

ПОТОК
СОБЫТИЙ.





► Рассмотрим нестационарный пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$, зависящий от времени t , некоторый промежуток времени длиной $\tau > 0$, начинающийся с момента t_0 (и заканчивающийся в момент $t_0 + \tau$), и дискретную случайную величину $X(t_0, \tau)$ - число событий, наступивших за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \tau$.

- **Теорема 3** В нестационарном пуассоновском потоке с интенсивностью $\lambda(t)$:
- 1) случайная величина $X(t_0, \tau)$ распределена по закону Пуассона $P_m(\tau) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) в котором параметр a представляет собой математическое ожидание $M[X(t_0, \tau)]$ случайной величины $X(t_0, \tau)$, зависящее уже не только от τ , но и от t_0 и выражающееся формулой $a =$
- $a(t_0, \tau) = M[X(t_0, \tau)] = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt$
- 2) дисперсия случайной величины $X(t_0, \tau)$ – $D[X(t_0, \tau)] = a$
- 3) среднее квадратическое отклонение случайной величины $X(t_0, \tau)$ – $\sigma = [X(t_0, \tau)] = \sqrt{a}$.

- 
- ▶ Следствие. В нестационарном пуассоновском потоке с интенсивностью $\lambda(t)$ вероятность того, что за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \tau$
 - ▶ 1) не наступит ни одного события
 - ▶ $P(X(t_0, \tau) = 0) = P_0(t_0, \tau) = e^{-a}$
 - ▶ 2) наступит менее $k(k=1,2,\dots)$ событий
 - ▶ $P(X(t_0, \tau) < k) = e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!} (k = 1,2, \dots)$
 - ▶ 3) наступит не менее $k(k=1,2,\dots)$ событий
 - ▶ $P(X(t_0, \tau) \geq k) = 1 - e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!} (k = 1,2, \dots)$

- 
- ▶ 4) наступит хотя бы одно событие
 $P(X(t_0, \tau) \geq 1) = 1 - e^{-a}$, где
математическое ожидание a в
формулах

$$P(X(t_0, \tau) = 0) = P_0(t_0, \tau) = e^{-a}$$

$$\text{▶ } P(X(t_0, \tau) < k) = e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\text{▶ } P(X(t_0, \tau) \geq k) = 1 - e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\text{▶ } P(X(t_0, \tau) \geq 1) = 1 - e^{-a}$$

$$\text{▶ } \text{определяется формулой } a = a(t_0, \tau) =$$

$$\text{▶ } = M[X(t_0, \tau)] = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt.$$

▶ Опр. Элементом вероятности появления события в нестационарном пуассоновском потоке называется вероятность $P_1(t_0, \Delta t)$ появления события за элементарный (достаточно малый) промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$.

- ▶ Разница в определениях элементов вероятности появления события в простейшем и в нестационарном пуассоновском потоках состоит в том, что элемент вероятности появления события в нестационарном пуассоновском потоке зависит не только от длины промежутка Δt , как в случае простейшего потока, но и от его начала t_0 .

► Утверждение. Для элемента вероятности появления события за элементарный промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ в нестационарном пуассоновском потоке с интенсивностью $\lambda(t)$ имеет место приближенная формула $P_1(t_0, \Delta t) \approx \lambda(t_0) \cdot \Delta t, (\Delta t \rightarrow 0)$.

Характеристики потока сгущения в области течения

(t_0, τ)

№	Характеристики	Обозначения и формулы
1	Интенсивность нестационарного пуассоновского потока	
2		
3		
4		
5		

6		
7		
8		
9	Дисперсия случайной величины	
10	Среднее квадратическое отклонение случайной величины	

► Рассмотрим случайную величину $T(t_0)$ - промежуток времени между двумя соседними событиями, первое из которых наступило в момент времени t_0 . Это непрерывная случайная величина будет распределена уже не по показательному закону; вид её закона распределения будет зависеть от t_0 и от вида функции $\lambda(t)$. Формулы характеристик случайной величины $T(t_0)$, полученные на основе их стандартных определений, соберём в таблице.

№	Характеристики	Обозначения и формулы
1.	Интенсивность нестационарного пуассоновского потока	
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		

➔ Задача.

- ▶ Проанализировать поток поступлений в страховую компанию, рассмотренную в предыдущей задаче, требований по выплатам в соответствии со страховыми полюсами за период с начало ноября по конец января. Изучение этого потока в рассмотренный период в прошлые годы показало, что число требований по выплатам, поступающих в компанию за промежуток времени τ , зависит не только от его продолжительности, но и от его начала. Объясняется это тем, что в рассматриваемый период происходит ухудшение погоды (выпадают осадки, снег, образуется гололедица), рано темнеет, в связи с чем ухудшается обстановка на дорогах, что в свою очередь ведёт к росту числа дорожно-транспортных происшествий.

▶ Независимость поступлений требований по выплатам в любые непересекающиеся интервалы времени и поступление требований по одному в малые промежутки времени сохраняются и в данной ситуации.

Ожидаемое число требований поступающих в компанию за неделю, зависит от времени следующим образом: $\lambda(t) = t^{1/4}$.

- 
- ▶ С какой вероятностью:
 1. За ноябрь месяц поступит в компанию 6 требований?
 2. За декабрь месяц поступит в компанию 6 требований?
 3. За январь месяц поступит не менее пяти требований?
 4. За первые две недели ноября не поступит ни одного требования?
 5. За вторую и третью недели декабря поступит хотя бы одно требование?
 6. Интервал времени между двумя соседними поступлениями требований будет не менее трёх дней, если первое из них поступило в первый день второй недели января?
 7. Интервал времени между двумя соседними поступлениями требований будет меньше двух дней, если первое из них поступило в начале третьей недели декабря?

- ▶ Пусть Π - поток требований по выплатам, поступающих в страховую компанию. Поток Π без последствий и ординарен, т.е является пуассоновским. Но в отличие от потока в предыдущей задаче данный поток уже не будет стационарным и, следовательно, не будет простейшим.

▶ За единицу времени примем одну неделю. Пусть $X(t_0, \tau)$ - случайное число поступивших в компанию требований за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \tau$, а $T(t_0)$ - случайный интервал времени между двумя соседними требованиями, первое из которых поступило в момент времени t_0 .

Решение



Месяцы, разбитые на недели, в которые анализируется поток поступлений в страховую компанию требований по выплатам.

▶ 1. $\tau=1$ месяц=4 недели, момент начала этого промежутка $t_0=0$, $m=6$ требований.

▶ По формуле $a = a(t_0, \tau) = M[X(t_0, \tau)] =$

▶ $= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt$ математическое ожидание $M[X(t_0, \tau)]$:

▶ $a = a(0,4) = M[X(0,4)] = \int_0^{0+4} t^{\frac{1}{4}} dt = \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} \Big|_0^4 = \frac{4}{5} \cdot 4^{\frac{5}{4}} =$

▶ $=4,526$

▶ По формуле Пуассона случайной величины $X(t_0, \tau)$

▶ $P_6(0; 4) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} = \frac{4,526^6}{6!} \cdot e^{-4,526} \approx 0,134$

► **2.** $\tau=1$ месяц=4 недели, момент начала этого промежутка $t_0=4$, $m=6$ требований.

► Находим соответствующее математическое ожидание того, что число событий (требований), наступивших за промежуток декабрь будет =6.

$$\begin{aligned} \text{► } a &= M[X(4; 4)] = \int_4^{4+4} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_4^8 = \\ & \frac{4}{5} (8^{5/4} - 4^{5/4}) \approx 6,238 \end{aligned}$$

► По закону Пуассона

$$P_6(4; 4) = \frac{6,238^6}{6!} \cdot e^{-6,238} \approx 0,161$$

▶ **3.** $\tau=1$ месяц=4 недели, момент начала этого промежутка $t_0=8$, $m=5$ требований.

$$\begin{aligned} \text{▶ } a = M[X(8; 4)] &= \int_8^{8+4} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_8^{12} = \\ &= \frac{4}{5} (12^{5/4} - 8^{5/4}) \approx 7,104 \end{aligned}$$

▶ По формуле $P(X(t_0, \tau) \geq k) = 1 - e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!}$

$$\begin{aligned} \text{▶ } P(X(8,4) \geq 5) &= 1 - e^{-a} \sum_{m=0}^4 \frac{a^m}{m!} = 1 - \\ &= e^{-7,104} \sum_{m=0}^4 \frac{7,104^m}{m!} \approx 0,832 \end{aligned}$$

▶ 4. $\tau=2, t_0=0, m=0$

$$\begin{aligned} \text{▶ } a &= M[X(0; 2)] = \int_0^2 t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_0^2 = \\ &0,8 \cdot 2,378 \approx 1,903 \end{aligned}$$

▶ По формуле $P(X(t_0, \tau) = 0) =$

$$\text{▶ } = P_0(t_0, \tau) = e^{-a}$$

$$\text{▶ } P(X(0; 2) = 0) = P_0(0; 2) = e^{-a} =$$

$$\text{▶ } = e^{-1.903} \approx 0,154$$

▶ **5.** $\tau=2, t_0=5, m \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{▶ } a = M[X(5; 2)] &= \int_5^{5+2} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_5^7 = \\ &0,8(7^{5/4} - 5^{5/4}) \approx 3,127 \end{aligned}$$

▶ По формуле $P(X(t_0, \tau) \geq 1) = 1 - e^{-a}$

$$\text{▶ } P(X(5; 2) \geq 1) = 1 - e^{-3.127} \approx 0.959$$

▶ 6. $\tau=3$ дня= $3/7$ недели, $t_0=9$

$$\begin{aligned} \text{▶ } a &= M \left[X \left(9; \frac{3}{7} \right) \right] = \int_9^{9+3/7} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_9^{9+3/7} = \\ &0,8(9,409^{5/4} - 9^{5/4}) \approx 0,748 \end{aligned}$$

▶ По формуле $P(T(t_0) \geq \tau) = 1 - F_{T(t_0)}(\tau) = e^{-a}$

$$\text{▶ } P \left(T(9) \geq \frac{3}{7} \right) = e^{-0,748} \approx 0,473$$

▶ 7. $\tau=2$ дня= $2/7$ недели, $t_0=6$

$$\begin{aligned} \text{▶ } a &= M \left[X \left(6; \frac{2}{7} \right) \right] = \int_6^{6+2/7} t^{1/4} dt = \\ & \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_6^{6+2/7} = 0,8(6,286^{5/4} - 6^{5/4}) \approx 0,450 \end{aligned}$$

▶ По формуле $F_{T(t_0)}(\tau) = F(\tau) =$

$$\text{▶ } = P(T(t_0) < \tau) = 1 - e^{-a}$$

$$\text{▶ } P \left(T(6) < \frac{2}{7} \right) = F_{T(6)} \left(\frac{2}{7} \right) = 1 - e^{-0,45} \approx$$

$$\text{▶ } \approx 0,939.$$

СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!

