

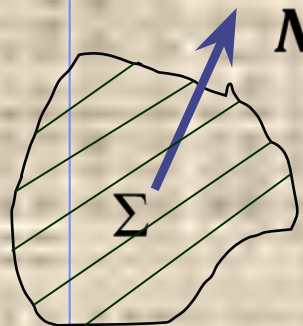
Векторный анализ - теория поля.

Векторное поле

- Циркуляция
- Ротор. Теорема Стокса

Циркуляция векторного поля

Циркуляцией дифференцируемого векторного поля \mathbf{A} называют интеграл векторного поля по замкнутой кривой $\int (\mathbf{A}, d\mathbf{r})$, которая



\mathbf{N} ограничивает некоторую односвязную поверхность Σ .

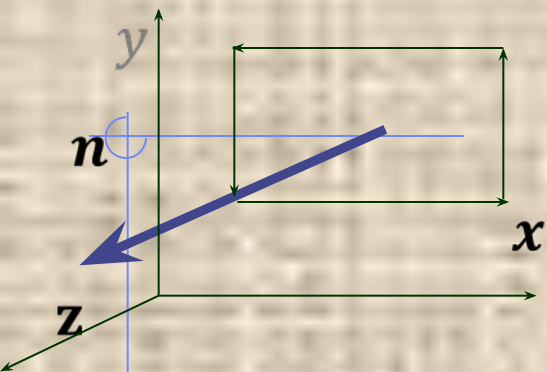
Интеграл зависит от направления обхода. За положительное направление обхода принимают такое, когда область Σ остается слева (из конца вектора нормали \mathbf{N}

кажется, что движение по кривой идет против часовой стрелки).

Найдем циркуляцию (работу) поля по бесконечно малому замкнутому прямоугольному контуру со сторонами Δx_k , Δy_k , ориентированному параллельно координатной плоскости XOY . При положительном направлении обхода контура нормаль к поверхности (части плоскости), охваченной контуром $\mathbf{n}(0, 0, 1)$, $|\cos \gamma| = 1$, элемент площади поверхности $\Delta \sigma_k = \Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

При этом работу можно находить как скалярное произведение вектора поля на вектор перемещения вдоль границы области.

Ротор. Теорема Стокса



$$\int (A, dr) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta\sigma = (rot A, n) \Delta\sigma = \\ = (\text{Пр}_n rot A) \Delta\sigma - \text{поток вектора } rot A$$

Это соотношение справедливо при любой ориентации контура.

Определение ротора . Ротором векторного поля называется вектор, проекция которого в каждой точке дифференцируемости поля на направление нормали к поверхности, охваченной контуром, равна плотности циркуляции

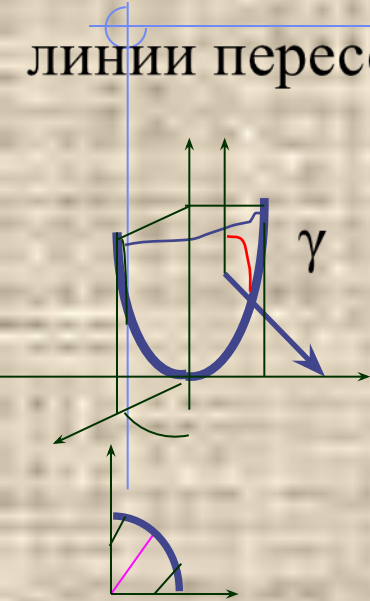
$$(\text{Пр}_n rot A) = (rot A, n) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\int (A, dr)}{\Delta\sigma} .$$

Теорема Стокса. Циркуляция дифференцируемого векторного поля по произвольному кусочно – гладкому замкнутому контуру равна потоку вектора $rot A$ через какую-либо поверхность, ограниченную этим контуром

$$\int (A, dr) = \iint (rot A, n) d\sigma$$

Пример вычисления циркуляции

Найдем циркуляцию векторного поля $\mathbf{A} = (y^2; xy; x^2 + y^2)$ по линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = Rz$, $z = R$, $x = 0, y = 0$



Шаг 1. Сложный замкнутый контур из трех кривых ограничивает часть поверхности параболоида

Нормаль образует тупой угол с осью Oz ; $\cos \gamma < 0$

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right) \rightarrow \mathbf{N} = \left(\frac{2x}{R}; \frac{2y}{R}; -1 \right);$$

Шаг 2. $\text{rot} \mathbf{A} = (2y; -2x; -y)$

Шаг 3. Находим поток ротора через поверхность

параболоида: $(\text{rot} \mathbf{A}, \mathbf{N}) = \frac{4xy}{R} - \frac{4xy}{R} + y = y$

$$\int (\mathbf{A}, d\mathbf{r}) = \iint (\text{rot} \mathbf{A}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint (\mathbf{A}, \mathbf{N}) ds = \iint y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r \sin \varphi r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{R^3}{3}$$