C.$

Пример 3.8. Найти интеграл $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2x^4-3}$.

Как и в предыдущем примере, разложение знаменателя на линейные и квадратичные множители и разложение дроби на простейшие требуют громоздких выкладок. Удобнее воспользоваться тем, что $x^3 dx = \frac{dx^4}{4}$. Тогда

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2x^4-3} = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{\left(\left(x^4\right)^2+2x^4+1\right)-4} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^4+1\right)}{\left(x^4+1\right)^2-4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\left(x^4+1\right)-2}{\left(x^4+1\right)+2}\right| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^4-1}{x^4+3}\right| + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти интегралы: 1. $\int \dfrac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$, 2. $\int \dfrac{dx}{x^4-x^2}$, 3. $\int \dfrac{dx}{x^3+1}$.

Указания: в примере 1 учесть, что $x^3-5x^2+4x = x\left(x^2-5x+4\right) = x(x-1)(x-4)$;

в примере 3 учесть, что $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$.

Ответы. 1. $5x+\dfrac{1}{2}\ln|x|-\dfrac{7}{3}\ln|x-1|+\dfrac{161}{6}\ln|x-4|+C$, 2. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+C$,

3. $-\dfrac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\dfrac{1}{3}\ln|x+1|+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$,

3.4. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

Мы рассмотрели классы функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции. Но некоторые интегралы нельзя выразить через элементарные функции. Отметим ряд таких интегралов, имеющих большое прикладное значение:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \sin x^2 dx,\ \int \cos x^2 dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x}.$$

С некоторыми из этих интегралов вы позднее встретитесь, например с первым интегралом – в теории вероятностей, со вторым и третьим интегралами – в физике.