Поток событий.

- Рассмотрим нестационарный пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$, зависящий от времени t, некоторый промежуток времени длиной $\tau > 0$, начинающийся с момента t_0(и заканчивающийся в момент $t_0 + \tau$), и дискретную случайную величину $\mathrm{X}(t_0, \tau)$- число событий, наступивших за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \tau$.

- **Теорема 3** В нестационарном пуассоновском потоке с интенсивностью $\lambda(t)$:
- 1) случайная величина $\mathrm{X}(t_0, \tau)$ распределена по закону Пуассона $P_m(\tau) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, (m = 0,1,2, \dots)$ в котором параметр a представляет собой математическое ожидание $M[X(t_0, \tau)]$ случайной величины $\mathrm{X}(t_0, \tau)$, зависящее уже не только от τ, но и от t_0 и выражающееся формулой $a =$
- $= a(t_0, \tau) = M[X(t_0, \tau)] = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt$
- 2) дисперсия случайной величины $\mathrm{X}(t_0, \tau)$ – $D[X(t_0, \tau)] = a$
- 3) среднее квадратическое отклонение случайной величины $\mathrm{X}(t_0, \tau)$ – $\sigma = [\mathrm{X}(t_0, \tau)] = \sqrt{a}$.

- **Следствие.** В нестационарном пуассоновском потоке с интенсивностью $\lambda(t)$ вероятность того, что за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \tau$
- 1) не наступит ни одного события
- $P(\mathrm{X}(t_0, \tau) = 0) = P_0(t_0, \tau) = e^{-a}$
- 2) наступит менее k(k=1,2,…) событий
- $P(\mathrm{X}(t_0, \tau) < k) = e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!} \; (k = 1,2, \dots)$
- 3)наступит не менее k(k=1,2,…) событий
- $P(\mathrm{X}(t_0, \tau) \geq k) = 1 - e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!} (k = 1,2, \dots)$

- 4) наступит хотя бы одно событие $P(X(t_0, \tau) \geq 1) = 1 - e^{-a}$, где математическое ожидание a в формулах

$$P(X(t_0, \tau) = 0) = P_0(t_0, \tau) = e^{-a}$$

- $P(X(t_0, \tau) < k) = e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!}\ (k = 1,2, \dots)$
- $P(X(t_0, \tau) \geq k) = 1 - e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!} (k = 1,2, \dots)$
- $P(X(t_0, \tau) \geq 1) = 1 - e^{-a}$
- определяется формулой $a = a(t_0, \tau) =$
- $= M[X(t_0, \tau)] = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt.$

- **<u>Опр.</u>** Элементом вероятности появления события в нестационарном пуассоновском потоке называется вероятность $P_1(t_0, \Delta t)$ появления события за элементарный (достаточно малый) промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$.

- Разница в определениях элементов вероятности появления события в простейшем и в нестационарном пуассоновском потоках состоит в том, что элемент вероятности появления события в нестационарном пуассоновском потоке зависит не только от длины промежутка Δt, как в случае простейшего потока, но и от его начала t_0.

- **<u>Утверждение.</u>** Для элемента вероятности появления события за элементарный промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ в нестационарном пуассоновском потоке с интенсивностью $\lambda(t)$ имеет место приближенная формула $P_1(t_0, \Delta t) \approx \lambda(t_0) \cdot \Delta t, (\Delta t \to 0)$.

Характеристика случайной величины х (t0, τ)

№	Характеристики	Обозначения и формулы
1	Интенсивность нестационарного пуассоновского потока	
2		
3		
4		
5		

6		
7		
8		
9	Дисперсия случайной величины	
10	Среднее квадратическое отклонение случайной величины	

- Рассмотрим случайную величину $T(t_0)$- промежуток времени между двумя соседними событиями, первое из которых наступило в момент времени t_0. Это непрерывная случайная величина будет распределена уже не по показательному закону; вид её закона распределения будет зависеть от t_0 и от вида функции $\lambda(t)$. Формулы характеристик случайной величины $T(t_0)$, полученные на основе их стандартных определений, соберём в таблице.

№	Характеристики	Обозначения и формулы
1.	Интенсивность нестационарного пуассоновского потока	
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		

- ***Задача.***
- Проанализировать поток поступлений в страховую компанию, рассмотренную в предыдущей задаче, требований по выплатам в соответствии со страховыми полюсами за период с начало ноября по конец января. Изучение этого потока в рассмотренный период в прошлые годы показало , что число требований по выплатам, поступающих в компанию за промежуток времени τ, зависит не только от его продолжительности, но и от его начала. Объясняется это тем, что в рассматриваемый период происходит ухудшение погоды (выпадают осадки, снег, образуется гололедица), рано темнеет, в связи с чем ухудшается обстановка на дорогах, что в свою очередь ведёт к росту числа дорожно-транспортных происшествий.

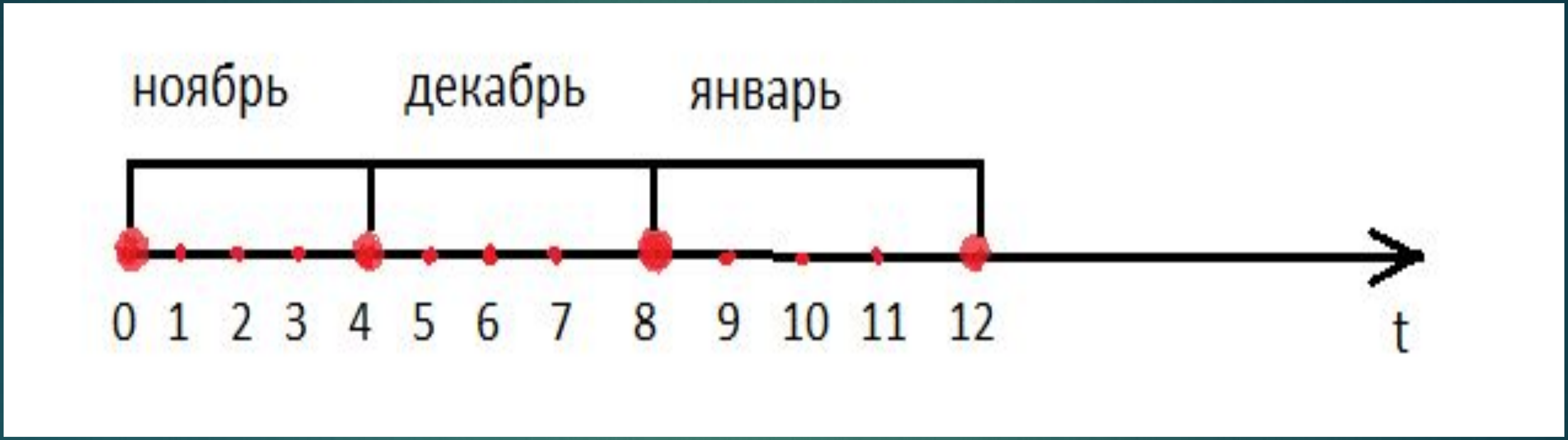
- Независимость поступлений требований по выплатам в любые непересекающиеся интервалы времени и поступление требований по одному в малые промежутки времени сохраняются и в данной ситуации.
  Ожидаемое число требований поступающих в компанию за неделю, зависит от времени следующим образом: $\lambda(t) = t^{1/4}$.

- С какой вероятностью:
1. За ноябрь месяц поступит в компанию 6 требований?
2. За декабрь месяц поступит в компанию 6 требований?
3. За январь месяц поступит не менее пяти требований?
4. За первые две недели ноября не поступит ни одного требования?
5. За вторую и третью недели декабря поступит хотя бы одно требование?
6. Интервал времени между двумя соседними поступлениями требований будет не менее трёх дней, если первое из них поступило в первый день второй недели января?
7. Интервал времени между двумя соседними поступлениями требований будет меньше двух дней, если первое из них поступило в начале третьей недели декабря?

- Пусть П - поток требований по выплатам, поступающих в страховую компанию. Поток П без последствий и ординарен, т.е является пуассоновским . Но в отличие от потока в предыдущей задаче данный поток уже не будет стационарным и, следовательно, не будет простейшим.

- За единицу времени примем одну неделю. Пусть $X(t_0, \tau)$- случайное число поступивших в компанию требований за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \tau$, а $T(t_0)$ – случайный интервал времени между двумя соседними требованиями, первое из которых поступило в момент времени t_0.

Решение



Месяцы, разбитые на недели, в которые анализируется поток поступлений в страховую компанию требований по выплатам.

- **1.** τ=1 месяц=4 недели, момент начала этого промежутка t_0=0, m=6 требований.
- По формуле $a = a(t_0, \tau) = M[X(t_0, \tau)] =$
- $= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt$ математическое ожидание $M[X(t_0, \tau)]$:
- $a = a(0{,}4) = M[X(0{,}4)] = \int_0^{0+4} t^{\frac{1}{4}} dt = \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}\Big|_0^4 = \frac{4}{5} \cdot 4^{\frac{5}{4}} =$
- $=4{,}526$
- По формуле Пуассона случайной величины $X(t_0, \tau)$
- $P_6(0; 4) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} = \frac{4{,}526^6}{6!} \cdot e^{-4{,}526} \approx 0{,}134$

- **2.** τ=1 месяц=4 недели, момент начала этого промежутка t_0=4, m=6 требований.
- Находим соответствующее математическое ожидание того, что число событий (требований), наступивших за промежуток декабрь будет =6.
- $a = M[X(4;4)] = \int_4^{4+4} t^{1/4}\,dt = \frac{4}{5} t^{5/4}\Big|_4^8 = \frac{4}{5}\left(8^{5/4} - 4^{5/4}\right) \approx 6{,}238$
- По закону Пуассона

$$P_6(4;4) = \frac{6{,}238^6}{6!} \cdot e^{-6{,}238} \approx 0{,}161$$

- **3.** τ=1 месяц=4 недели, момент начала этого промежутка t_0=8, m=5 требований.
- $a = M[X(8;4)] = \int_8^{8+4} t^{1/4}\,dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_8^{12} = \frac{4}{5}\left(12^{5/4} - 8^{5/4}\right) \approx 7{,}104$
- По формуле $P(\mathrm{X}(t_0, \tau) \geq k) = 1 - e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!}$
- $P(\mathrm{X}(8{,}4) \geq 5) = 1 - e^{-a} \sum_{m=0}^{4} \frac{a^m}{m!} = 1 - e^{-7{,}104} \sum_{m=0}^{4} \frac{7{,}104^m}{m!} \approx 0{,}832$

- **4.** $\tau=2$, $t_0=0$, $m=0$
- $a = M[X(0;2)] = \int_0^2 t^{1/4}\,dt = \frac{4}{5} t^{5/4}\Big|_0^2 =$ $0{,}8 \cdot 2{,}378 \approx 1{,}903$
- По формуле $P(\mathrm{X}(t_0,\tau) = 0) =$
- $= P_0(t_0,\tau) = e^{-a}$
- $P(\mathrm{X}(0;2) = 0) = P_0(0;2) = e^{-a} =$
- $= e^{-1.903} \approx 0{,}154$

- **5.** τ=2, t_0=5, $m \geq 1$
- $a = M[X(5;2)] = \int_5^{5+2} t^{1/4}\,dt = \frac{4}{5} t^{5/4}\Big|_5^7 = 0{,}8(7^{5/4} - 5^{5/4}) \approx 3{,}127$
- По формуле $P(\mathrm{X}(t_0, \tau) \geq 1) = 1 - e^{-a}$
- $P(\mathrm{X}(5;2) \geq 1) = 1 - e^{-3.127} \approx 0.959$

- **6.** τ=3 дня=3/7 недели, t_0=9
- $a = M\left[X\left(9;\frac{3}{7}\right)\right] = \int_{9}^{9+3/7} t^{1/4}\,dt = \frac{4}{5}t^{5/4}\Big|_{9}^{9^{3/7}} = 0{,}8(9{,}409^{5/4} - 9^{5/4}) \approx 0{,}748$
- По формуле $P(T(t_0) \geq \tau) = 1 - \mathrm{F}_{\mathrm{T(t_0)}}(\tau) = = \mathrm{e}^{-\mathrm{a}}$
- $P\left(T(9) \geq \frac{3}{7}\right) = \mathrm{e}^{-0{,}748} \approx 0{,}473$

- **7.** τ=2 дня=2/7 недели, t_0=6
- $a = M\left[X\left(6;\frac{2}{7}\right)\right] = \int_6^{6+2/7} t^{1/4}\,dt =$
  $\frac{4}{5}t^{5/4}\Big|_6^{6^{2/7}} = 0{,}8(6{,}286^{5/4} - 6^{5/4}) \approx 0{,}450$
- По формуле $F_{T(t_0)}(\tau) = F(\tau) =$
- $= P(T(t_0) < \tau) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{a}}$
- $P\left(T(6) < \frac{2}{7}\right) = F_{T(6)}\left(\frac{2}{7}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}45} \approx$
- $\approx 0{,}939.$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!