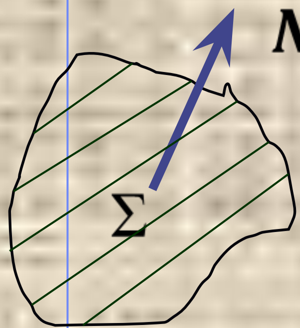
Векторный анализ -теория поля.

Векторное поле

- Циркуляция
- Ротор. Теорема Стокса

Циркуляция векторного поля

Циркуляцией дифференцируемого векторного поля $\boldsymbol{A}$ называют интеграл векторного поля **по замкнутой кривой** $\oint(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{dr})$, которая

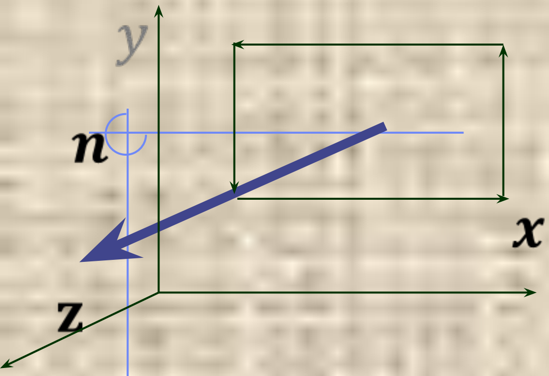


$\boldsymbol{N}$ ограничивает некоторую односвязную поверхность Σ. Интеграл зависит от направления обхода. За положительное направление обхода принимают такое, когда область Σ остается слева (из конца вектора нормали $\boldsymbol{N}$ кажется , что движение по кривой идет против часовой стрелки).

Найдем циркуляцию (работу) поля по бесконечно малому замкнутому прямоугольному контуру со сторонами Δx_k, Δy_k, ориентированному параллельно координатной плоскости $X0Y$. При положительном направлении обхода контура нормаль к поверхности (части плоскости), охваченной контуром $\boldsymbol{n}(0, 0, 1)$, $|cos\gamma| = 1$, элемент площади поверхности $\Delta\sigma_k = \Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

При этом работу можно находить как скалярное произведение вектора поля на вектор перемещения вдоль границы области.

Ротор. Теорема Стокса



$$\int(\boldsymbol{A},\boldsymbol{dr}) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta\sigma = (rot\boldsymbol{A},\boldsymbol{n})\Delta\sigma =$$

$= (\text{Пр}_{\boldsymbol{n}} rot\boldsymbol{A})\Delta\sigma$ - поток вектора $rot\boldsymbol{A}$

Это соотношение справедливо при любой ориентации контура.

Определение ротора . Ротором векторного поля называется вектор, проекция которого в каждой точке дифференцируемости поля на направление нормали к поверхности, охваченной контуром, равна плотности циркуляции

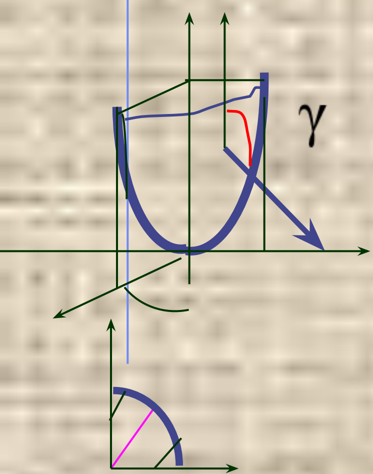
$$(\text{Пр}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{rotA}) = (\boldsymbol{rotA},\boldsymbol{n}) = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\int(\boldsymbol{A},\boldsymbol{dr})}{\Delta\sigma} \quad .$$

Теорема Стокса. Циркуляция дифференцируемого векторного поля по произвольному кусочно – гладкому замкнутому контуру равна потоку вектора $rotA$ через какую-либо поверхность, ограниченную этим контуром

$$\int(\boldsymbol{A},\boldsymbol{dr}) = \iint(\boldsymbol{rotA},\boldsymbol{n})d\sigma$$

Пример вычисления циркуляции

Найдем циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{A} = (y^2; xy;\ x^2 + y^2)$ по линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = Rz,\ z = R,\ x = 0, y = 0$



Шаг 1. Сложный замкнутый контур из трех кривых ограничивает часть поверхности параболоида

Нормаль образует тупой угол с осью $0z$; $cos\gamma < 0$

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ -1\right) \quad \rightarrow \boldsymbol{N} = \left(\frac{2x}{R}; \ \frac{2y}{R}; \ -1\right);$$

Шаг 2. $rot\boldsymbol{A} = (2y; -2x; -y)$

Шаг 3. Находим поток ротора через поверхность параболоида : $(rot\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{N}) = \frac{4xy}{R} - \frac{4xy}{R} + y = y$

$$\int (A, dr) = \iint (rot\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n}) d\sigma = \iint (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{N}) ds = \iint y ds =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r sin\varphi r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{R^3}{3}$$