

Показательные неравенства



Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых

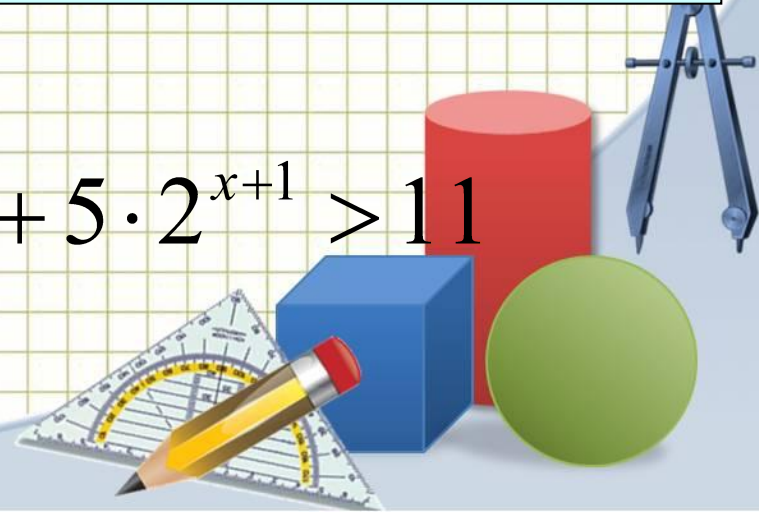
неизвестное содержится в показателе

степени.

Примеры:

$$3^x \leq 9;$$

$$2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$$



Простейшие показательные
неравенства – это неравенства вида:

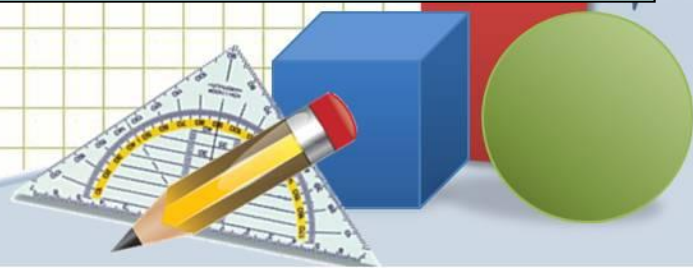
$$a^x > a^b$$

$$a^x \geq a^b$$

$$a^x < a^b$$

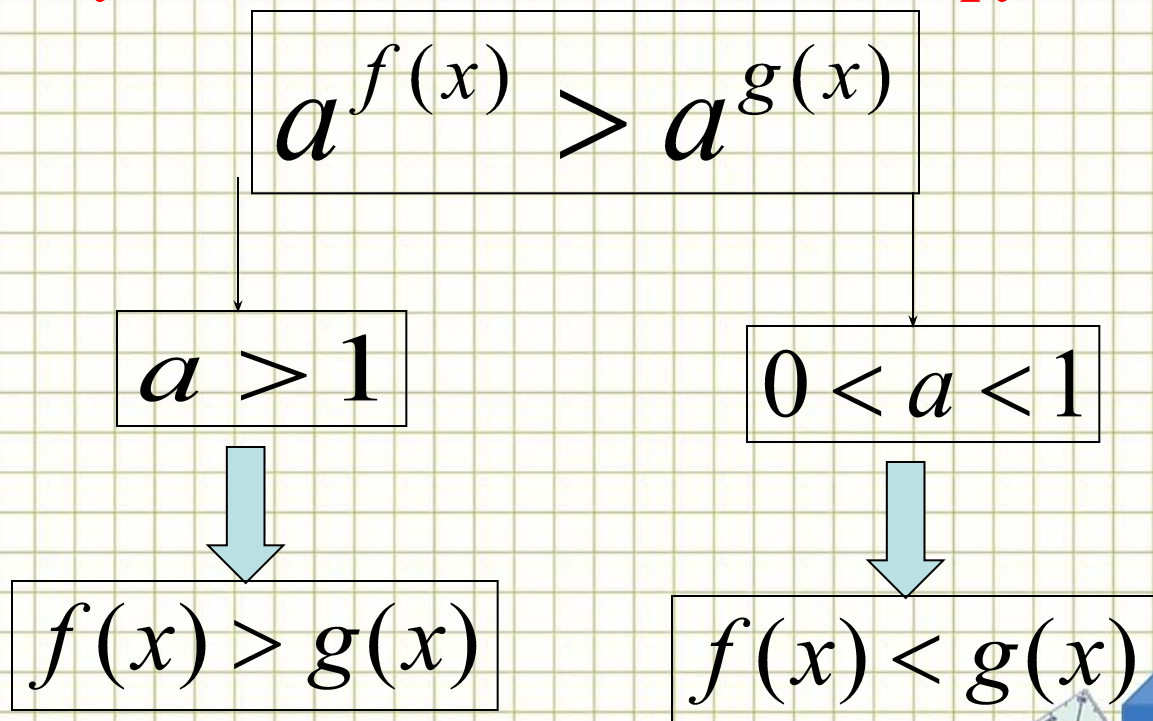
$$a^x \leq a^b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b – любое число.



Решение простейших показательных неравенств $a > 0, a \neq 1$

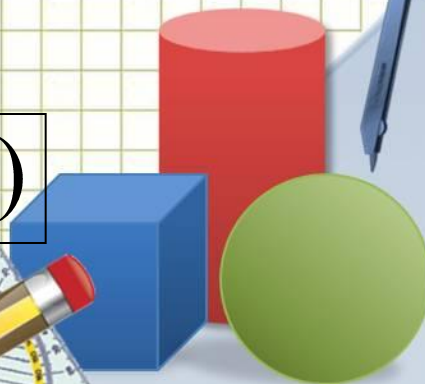
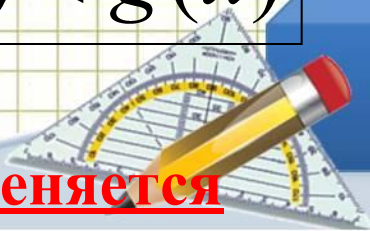
При решении простейших неравенств используют свойства возрастания или убывания показательной функции.



Знак неравенства

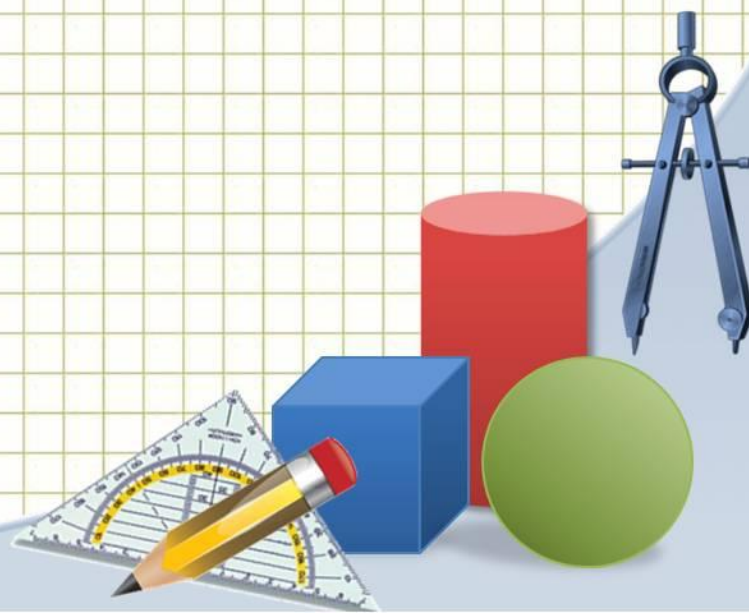
Сохраняется

Меняется



Решения показательных неравенств:

1. Способ уравнивания показателей.
2. Разложения на множители.
3. Введения новой переменной.

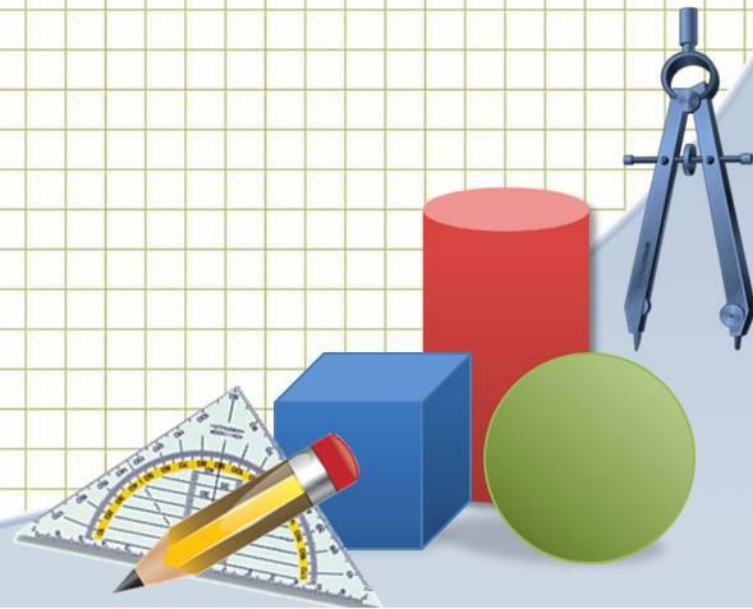


Решите неравенство:

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4 \quad \text{т.к. } 3 > 1, \text{ функция } \uparrow$$

$$x > 4$$



Решите неравенство:

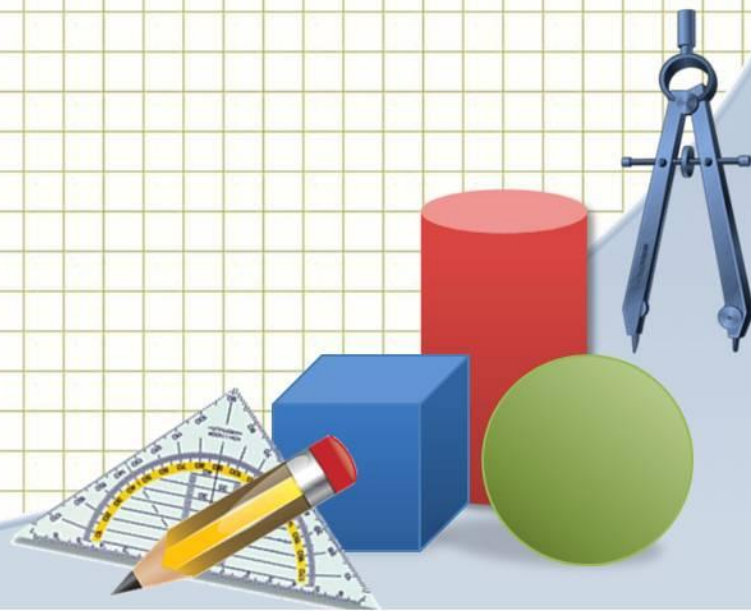
$$2^{-3x} \geq \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)$$

т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция \downarrow

$$3x \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{3}$$



Способ 2. Разложение на множители

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10$$

$$\frac{3^x}{3^3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10$$

$$3^x \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{3} \right) > 10$$

$$3^x \cdot \frac{10}{27} > 10 \quad | \quad : \frac{10}{27}$$

$$3^x > 27$$

$$3^x > 3^3$$

$3 > 1$, ф-ция \uparrow

$$x > 3$$

Ответ: $x > 3$

Способ 3. Введение новой переменной

$$9^x - 10 \cdot 3^x < -9$$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$$

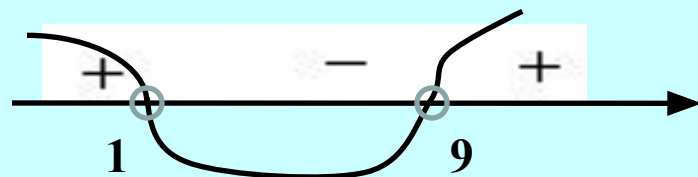
$$3^x = t \quad (t > 0)$$

$$t^2 - 10t + 9 < 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



$$1 < t < 9$$

$$1 < 3^x < 9$$

$$3^x < 3^2; \quad 3^x > 3^0;$$

3 > 1, то ф-ция ↑

$$x < 2$$

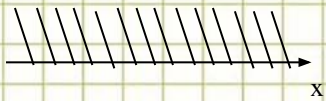
$$x > 0.$$

Ответ: $0 < x < 2$.

Решите неравенства

$$8^x > -3$$

$$x \in D(f)$$



$$\text{Ответ: } x \in D(f)$$

$$8^x < -3$$

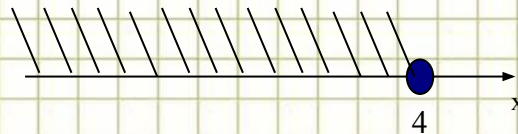
$$x \in \{\emptyset\}$$

Ответ: \emptyset

$$3^x \leq 81$$

$$3^x \leq 3^4 \quad 3 > 1 \text{ ф-ия } \uparrow$$

$$x \leq 4$$



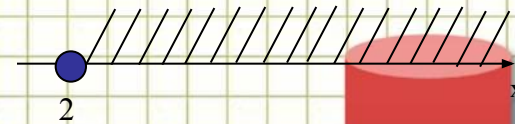
$$x \in (-\infty; 4]$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{4}{9}$$

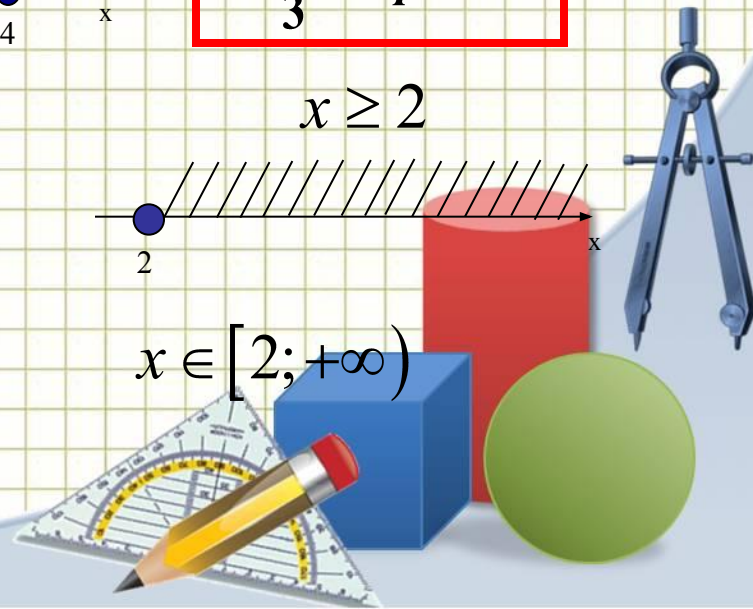
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$0 < \frac{2}{3} < 1 \text{ ф-ия } \downarrow$$

$$x \geq 2$$



$$x \in [2; +\infty)$$



Решите неравенство

$$25^{-x+3} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$$

$$(5^2)^{-x+3} \geq (5^{-1})^{3x-1}$$

$$5^{-2x+6} \geq 5^{-3x+1}$$

$$-2x+6 \geq -3x+1$$

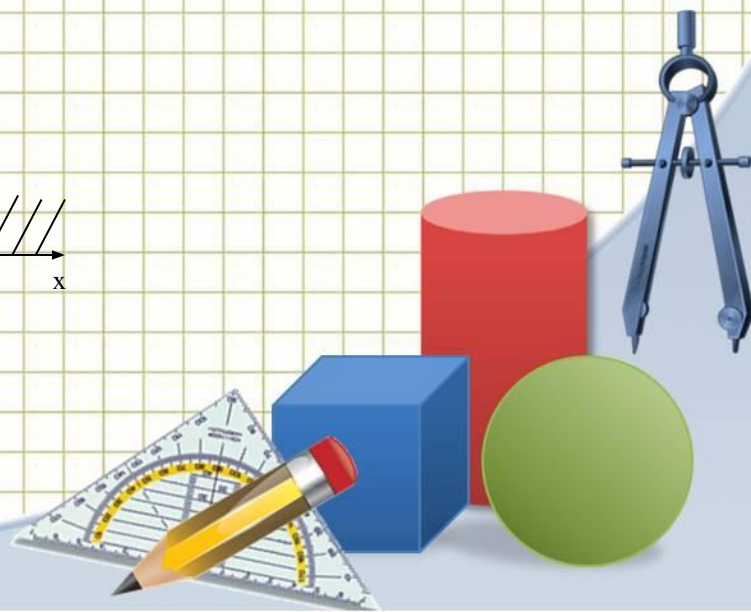
$$-2x+3x \geq 1-6$$

$$x \geq -5$$



$$x \in [-5; +\infty)$$

5 > 1 ф-ия ↑



Решите неравенство

$$7^{x^2-5x} < \left(\frac{1}{7}\right)^6$$

$$7^{x^2-5x} < 7^{-6}$$

$$x^2 - 5x < -6$$

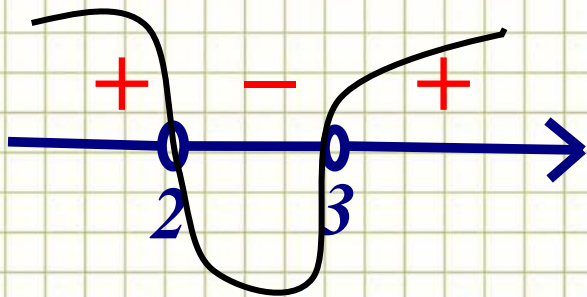
7 > 1 ф-ия ↑

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

$$2 < x < 3$$

$$x \in (2; 3)$$



Ответ: $(2; 3)$



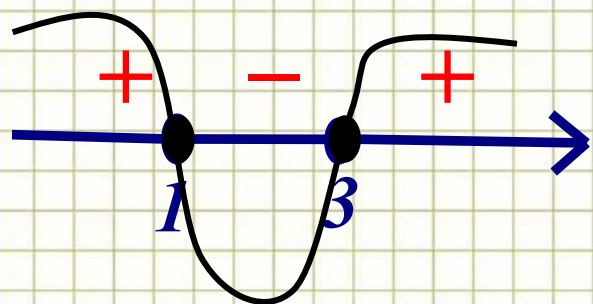
Решите неравенство

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0$$

$$3^x = y$$

$$y^2 - 4y + 3 \leq 0$$

$$y = 3; 1$$



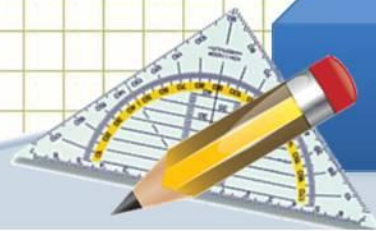
$$1 \leq y \leq 3$$

$$1 \leq 3^x \leq 3$$

$$3^0 \leq 3^x \leq 3$$

$3 > 1$ ф-ция \uparrow

$$0 \leq x \leq 1$$



Выполнить самостоятельно!

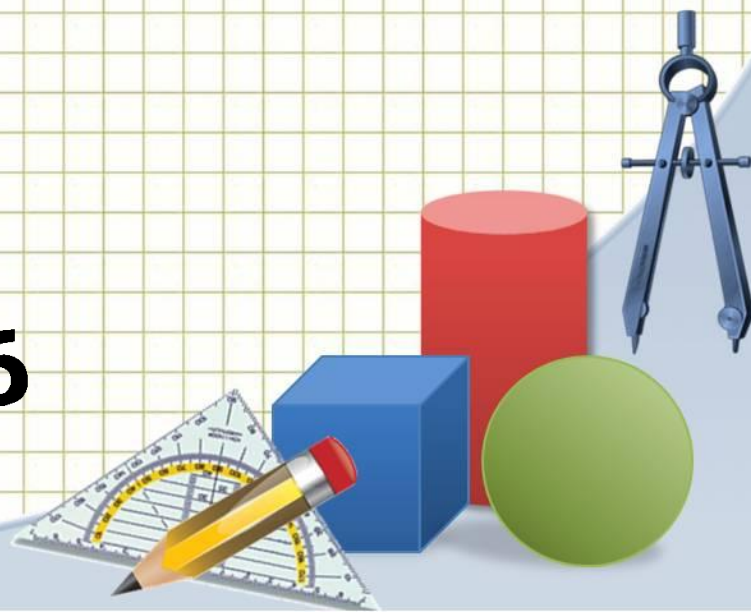
$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 27$$

$$6^{x^2+2x} > 216$$

$$0,2^x \leq \frac{1}{25}$$

$$4^{5-2x} \leq 0,25$$

$$0,4^{2x+1} > 0,16$$



Спасибо за урок!

