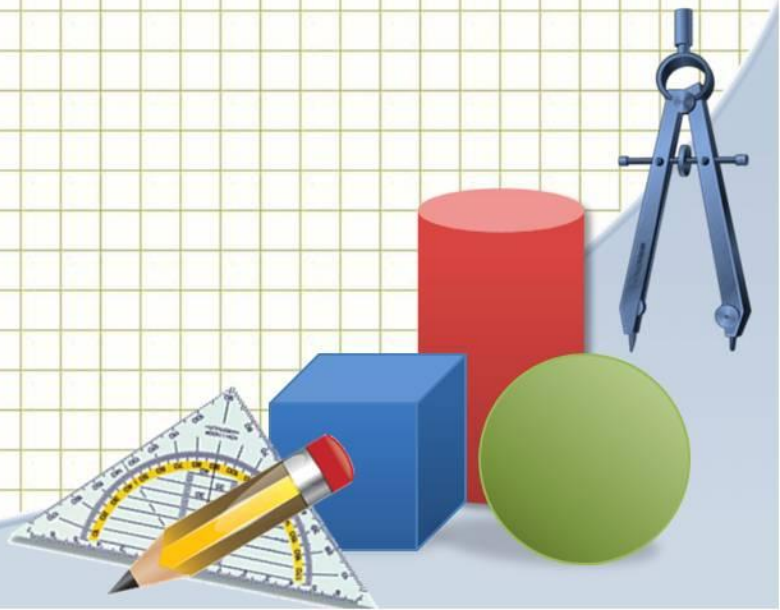
Показательные неравенства



Горбачева И.С.– преподаватель математики

Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Примеры: $3^x \le 9;$ $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

Простейшие показательные неравенства – это неравенства вида:

$a^x > a^b$	$a^x \geq a^b$
$a^x < a^b$	$a^x \leq a^b$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b – *любое число*.

Решение простейших показательных неравенств $a > 0,\ a \neq 1$

При решении простейших неравенств используют свойства возрастания или убывания показательной функции.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$$a > 1 \qquad\qquad 0 < a < 1$$

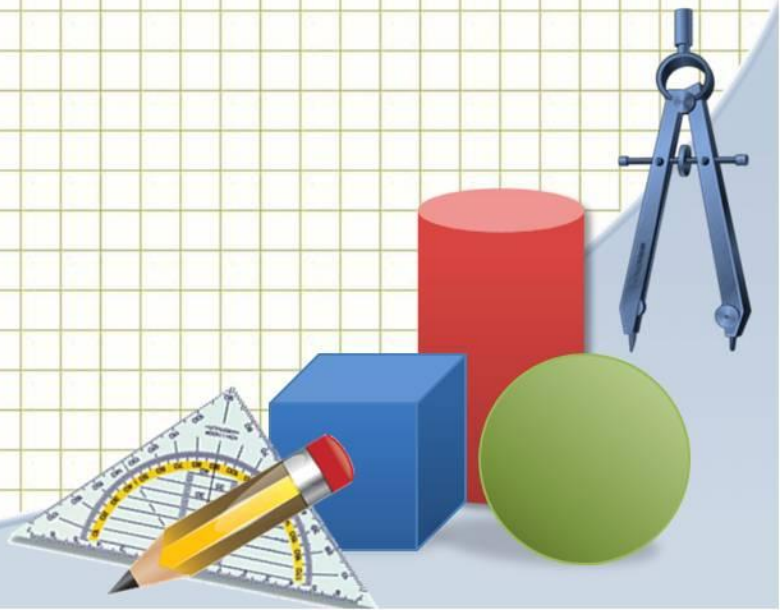
$$f(x) > g(x) \qquad\qquad f(x) < g(x)$$

Знак неравенства

Сохраняется **Меняется**

Решения показательных неравенств:

1. Способ уравнивания показателей.
2. Разложения на множители.
3. Введения новой переменной.

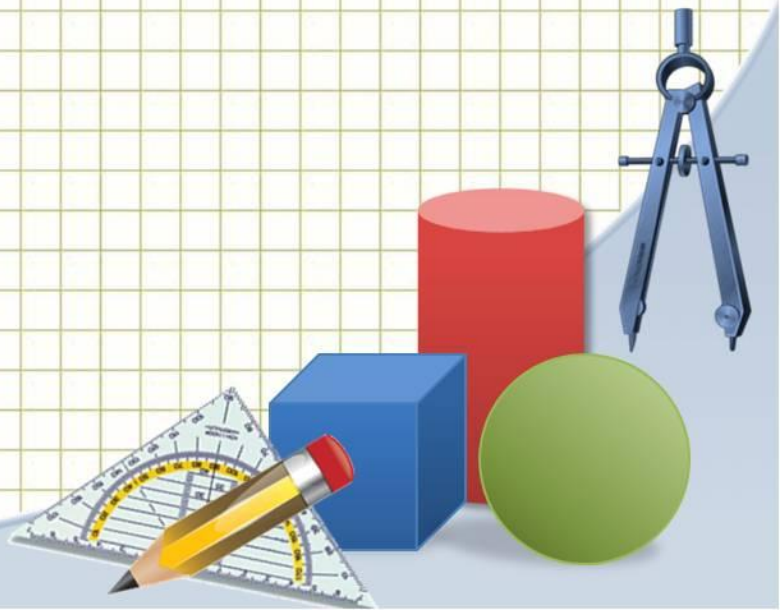


Решите неравенство:

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4$$ *т.к.* $3 > 1$, *функция* $\uparrow$

$$x > 4$$



Решите неравенство:

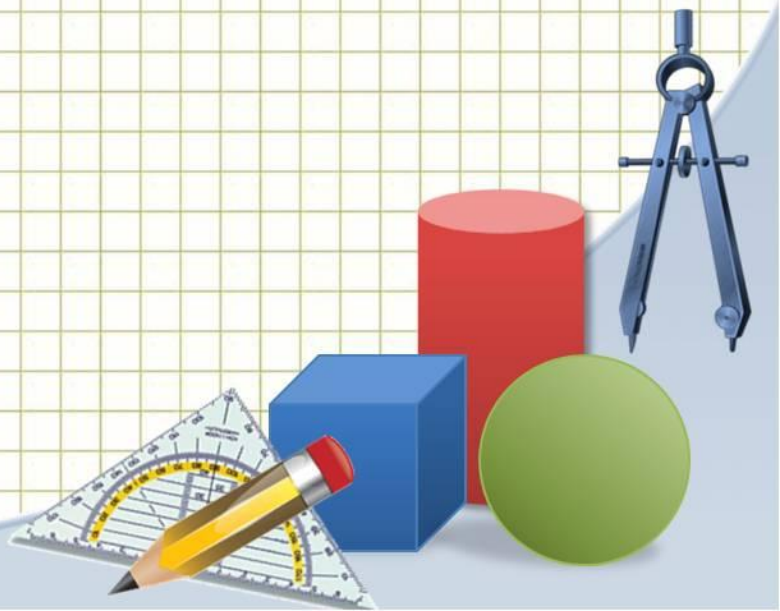
$$2^{-3x} \geq \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)$$

т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, *то функция* $\downarrow$

$$3x \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{3}$$



Способ 2. Разложение на множители

$$3^{x-3}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x}>10$$

$$\frac{3^{x}}{3^{3}}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x}>10$$

$$3^{x}\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{3}\right)>10$$

$$3^{x}\cdot\frac{10}{27}>10 \quad \Big| : \frac{10}{27}$$

$$3^{x}>27$$

$$3^{x}>3^{3}$$

3 > 1, ф-ция ↑

$$x>3$$

Ответ: $x>3$

Способ 3. Введение новой переменной

$$9^x - 10 \cdot 3^x < -9$$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$$

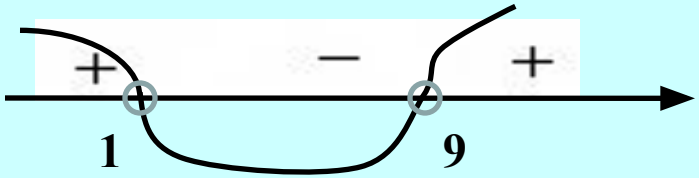
$$3^x = t \quad (t > 0)$$

$$t^2 - 10t + 9 < 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



$$1 < t < 9$$

$$1 < 3^x < 9$$

$$3^x < 3^2; \qquad 3^x > 3^0;$$

3>1, то ф- ция ↑

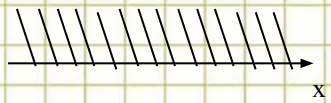
$$x < 2 \qquad x > 0.$$

Ответ: **0 < *x* < 2**.

Решите неравенства

$8^x > -3$

x € D (f)



Ответ: x € D (f)

$8^x < -3$

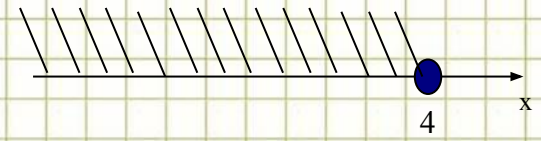
$x \in \{\varnothing\}$

Ответ: $\varnothing$

$3^x \le 81$

$3^x \le 3^4$ **3 > 1 ф-ия ↑**

$x \le 4$



$x \in (-\infty; 4]$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x \le \frac{4}{9}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x \le \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\boxed{0 < \frac{2}{3} < 1 \; ф-ия \downarrow}$

$x \ge 2$

$x \in [2; +\infty)$

Решите неравенство

$$25^{-x+3} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$$

$$\left(5^2\right)^{-x+3} \geq \left(5^{-1}\right)^{3x-1}$$

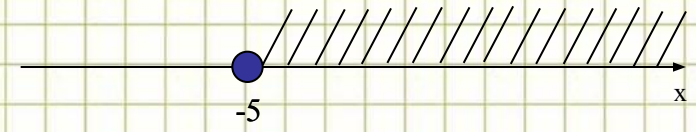
$$5^{-2x+6} \geq 5^{-3x+1}$$

5 >1 ф-ия ↑

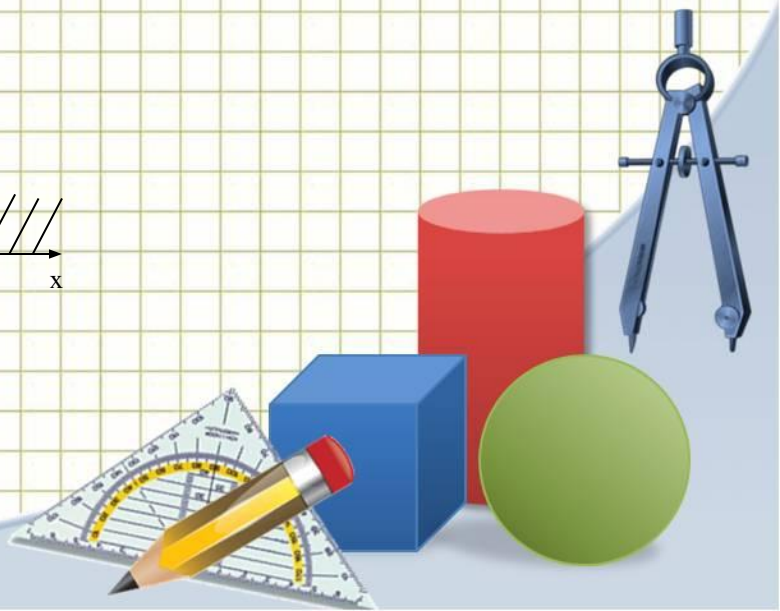
$$-2x+6 \geq -3x+1$$

$$-2x+3x \geq 1-6$$

$$x \geq -5$$



$$x \in [-5;+\infty)$$



Решите неравенство

$$7^{x^2-5x} < \left(\frac{1}{7}\right)^6$$

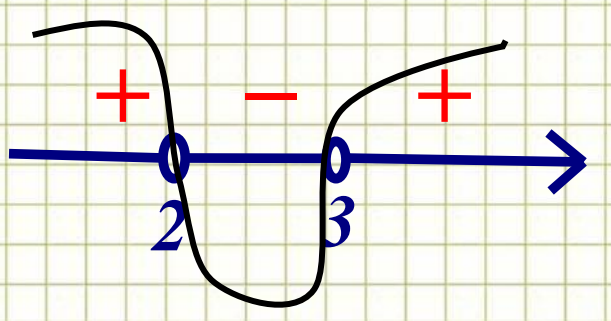
$$7^{x^2-5x} < 7^{-6}$$

7>1 ф-ия ↑

$$x^2 - 5x < -6$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

$\mathbf{x_1 = 2 \quad x_2 = 3}$



$$2 < x < 3$$

$$x \in (2;3)$$

Ответ: $(2;3)$

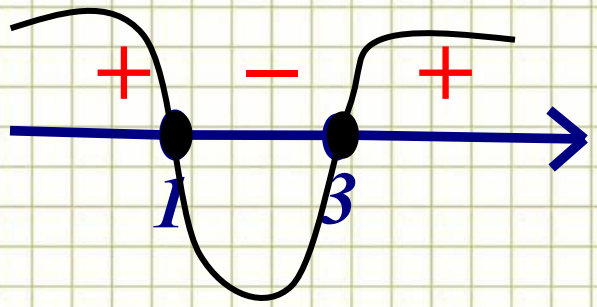
Решите неравенство

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^{x} + 3 \leq 0$$

$$3^{x} = y$$

$$y^2 - 4y + 3 \leq 0$$

$$y = 3;\ 1$$



$$1 \leq y \leq 3$$

$$1 \leq 3^{x} \leq 3$$

$$3^{0} \leq 3^{x} \leq 3$$

3 > 1 ф-ция ↑

$$0 \leq x \leq 1$$

Резерв

Выполнить самостоятельно!

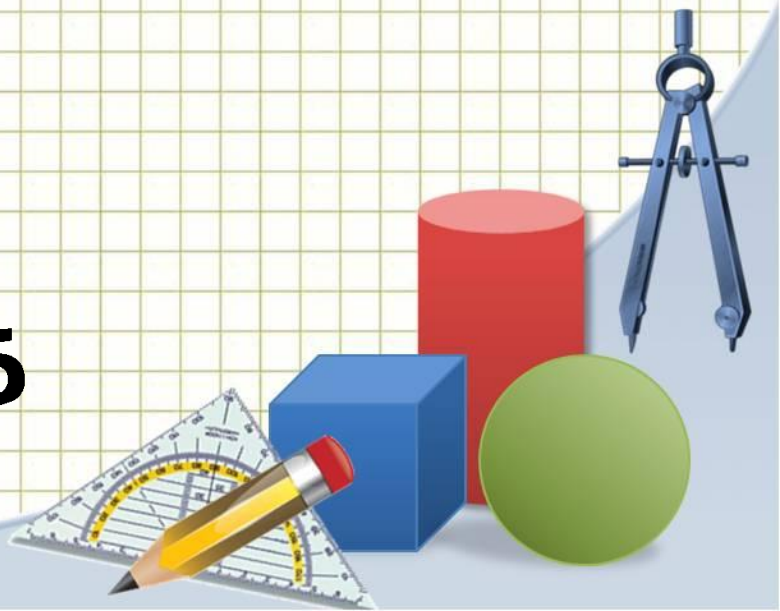
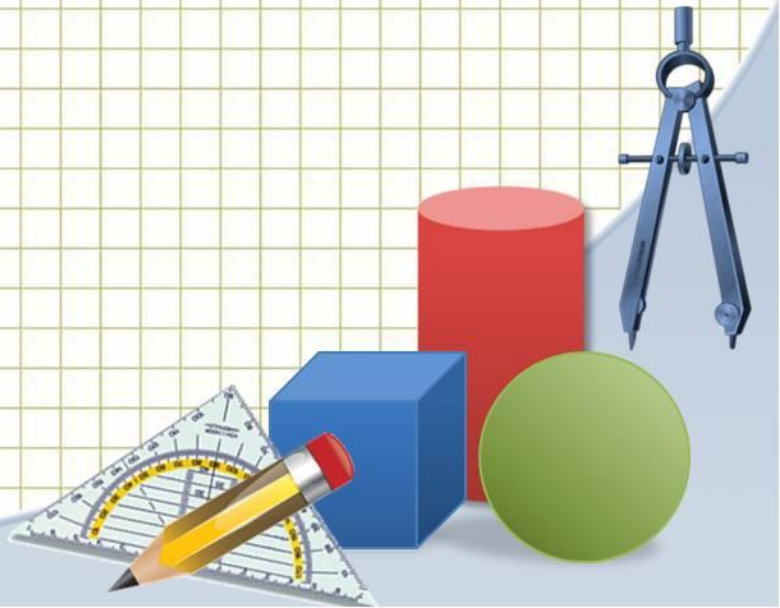
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \geq 27$$

$$6^{x^2+2x} > 216$$

$$0{,}2^{x} \leq \frac{1}{25}$$

$$4^{5-2x} \leq 0{,}25$$

$$0{,}4^{2x+1} > 0{,}16$$



Спасибо за урок!