11.11.21.

Тема:
Логарифмические уравнения и неравенства.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1227
https://infourok.ru/videouroki/1228

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Логарифмические уравнения

Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \quad (1)$$

Предположим, что x — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. x — корень уравнения (1).

Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 ((x + 1)(x + 3)) = 3. \quad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$(x + 1)(x + 3) = 8, \quad (3)$$

$x^2 + 4x + 3 = 8$, т. е. $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения $x = 1$, получаем $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$, т. е. $x = 1$ — корень уравнения (1).

При $x=-5$ числа $x+1$ и $x+3$ отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т. е. $x=-5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ $x=1$. ◁

Замечание. Решение уравнения (1) можно заменить решением равносильной ему системы

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \\ \log_2((x+1)(x+3))=3. \end{cases}$$

Задача 2 Решить уравнение $\log_2(1-x)=3-\log_2(3-x)$.

▶ Перенесём логарифм из правой части в левую:

$$\log_2(1-x)+\log_2(3-x)=3,$$

откуда

$$\log_2((1-x)(3-x))=3,$$

$$(1-x)(3-x)=8.$$

Решая это уравнение, получаем $x_1=5$, $x_2=-1$. Число $x_1=5$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x=5$ левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число $x=-1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ $x=-1$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\lg(2x^2-4x+12)=\lg x+\lg(x+3).$$

▶ По свойству логарифмов

$$\lg(2x^2-4x+12)=\lg(x^2+3x),$$

откуда (по теореме § 18) $2x^2-4x+12=x^2+3x$, $x^2-7x+12=0$, $x_1=3$, $x_2=4$. Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x_1=3$, $x_2=4$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $\log_7(3x+4)=\log_7(5x+8)$.

▶ Приравнивая выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем $3x+4=5x+8$, откуда $x=-2$. левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

Ответ Корней нет. ◁

Логарифмические неравенства

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geqslant b$. Приведём примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ решения таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т. е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Задача 1 Решить неравенство

$$\lg (x+1) \leqslant 2. \qquad (1)$$

▶ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x, а левая часть — при $x + 1 > 0$, откуда $x > -1$, т. е. $x > -1$ — область определения неравенства (1).

Исходное неравенство запишем так:

$$\lg (x+1) \leqslant \lg 100. \qquad (2)$$

Так как $10 > 1$, то $x + 1 \leqslant 100$, откуда $x \leqslant 99$. Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $-1 < x \leqslant 99$. ◁

Задача 2 Решить неравенство

$$\log_2 (x-3) + \log_2 (x-2) \leqslant 1. \qquad (3)$$

▶ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при $x - 3 > 0$ и $x - 2 > 0$.

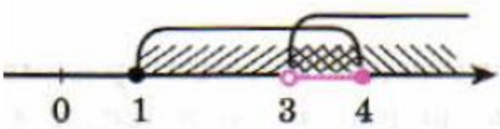
Следовательно, областью определения этого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$. По свойствам логарифма неравенство (3) при $x > 3$ равносильно неравенству

$$\log_2 (x-3)(x-2) \leqslant \log_2 2. \qquad (4)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при $x > 3$ неравенство (4) выполняется, если $(x-3)(x-2) \leqslant 2$.

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x > 3. \end{cases}$$



43

Решая первое неравенство этой системы, получаем $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$, откуда $1 \leqslant x \leqslant 4$. Совмещая отрезок $[1; 4]$ с промежутком $(3; +\infty)$, получаем $3 < x \leqslant 4$ (рис. 43). ◁

Практическая часть.

Решить уравнение

337 1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$;

2) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$;

3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0$;

338 1) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2$;

2) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$;

339 1) $\frac{1}{2}\lg(x^2+x-5)=\lg(5x)+\lg\frac{1}{5x}$;

Решить неравенство

355 1) $\log_3(x+2)<3$; 2) $\log_8(4-2x)\geqslant 2$;

356 1) $\lg x>\lg 8+1$; 2) $\lg x>2-\lg 4$;