1 Числовая последовательность. Предел последовательности: сходящиеся и расходящиеся последовательности. Теорема о единственности предела сходящийся последовательности(с доказательством).

Последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел.

Число A называется ***пределом числовой последовательности*** {an}, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа ε > 0, найдется такое число N (зависящее от ε), что для всех членов последовательности с номерами n > N верно неравенство: |an - A|< E.

Последовательность, которая имеет предел, называется сходящейся, в обратном случае последовательность расходится.

Теорема ***о единственности предела сходящийся последовательности***: Последовательность не может иметь больше одного предела. Доказательство. Это следует из того, что последовательность не может одновременно приближаться к двум разным числам одновременно.

Формально, выберем ε значительно меньше разницы между числами A и B.

Тогда очевидно, что мы не сможем указать такого номера N, начиная с которого одновременно будут выполнены два условия: |an - A|< E и |an - B|< E

Этими рассуждениями теорема доказана.

2 Ограниченная числовая последовательность. Теорема об ограниченности сходящийся числовой последовательности. Признак Вейерштрасса сходимости монотонной последовательности (формулировка).

Последоват ельност ь ограничена, если найдется такое положительное число, для которого все члены последовательности по модулю окажутся не больше этого числа. {an}- ограничена, если существует M>0: |an|<= M любой n принадл. N

Теорема 8. Сходящаяся числовая последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся к числу a, тогда $x_n = a+\lambda_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$. Так как бесконечно малая последовательность ограничена, то $ такое число $M>0$, что для всех $n=1,2,\ldots$ выполняется $|\lambda_n|\le M$. Поэтому $|x_n| = |a+\lambda_n| \le |a|+|\lambda_n| \le |a|+M$ для всех $n=1,2,\ldots$, а это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Теорема Вейерштрасса. (Основная теорема теории последовательностей). Если последовательность {an} является нестрого возрастающей (нестрого убывающей) и {an} ограничена сверху (снизу), то {an} является сходящейся. Данную теорему можно сформулировать немного иначе - Любая монотонная и ограниченная последовательность {an} имеет предел.

3 Определения по Коши конечного и бесконечного предела функции в точке и на бесконечности. Односторонние пределы функции. Определение предела функции по Гейне. Теорема о связи двустороннего предела функции в точке с односторонними пределами (с доказательством).

Предел функции в бесконечности: Число A называется пределом функции y=f(x) при x стремящемся к бесконечности, если для любого, даже сколь угодно малого положительного ε, найдется такое число M(зависящее от ε), что для всех x таких, что |x|>M, выполнено неравенство: |f(x) - A|< ε.

$A = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists M\colon \forall |x| > M\ |f(x) - A| < \varepsilon$

Предел функции в точке: Число A называется пределом функции y = f(x) при x → a, если для любого, даже сколь угодно малого положительного для любого, даже сколь угодно малого ε > 0, найдется такое число δ > 0 (зависящее от ε), что для всех x из δ-окрестности точки a, выполнено неравенство: |f(x) - A|< ε.

$$A = \lim_{x\to a} f(x),$$

$$\text{если } \forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0 \colon 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

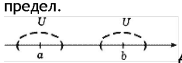
Односторонние пределы: Пределом функции f(x) в точке x=a слева называется предел, вычисляемый в предположении, что x → a, оставаясь все время меньше значения a. Аналогично, пределом справа называется предел функции f(x) при x → a, при том, что x > a. Односторонние пределы обозначаются так:

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ Односторонним пределом функции называется предел справа или предел слева.

По Гейне: Число b называется пределом функции f(x) в точке a, если для любой последовательности {xₙ} прин D(f), которая сходится к , соответствующая последовательность значений функции {f(xₙ)} сходится к b.

4 Теорема о единственности предела функции(с доказательством).

Теорема: Последовательность точек расширенной числовой прямой R может иметь на этой прямой только один предел.



Допустим противное. Пусть существует такая последовательность x_n прин. R , n = 1, 2, ..., что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ = a и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ = b, причем a не равно b, a прин. R , b прин. R . Возьмем какие-либо непересекающиеся окрестности U = U(a) и V = V(b) точек a и b : U ⋂ V = ∅. Согласно определению предела вне окрестности U точки a, в частности в окрестности Vточки b, содержится лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Однако точка b также является ее пределом, и потому в ее окрестности V должны находиться все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, а следовательно, бесконечно много ее членов. Получилось противоречие.

5 Ограниченные и локально ограниченные функции. Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел(с доказательством).

Локально ограниченная -- это значит ограниченная на каком-то множестве аргументов, то есть можно указать такие значения a и b, что a <= f(x) <= b для любого x из этого множества.

Теорема *(локальная ограниченност ь функции, имеющий предел).* Если предел f(x) при x → x0 равняется *A*, то найдется окрестность x0 , во всех точках которых функция f(x) ограниченна. Положим ε = 1. Из условия теоремы следует существование окрестности: $\dot{O}_\delta(x_0)$. Следовательно: $|f(x)-A|<1$ $|f(x)|-|A| \le |f(x)-A| < 1$

Отсюда для указанных *x* $|f(x)| \le 1+|A| = M$ $(\forall M > 0)$ что и означает ограниченность f(x) в $\dot{O}_\delta(x_0)$.

6 Бесконечно малые функции. Теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой (с доказательством).

Функция y=f(x) называется ***бесконечно малой*** при x → x0 если , $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x) = 0$ По определению предела функции это равенство означает, что для любого числа ε > 0 найдется число б = б(ε) > 0 , такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству 0 <|x-x0|<б, выполняется неравенство |f(x)| < ε.

Запишем это определение, используя логическую символику:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow ((\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x\colon 0 < |x-x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

Теорема: Для того, чтобы функция $f(x)$, определённая в $\overset{0}{\mathrm{U}}(a)$ имела конечный предел при x → a, необходимо и достаточно чтобы эту функцию можно было представить в виде суммы предела и б.м.ф. при x → a ($\Leftrightarrow f(x) = b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - б.м.ф. при x → a).

Доказат ельст во: I Необходимость:

Дано: $\exists\lim\limits_{x\circledR a} f(x) = b$ Доказать: $f(x) = b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - б.м.ф. при x → a.

$\forall E > 0 \exists\delta(E) > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < E$ Пусть $\alpha(x) = f(x)-b \Rightarrow$ по определению б.м.ф $\forall E > 0 \exists\delta(E) > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < E \Rightarrow \alpha(x)$ - б.м.ф. при x → a.

$f(x) = b+\alpha(x) : \forall x : 0 < |x-a| < \delta$ ***II Дост ат очност ь:*** Дано: $f(x) = b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - б.м.ф. при x → a. Доказать: $\exists\lim\limits_{x\circledR a} f(x) = b$

$\forall E > 0 \exists\delta(E) > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| = |f(x)-b| < E \Rightarrow \exists\lim\limits_{x\circledR a} f(x) = b$

7 Теорема о сумме конечного числа бесконечно малых функций (с доказательством). Теорема о произведении бесконечно малой на ограниченную (с доказательством).

Теорема (сумма бесконечно малых величин). Если функции a(x) и δ(x) являются бесконечно малыми, то их сумма a(x) + δ(x) -бесконечно малая. **Доказательство.** Пусть ε - произвольное положительное число. Так как функции a(x) и δ(x) бесконечно малые, то найдутся такие числа δ1 и δ2, что при 0 < |x-a|< δ1 и 0 < |x-a|< δ2 имеют место неравенства: $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Обозначим через δ наименьшее из двух чисел δ1 и δ2. Тогда при 0 < |x-a|< δ будет выполнено: $|\alpha(x)+\beta(x)| \le |\alpha(x)|+|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ Этим доказано, что для любого ε > 0 существует такое число δ > 0, что при 0 < |x-a| < δ выполнено неравенство: |a(x) + δ(x)| < ε, сумма бесконечно малых есть бесконечно малая. Следствием теоремы является ее распространение на случай алгебраической суммы любого конечного числа бесконечно малых.

Теорема (произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину). Произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину есть бесконечно малая величина. ***Доказат ельст во.*** Пусть f(x) – ограниченная при x → a функция, a *a(x)* бесконечно малая. Тогда существует такое число M > 0, что $|f(x)| \le M$ для всех x, достаточно близких к a. Для ε > 0 существует δ > 0, что при условии 0 < |x-a| < δ одновременно выполняются неравенства: $|f(x)| \le M$ $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ Составим произведение: $|f(x)\cdot\alpha(x)| = |f(x)|\cdot|\alpha(x)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ Этим доказано, что произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть бесконечно малая.

8 Бесконечно большие функции. Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функции (с доказательством).

Функция y = f(x) называется бесконечно большой величиной при x → a (или при x → ∞), если для любого, даже сколь угодно большого числа M > 0 найдется δ (зависящее от M), что для всех x таких, что 0 < | x – a |< δ, выполнено неравенство: | f (x)| > M. Бесконечно большая величина больше любого наперед взятого большого числа. Бесконечно большой величиной называется переменная величина, абсолютное значение которой неограниченно возрастает.

Теорема (связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами).
(1) Если α (x) – бесконечно малая, то 1/ α (x) бесконечно большая.
(2) Если β (x) – бесконечно большая, то 1/ β (x) бесконечно малая.

Доказат ельст во. (1) Выберем M > 0 и обозначим 1/ M = ε. Так как α (x) бесконечно малая, то числу ε > 0 соответствует δ > 0 такое, что при 0 < |x-a| < δ выполняется неравенство: $|\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{1}{M}$ Следовательно, $\frac{1}{|\alpha(x)|} > M$ Эта величина является бесконечно большой. (2) Выберем ε > 0 и обозначим 1/ε = M. Так как β(x) бесконечно большая, то числу M соответствует δ > 0, такое, что при 0 < |x-a| < δ выполняется неравенство: $|\beta(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}$ Следовательно, $\frac{1}{|\beta(x)|} < \varepsilon$ Эта величина является бесконечно большой.

9 Теорема о пределе суммы, произведения и частного функции (доказательство для функции и последовательности).

1)Предел суммы двух функций равен сумме их пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$

Доказат ельст во: Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = B$. Тогда по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции можно записать: $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Следовательно, $f(x)+\varphi(x) = A + B + (\alpha(x)+\beta(x))$, где $(\alpha(x)+\beta(x))$ - бесконечно малая функция (по свойству бесконечно малых функций). Тогда по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции можно записать $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x)) = A + B$, или $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

2)Предел произведения двух функций равен произведению их пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = B$. Тогда $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Следовательно $f(x)\cdot\varphi(x) = (A+\alpha(x)\cdot(B+\beta(x))$, $f(x)\cdot\varphi(x) = AB + (A\cdot\beta(x) + B\cdot\alpha(x) + \beta(x)\cdot\alpha(x))$.
Выражения в скобках, по свойствам бесконечно малых функций, - бесконечно малая функция. Тогда $\lim f(x)\cdot\varphi(x) = AB$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

3)Предел част ного двух функций равен пределу делимого*, деленного на предел делит еля, если предел делит еля не равен:* $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{\varphi(x)}) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$ $(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0)$. ***Доказат ельст во:*** *Пуст ь* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = B \neq 0$.
Тогда $f(x) = A + \alpha(x)$ *и* $\varphi(x) = B + \beta(x)$. *Тогда* $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + (\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}) = \frac{A}{B} + (\frac{B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta(x)}{B^2 + B\beta(x)})$. *По свойст вам бесконечно малых функций, вт орое слагаемое – бесконечно малая функция.*

Поэт ому $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}$, *т .е.* $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{\varphi(x)}) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$.

10 Теорема о пределе сложной функции (с доказательством).

Теорема 3 (о пределе сложной функции). *Если существует конечный предел*

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$,

а функция f(u) непрерывна в точке u_0, *то*

$\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right]$.

Другими словами, *для непрерывных функций символы предела и функции можно поменять местами.*

2) *Доказательство теоремы 6.*
В силу существования указанных в условии теоремы пределов имеем следующие истинные высказывания:

$$\forall(\varepsilon_1 > 0)\,\exists(\delta_1 > 0)\,\forall(x : x \neq x_0)\;\; x \in U(x_0,\delta_1) \Longrightarrow \varphi(x) \in U(a,\varepsilon_1),$$

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta_2 > 0)\,\forall(u \neq a)\;\; y \in U(a,\delta_2) \Longrightarrow f(u) \in U(A,\varepsilon).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое δ_2, что выполнится второе утверждение. Для первого утверждения возьмем $\varepsilon_1 = \delta_2$ и для него найдем такое δ_1, что выполнится $\forall(x : x \neq x_0)$ $x \in U(x_0,\delta_1) \Longrightarrow \varphi(x) \in U(a,\delta_2)$. Но тогда из второго утверждения получаем, что $\varphi(x) \neq a \wedge$ $\wedge\,\varphi(x) \in U(a,\delta_2) \Longrightarrow f(\varphi(x)) \in U(A,\varepsilon)$.

11 Теорема о знакопостоянстве функции, имеющей ненулевой предел (с доказательством).

Теорема: Если $\lim\limits_{x® a} f(x) = b \neq 0$, то существует окрестность точки a, в которой $f(x) \neq 0$ и знак $f(x)$ совпадает со знаком значения b.

Доказательство: по условию $\lim\limits_{x® a} f(x) = b \neq 0$, т.е. $\forall E > 0\,\exists\delta(E) > 0 : \forall x \in \overset{0}{U}(a) \Rightarrow |f(x) - b| < E$, или $\forall x$ справедливы неравенства $b - E < f(x) < b + E$. Возьмём за E число $E = \frac{|b|}{2}$. Тогда b, $b+E$, $b-E$ являются числами одного знака. Следовательно, в силу неравенства $b - E < f(x) < b + E$, $f(x) \neq 0$ и имеет знак числа b в указанной δ -окрестности точки a.

12 Теорема о предельном переходе в неравенстве (доказательство для функции и последовательности).

Если $x_n \le y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, то $x \le y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то

$$\forall\varepsilon > 0\quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon)\quad \forall n > N_1 :\quad |x_n - x| < \varepsilon$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, то

$$\forall\varepsilon > 0\quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon)\quad \forall n > N_2 :\quad |y_n - y| < \varepsilon$$

Для $n > N_1$ имеем $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$. Для $n > N_2$ имеем $y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon$. Выберем $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда неравенства будут выполняться одновременно. Пусть, наоборот, $x > y$. Выберем ε таким, чтобы окрестности $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ и $y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon$ не пересекались, то есть $y + \varepsilon < x - \varepsilon$, откуда находим

$$\varepsilon < \frac{x-y}{2}.$$

Но тогда для $n > N$ имеем $x_n \ge y_n$, что противоречит условию теоремы.
Для трёх последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, из того, что $x_n + y_n \le z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, следует $a + b \le c$.

13 Теорема о пределе промежуточной функции (доказательство для функции и последовательности).

Теорема Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеет конечный предел A при $x \to a$ и пусть $\exists \overset{0}{U}(a): f_1(x) \le g(x) \le f_2(x),$ тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} g_1(x) = A, \forall x \in \overset{0}{U}(a)$ **Доказательство:**

$\exists \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $x_n \ne a \Rightarrow \{f_1(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

$\exists \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $x_n \ne a \Rightarrow \{f_2(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

$\forall E > 0 \exists N_1(E): \forall n > N_1(E) \Rightarrow |f_1(x_n) - A| < E$ $\forall E > 0 \exists N_2(E): \forall n > N_2(E) \Rightarrow |f_2(x_n) - A| < E$

Рассмотрим $N = \max(N_1(E); N_2(E))$, начиная с некоторого номера N $\{f_1(x)\}$ и $\{f_2(x)\}$, будут одинакого выполняться $A - \varepsilon < f_1(x) \le g(x) \le f_2(x) < A + \varepsilon, \forall n > N$. Значит, $|g(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} g_1(x) = A, \forall x \in \overset{0}{U}(a)$

Предел промежуточной последовательности

Если, начиная с некоторого номера, выполнено $x_n \le y_n \le z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$.

Доказательство. Так как , то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \quad \forall n > N_1: \quad |x_n - x_0| < \varepsilon$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \quad \forall n > N_2: \quad |z_n - x_0| < \varepsilon$$

Выберем $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n > N$ в силу неравенств $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ и $x_0 - \varepsilon < z_n < x_0 + \varepsilon$ будут выполнены неравенства $x_0 - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < x_0 + \varepsilon$, что означает

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$$

16 Непрерывность функции действительного переменного в точке. Теорема о непрерывности сложной функции (с доказательством)

Определение непрерывности по Коши (нотация $\varepsilon - \delta$)

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая отображает множество действительных чисел $\mathbb{R}$ на другое подмножество B действительных чисел. Говорят, что функция $f(x)$ является *непрерывной* в точке $a \in \mathbb{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению

$$|x - a| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Теорема:

Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке t_0 и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда функция $f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.

Доказательство:

Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух строчек кванторов. Имеем:

$f(x)$ непрерывна в x_0 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \quad \forall x \quad |x - x_0| < \delta \; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \psi(e)$

непрерывна в t_0 $\forall \delta > 0 \quad \exists \eta \quad \forall t \quad |t - t_0| < \eta \quad |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta$ Выписывая кванторы, получим, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad \forall t \quad |t - t_0| < \eta \quad \left|f\left(\varphi(t)\right) - f\left((\varphi t_0)\right)\right| < \varepsilon$$

что и говорит о том, что $f\left(\varphi(t)\right)$ непрерывна в точке t_0.

17 Точки разрыва и их классификация. Доказательство непрерывности функции многочлена и y=sin x.

Если функция *f* (*x*) не является непрерывной в точке *x* = *a*, то говорят, что *f* (*x*) имеет *разрыв* в этой точке

Классификация точек разрыва функции

Все точки разрыва функции разделяются на *точки разрыва первого и второго рода*.

Говорят, что функция *f* (*x*) имеет *точку разрыва первого рода* при *x* = *a*, если в это точке

- Существуют левосторонний предел и правосторонний предел ;
- Эти односторонние пределы конечны.

При этом возможно следующие два случая:

- Левосторонний предел и правосторонний предел равны друг другу:
  Такая точка называется *точкой устранимого разрыва*.
- Левосторонний предел и правосторонний предел не равны друг другу:
  Такая точка называется *точкой конечного разрыва*. Модуль разности значений односторонних пределов $\left|\lim\limits_{x\to a-0} f(x) - \lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right|$ называется *скачком функции*.

Функция *f* (*x*) имеет *точку разрыва второго рода* при *x* = *a*, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пусть x_0 – произвольная точка множества R. Тогда $\sin x - \sin x_0 = 2\sin\dfrac{x - x_0}{2}\cos\dfrac{x + x_0}{2}$.

Так как $\left|\sin\dfrac{x - x_0}{2}\right| \le \left|\dfrac{x - x_0}{2}\right|$, а $\left|\cos\dfrac{x - x_0}{2}\right| \le 1$, то $|\sin x - \sin x_0| \le |x - x_0|$, откуда следует, что функция f(x) = sin(x) – непрерывна.

18 Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке (формулировки соответствующей теоремы).

Функцию f(x) называют непрерывной на [a,b], если она непрерывна на (a,b) и непрерывна справа в точке x=a и непрерывна слева в точке x=b.

Первая теорема Вейерштрасса. Если f(x) непрерывна на [a,b], то она ограничена на этом отрезке. $\exists M > 0: \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)| \le M$. **Вторая теорема Вейерштрасса.** Если f(x) непрерывна на [a,b], то она достигает на этом отрезке своего наименьшего (наибольшего) значения. **Первая теорема Больцано-Коши.** Функция $f(x) \in C[a,b], f(a) * f(b) < 0$, тогда $\exists c \in [a,b]: f(c) = 0$

Доказательство: [a,b] разделим пополам и получим отрезки [a,a+b/2] и [a+b/2,b]. Из них выберем тот, на концах которого ф-ция принимает значения, разные по знаку и обозначим [a1,b1], f(a1)*f(b1)<0. С этим отрезком поступим также. [a1,a1+b1/2] и [a1+b1/2,b1]. Выберем отрезок с разными по знаку концами. Когда-нибудь получим отрезок $[a_n, b_n]: f(a_n) * f(b_n) < 0$. $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. При $n \to \infty$, $\dfrac{b-a}{2^n} \to 0$. Получим систему вложенных отрезков $[a,b] > [a_1,b_1] > .. > [a_n,a_n]$. Если при делении отрезка пополам значение функции в середине отрезка равно нулю, то теорему можно считать доказанной. Система вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю, имеет одну общую точку => существует точка С. Докажем, что f(c)=0. Предположим, что $f(c) \ne 0$. Для определенности f(c)>0. Т.к. ф-ция непрерывна на отрезке [a,b], то она непрерывна в точке С. Раз f(c)>0, то $\exists (c - \varepsilon; c + \varepsilon): \forall x \in (c - \varepsilon; c + \varepsilon): f(x) > 0$, $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow [a_n; b_n] \subseteq (c - \varepsilon; c + \varepsilon) \Rightarrow f(a_n) * f(b_n) > 0$ - противоречие, что и треб. доказ.

Вторая теорема Больцано-Коши.

Пусть $f(x)$ непрерывна на [a,b] и на концах отрезка принимает значения B и A, ($A \le B)$, тогда для любого числа С: $A \le C \le B \exists c \in [a,b]: f(c) = C$.

Доказательство. Рассмотрим F(x)=f(x)-C.

1) F(x) непрерывна на отрезке, как разность двух непрерывных функций.
2) F(a)*F(b)<0

По первой теореме Б-К $\exists c \in [a,b]: f(c) = 0 \Rightarrow F(c) = f(c) - C = 0 \Rightarrow f(c) = C$.

15Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших функциях(с доказательством). Выделение главной части.

а) Сравнение бесконечно малых функций

Для определения бесконечно малых и бесконечно больших функций воспользуемся, так называемым сравнением функций. Пусть у нас есть две функции p(x) и q(x), которые стремятся к A при аргументе x стремящемся к A. И будем рассматривать предел их отношения при аргументе x, стремящемся к некоторому числу A. Тогда возможны следующие варианты:

1) $\lim\limits_{x\to A}\frac{p(x)}{q(x)}=0$, т.е. предел отношения функций существует и он равен нулю, в этом случае говорят, что p(x) бесконечно малая функция более высокого порядка и принято обозначать p(x) = o(q(x)).

2) $\lim\limits_{x\to A}\frac{p(x)}{q(x)}=$, т.е. предел отношения функций существует и он равен C - некоторой константе, в этом случае говорят, что p(x) и q(x) бесконечно малые функции одного порядка и принято обозначать p(x) = O(q(x)).

3) Если данный предел: $\lim\limits_{x\to A}\frac{p(x)}{q(x)}$ не существует, в этом случае мы ничего не можем сказать о сравниваемых функциях и поэтому говорят, что функции не сравнимы.

4) $\lim\limits_{x\to A}\frac{p(x)}{q(x)}=\infty$, т.е. предел отношения функций существует и он равен бесконечности, в этом случае говорят, что g(x) бесконечно малая функция более высокого порядка и принято обозначать q(x) = o(p(x)).

b) Сравнение бесконечно больших функций Также как и в предыдущем пункте будем рассматривать предел отношения двух функций. Только теперь у нас функции стремятся к бесконечности при аргументе x, стремящемся к A. Возможны следующие варианты:

1) $\lim\limits_{x\to A}\frac{p(x)}{q(x)}=\infty$, т.е. предел отношения функций существует и равен бесконечности. В этом случае говорят, что p(x) бесконечно большая функция более высокого порядка.

2) $\lim\limits_{x\to A}\frac{p(x)}{q(x)}=$, т.е. предел отношения функций существует и равен C - некоторой константе. В этом случае говорят, что p(x) и q(x) бесконечно большие функции одного порядка.

3) $\lim\limits_{x\to A}\frac{p(x)}{q(x)}=0$, т.е. предел отношения функций существует и равен нулю. В этом случае говорят, что q(x) бесконечно большая функция более высокого порядка.

4) Если данный предел: $\lim\limits_{x\to A}\frac{p(x)}{q(x)}$ не существует, в этом случае мы ничего не можем сказать о сравниваемых функциях и поэтому говорят, что функции не сравнимы.

Теорема 4. Для того, чтобы две **б.м.ф.** $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными при $x\to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой большего порядка малости, чем каждая из этих бесконечно малых.

$$\begin{pmatrix}\alpha(x)\sim\beta(x),\\ x\to x_0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\left(\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))\right)$$
$$\wedge\left(\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))\right),\text{при } x\to x_0$$

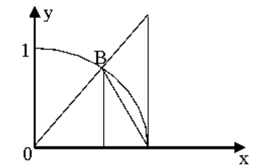
Теорема 6. Предел отношения двух **б.м.ф.** не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

$\sin x\sim x$	$a^x-1\sim x\cdot\ln a$
$\mathrm{tg}x\sim x$	$e^x-1\sim x$
$\arcsin x\sim x$	$\ln(1+x)\sim x$
$\mathrm{arctg}\,x\sim x$	$\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e$
$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$	$(1+x)^k-1\sim kx, k>0$ (в частности: $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$)

14 Первый замечательный предел (с выводом). Второй замечательный предел (вывод для функций с использованием теоремы Вейерштрасса для последовательностей).

Вывести 1 замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Пусть $BD\perp OA$, $CA\perp OA$.Проведем геометрическое доказательство, основанное на очевидном соотношении между тремя площадями: Ясно, что $S_{OAB}<S_{\text{сект}}<S_{OCA}$, s2(сектор oab) но



$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA\times BD=\frac{1}{2}\sin x$$
$$S_{\text{сект}}=\frac{1}{2}(OA)^2\times BD=\frac{1}{2}x$$
$$S_{OCA}=\frac{1}{2}OA\times AC=\frac{1}{2}tgx$$
, т.е.

$\sin x<x<tgx$, т.к. $\sin x>0\to 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Rightarrow\frac{\sin x}{x}<1,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел:

Рассмотрим последовательность , $x_n=(1+\frac{1}{n})^n, n\in\mathbb{N}.$. Покажем, что последовательность ограничена и возрастает. Сначала докажем монотонность. Воспользуемся биномом

Ньютона: $(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}\cdot b^n$. Полагая,

что a=1, b= 1/n получим:

$$(1+\tfrac{1}{n})^n=1+\tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{1}{n}+\tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\tfrac{1}{n^2}+$$
$$+\tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{n^3}+\ldots+\tfrac{n(n-1)(n-2)..(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\tfrac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\tfrac{1}{1\cdot 2}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\cdots+$$
$$+\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n}).$$
$$(1+\tfrac{1}{n})^n=1+1+\tfrac{1}{1\cdot 2}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\cdots+$$
$$+\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n}).(*)$$

Из равенства (*)следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n число 1/n — убывает, поэтому величины , (1-1/n),... возрастают. Поэтому последовательность $\{x_n\}=\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ — возрастающая, при этом $(1+\frac{1}{n})^n>2.(**)$Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства (*) на единицу. Правая часть увеличится, получим неравенство: $(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$ Усилим полученное неравенство, заменив числа 3,4,5...,n, стоящие в знаменателях дробей, числом 2: $(1+\frac{1}{n})^n=1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}).$ Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\frac{1}{2^n})<2.$ Поэтому: $(1+\frac{1}{n})^n<1+2=3.(***)$Итак, последовательность ограничена, при этом для $n\in\mathbb{N}$выполняются неравенства (**) и (***): $2<(1+\frac{1}{n})^n<3.$ Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность имеет предел, обозначаемый обычно буквой e: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$ Определение: Числом е называется предел последовательности $x_n=(1+\frac{1}{n})^n, n\in\mathbb{N}$ т. е. $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$

вопрос 19

Определение производной функции в точке.

Пусть функция *f(x)* определена на промежутке *(a; b)*, x_0 и $x_0+\Delta x$ - точки этого промежутка. **Производной функции *f(x)* в точке** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$.

Обозначается $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Когда последний предел принимает конкретное конечное значение, то говорят о существовании *конечной производной в точке*. Если предел бесконечен, то говорят, что *производная бесконечна в данной точке*. Если же предел не существует, то *ипроизводная функции в этой точке не существует*.

Функцию *f(x)* называют **дифференцируемой в точке** x_0, когда она имеет в ней конечную производную. Если функция *f(x)* дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка *(a; b)*, то функцию называют дифференцируемой на этом промежутке. Таким образом, любой точке *x* из промежутка *(a; b)* можно поставить в соответствие значение производной функции в этой точке $f'(x)$, то есть, мы имеем возможность определить новую функцию $f'(x)$, которую называют **производной функции *f(x)* на интервале *(a; b)***.

Касательной к графику функции y=f(x) в точке $(x_0; f(x_0))$называют прямую, проходящую через точку $(x_0; f(x_0))$, с отрезком которой практически сливается график функции при значениях x сколь угодно близких к формула.

Уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$.

Геометрический смысл производной заключается в том, что численно производная функции в данной точке равна тангенсу угла, образованного касательной, проведенной через эту точку к данной кривой, и положительным направлением оси Ох:

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ **или** $f'(x_0) = k$

k - угловой коэффициент касательной.

Вывод ур-я касательной. Пусть прямая задана уравнением: $y=kx+m,\ M(a; f(a))$

1) $k=f'(a)$ 2) $f(a)=ka+m$ 3) $m=f(a)-ka$ 4) $y=kx+(f(a)-ka)$ 5) $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$

вопрос 20

Дифференци́руемая (в точке) фу́нкция — это функция, у которой существует дифференциал (в данной точке). **Теорема о связи дифференцируемости функции с существованием конечной производной** Теорема 6.1. Для того чтобы функция y=f(x) имела в произвольной точке x0 конечную производную, необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в этой точке. Докажем необходимость. Предположим, что функция y=f(x) имеет в точке x0 конечную производную, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = f' (x0). Это значит, что при Δx→0 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$→ f' (x0), или [$\frac{\Delta y}{\Delta x}$—f' (x0)] →0. Обозначим эту разность через a: a = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$— f' (x0).

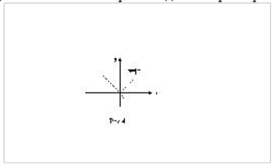
Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = f' (x0) +a, Δy = f' (x0) Δ x +aΔ x, где a→0 при Δ x→0, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha$ = 0. Обозначим f' (x0) через A. Тогда Δy = A Δ x + aΔ x. Докажем, что aΔ x есть o(Δx). Действительно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$.

Итак, Δy = A Δ x + o(Δx), т.е. функция y=f(x) дифференцируема в точке x0.

Докажем достаточность. Пусть функция y=f(x) дифференцируема в точке x0. Тогда в этой точке Δy = A Δ x + o(Δx), $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = A + $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$. f' (x0) = $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = A + $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ = A + 0 = A, т.е. функция y=f(x) имеет в точке x0 конечную производную, равную A.

Таким образом, мы доказали, что если функция имеет в некоторой точке конечную производную, то она и дифференцируема в этой точке, и наоборот, если она дифференцируема, то она имеет конечную производную. Поэтому мы имеем право отождествить понятие дифференцируемости функции в данной точке с понятием существования у функции в данной точке производной.

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции. Докажем теорему, устанавливающую связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции. Теорема 7.1. Если функция y=f(x) дифференцируема в произвольной точке x0, то она непрерывна в этой точке. Доказательство. Пусть функция y=f(x) дифференцируема в произвольной точке x0, т.е. имеет в этой точке производную f'(x0). Запишем приращение функции Δy точке x0: Δy = f'(x0) Δ x +aΔ x, где a→0 при Δ x→0 (см. доказательство теоремы 6.1). Пусть теперь Δ x→0. Тогда, очевидно, и Δy→0. Но это и означает, что функция y=f(x) непрерывна в точке x0. Теорема доказана. Утверждение, обратное этой теореме, неверно: из непрерывности функции в данной точке не вытекает её дифференцируемость в этой точке. Существуют функции, непрерывные в некоторой точке, но не имеющие в этой точке производной. Примером такой функции служит функция y= |x| = $\begin{cases} x, & \text{если } x\ge 0\\ -x, & \text{если } x<0\end{cases}$ (см. рис.4).



Эта функция непрерывна в точке x = 0, но не дифференцируема в ней. Действительно, приращение этой функции в точке x = 0 есть

Δy = f(0+Δ x) — f(0) = f(Δ x) = $|\Delta x|$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \text{если } \Delta x>0\\ -1, & \text{если } \Delta x<0\end{cases}$, т.е. в любой сколь угодно малой окрестности значения $\Delta x=0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ принимает два различных значения: 1 и —1. Это означает, что предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция y= |x| не имеет производной в точке x = 0, а, следовательно, график функции не имеет касательной в точке O(0;0) (поскольку угловой коэффициент касательной должен быть равен производной, но производной не существует).

вопрос 23

Теорема (о дифференцируемости обратной функции)

Если $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $\Delta=[x_0-\delta;x_0+\delta](\delta>0)$ и если $\exists f'(x_0)\neq 0 \Rightarrow x=\varphi(y)$ (обратное к $y=f(x)$) дифференцируемо в точке $y_0=f(x_0)$, причём $\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

Доказательство:

$x_0-\delta\to f(x_0-\delta)=\alpha$
$x_0+\delta\to f(x_0+\delta)=\beta$

По теореме об обратной функции функция f имеет обратную $x=\varphi(y)$, $y\epsilon[\alpha;\beta]$, $\varphi(x)$ – строго монотонна и непрерывна.

$$y'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=$$
$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

вопрос 26

Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть производная некоторой функции f дифференцируема. Тогда производная от производной этой функции называется **второй производной** функции f и обозначается f''. Таким образом, $f''(x)=(f'(x))'$.

Если дифференцируема $(n-1)$-я производная функции f, то ее ***n*-й производной** называется производная от $(n-1)$-й производной функции f и обозначается $f^{(n)}$. Итак, $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$, $n\in\mathbf{N}$, $f^{(0)}(x)=f(x)$.

Число n называется **порядком производной**.

Дифференциалом *n*-го порядка функции f называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой же функции. Таким образом, $d^nf(x)=d(d^{n-1}f(x))$, $d^0f(x)=f(x)$, $n\in\mathbf{N}$.

Если x - независимая переменная, то $dx=\text{const}$ и $d^2x=d^3x=\ldots=d^nx=0$.

В этом случае справедлива формула $d^nf(x)=f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Производные *n*-го порядка от основных элементарных функций

Справедливы формулы

$$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a,\quad a>0;$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(x^m)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n};$$

$$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{x^n}.$$

вопрос 22

Теорема. Если функция $u=u(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную $u'_x=u'(x_0)$ и принимает в этой точке значение $u_0=u(x_0)$, а функция $y=f(u)$ имеет в точке u_0 производную $y'_u=f'(u_0)$, то сложная функция $y=f(u(x))$ в указанной точке x_0 тоже имеет производную, которая равна $y'_x=f'(u_0)\cdot u'(x_0)$, где вместо u должно быть подставлено выражение $u=u(x)$.

Таким образом, производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента по x.

Доказательство. При фиксированном значении x_0 будем иметь $u_0=u(x_0)$, $y_0=f(u_0)$. Для нового значения аргумента $x_0+\Delta x$:

$$\Delta u=u(x_0+\Delta x)-u(x_0),\ \Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0).$$

Т.к. u – дифференцируема в точке x_0, то u – непрерывна в этой точке. Поэтому при $\Delta x\to 0$ $\Delta u\to 0$. Аналогично при $\Delta u\to 0$ $\Delta y\to 0$.

По условию $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u(u_0)$. Из этого соотношения, пользуясь определением предела, получаем (при $\Delta u\to 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha,$$

где $\alpha\to 0$ при $\Delta u\to 0$, а, следовательно, и при $\Delta x\to 0$.

Перепишем это равенство в виде:

$$\Delta y=y'_u\Delta u+\alpha\cdot\Delta u.$$

Полученное равенство справедливо и при $\Delta u=0$ при произвольном α, так как оно превращается в тождество 0=0. При $\Delta u=0$ будем полагать α=0. Разделим все члены полученного равенства на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

По условию $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$. Поэтому, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. Теорема доказана.

Итак, чтобы продифференцировать сложную функцию $y=f(u(x))$, нужно взять производную от "внешней" функции f, рассматривая ее аргумент просто как переменную, и умножить на производную от "внутренней" функции по независимой переменной.

Если функцию $y=f(x)$ можно представить в виде $y=f(u)$, $u=u(v)$, $v=v(x)$, то нахождение производной y'_x осуществляется последовательным применением предыдущей теоремы.

По доказанному правилу имеем $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. Применяя эту же теорему для u'_x получаем $u'_x=u'_v\cdot v'_x$, т.е.

$$y'_x=y'_x\cdot u'_v\cdot v'_x=f'_u(u)\cdot u'_v(v)\cdot v'_x(x).$$

вопрос 25

Предположим, что функциональная зависимость y от x не задана непосредственно y=f(x), а через промежуточную величину — t. Тогда формулы

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

задают параметрическое представление функции одной переменной.

Пусть функция y=y(x) **задана в параметрической форме, то есть в виде:**

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

где функции x=x(t) **и** y=y(x) **определены и непрерывны на некотором интервале изменения параметра** t**. Найдем дифференциалы от правых и левых частей каждого из равенств:**

$$\begin{cases} dx = x'_t dt \\ dy = y'_t dt \end{cases}$$

Далее, разделив второе уравнение на первое, и с учетом того, что $\frac{dy}{dx} = y'_x$**, получим выражение для первой производной функции, заданной параметрически:**

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Для нахождения второй производной $\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx}$ **выполним следующие преобразования:**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = (y'_x)' = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Логарифмическая произво́дная — производная от натурального логарифма функции.

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

Часто применяется для упрощения нахождения производной некоторых функции, например сложно-показательных.

вопрос 28

Теорема (*правило Лопиталя раскрытия неопределенностей*). Пусть в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 определены и дифференцируемы функции $f(x)$ и $g(x)$, причем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\,,$$

и $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathring{U}(x_0)$. Тогда если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K\,, \qquad (1)$$

то и

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K\,, \qquad (2)$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$. В результате получим функции, непрерывные в окрестности $U(x_0) = \mathring{U}(x_0) \cup \{x_0\}$ точки x_0. Для этих новых функций оставим прежние обозначения. Заметим, что если $x \neq x_0$, то $g(x) \neq 0$. Если бы было $g(x) = 0$, то, как и при доказательстве теоремы Коши, к отрезку с концами в точках x_0 и x можно было применить теорему Ролля, и тогда нашлась бы точка ξ, в которой $g'(\xi) = 0$. По условию теоремы это невозможно. Поэтому для любого $x \neq x_0$ имеем $g(x) \neq 0$. Пусть $x \neq x_0$, и пусть для определенности $x > x_0$. Для пары функции $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ выполнены все условия теоремы Коши. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K\,,$$

т.к., очевидно, $c \to x_0$, если $x \to x_0$. Здесь $c \in (x_0, x)$ — точка, существование которой обеспечивается теоремой Коши. Таким образом, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, и теорема доказана.

(лист)

вопрос 29

Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности. [Л. 13]

С помощью правила Лопиталя вычислим несколько важных пределов. Пусть $a > 1$, $\alpha > 0$, и пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{a^x}{x^\alpha}$. Мы имеем здесь дело с неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Преобразуем сначала выражение под знаком предела:

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{(a^{1/\alpha})^x}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha$$

Где $b = a^{1/\alpha} > 1$. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b^x}{x}$. Для раскрытия этой неопределенности (вида $\dfrac{\infty}{\infty}$) применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(b^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} b^x \ln b = +\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha = +\infty.$$

Мы видим, что показательная функция (с основанием большим единицы) растёт быстрее степенной (с любым показателем степени). Пусть $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log_a^\beta x}$. И здесь целесообразно предварительно преобразовать выражение под знаком предела:

$$\frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x} = \left(\frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x}\right)^\beta.$$

Вычислим сначала предел выражения в скобках. Для этого надо раскрыть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^{\alpha/\beta})'}{(\log_a x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\alpha}{\beta}\cdot x^{(\alpha/\beta)-1}}{\frac{1}{x\ln a}} = \frac{\alpha\ln a}{\beta} \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha/\beta} = +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x}\right)^\beta = +\infty.$$

Мы видим, что степенная функция (с положительным показателем степени) растет быстрее любой степени логарифма при $x \to +\infty$.

Показательная a^x при $a > 1$ растёт быстрее степенной x^a, степенная быстрее логарифмической любой степени $\log_a^b x$.

вопрос 34

Говорят, что график функции выпуклый вверх (resp. вниз) на промежутке X, если он расположен не выше (не ниже) любой касательной к графику на промежутке X

(Достаточное условие выпуклости).
Если функция *f(x)* имеет на промежутке *X* вторую производную и $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x)' \leq 0$) на X, то график

функции имеет на выпуклость, направленную вниз (вверх).
Док-во: Рассмотрим случай $f'(x) \geq 0$ для $\forall\, x \in X$

пусть т. с – произвольная точка, принадлежащая X. Требуется доказать график функции *f(x)* лежит не ниже касательной, проходящей через т. M(c; *f* (c)).

__Уравнение касательной__ T : Y=*f*(c)+*f'*(c)·(x-c) (A)

Разложим функцию y=*f(x)* в окрестности т. с по формуле Тейлора с n=1:

$$ó = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2 \text{(B)}$$ где ξ находится между с и x.

Вычитая (A) из (B) имеем: y-Y $= (f''(\xi)/2!) * (x-c)^2$

Т.к. $f''(x) \geq 0$ на X, то правая часть последнего равенства больше или равно 0, следовательно y≥ Y для $\forall\, x \in X$, что и доказывает, что график функции лежит не иниже касательной T всюду на промежутке X Аналогично рассматриваем случай $f'(x)' \leq 0$. Q. e. D.

вопрос 35

Точка $M(X_0;F(X_0))$называется точкой перегиба графика функции y=f(x), если в данной точке существует касательная к графику функции (она может быть параллельна оси Oy) и существует такая окрестность точки X_0, в пределах которой слева и справа от точки M график функции имеет разные направления выпуклости.

Определение. Дифференцируемая функция называется выпуклой вниз на интервале X, если ее график расположен не ниже касательной к нему в любой точке интервала X.

Определение. Дифференцируемая функция называется выпуклой вверх на интервале X, если ее график расположен не выше касательной к нему в любой точке интервала X.

необходимое условие точек перегиба

Теорема (*необходимые условия наличия точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, причем вторая производная непрерывна в указанной точке. Тогда если x_0 — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f''(x_0) \neq 0$, и пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 существует окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, этой точки такая, что $f''(x) > 0$ во всех точках этой окрестности. Тогда на обоих интервалах $(x_0 - \delta,\ x_0)$ и $(x_0,\ x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, что противоречит наличию перегиба в точке x_0. Поэтому на деле $f''(x_0) = 0$, и теорема доказана.

Как и в случае точек экстремума условие $f''(x_0) = 0$ лишь необходимо для наличия перегиба в соответствующей точке. Достаточным это условие не является, как показывает пример функции $y = x^4$. Здесь $y''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0$, однако эта функция выпукла вниз на интервале $(-\infty, \infty)$ и не имеет перегиба при $x = 0$.

достаточное условие точек перегиба \\\\теорема (первое достаточное условие наличия точки перегиба). пусть функция

$f(x)$ определена в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, точки x_0 и непрерывна в указанной точке. Тогда если в соответствующей проколотой окрестности $(x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ имеет вторую производную, которая меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 есть точка перегиба функции $y = f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности вторая производная $f''(x)$ положительна при $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ и отрицательна при $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$. Тогда на $(x_0 - \delta,\ x_0)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а на $(x_0,\ x_0 + \delta)$ выпукла вверх, т.е. при переходе через точку x_0 направление выпуклости меняется на противоположное. Отсюда следует, что x_0 — точка перегиба функции $f(x)$. Теорема доказана.

Теорема (*второе достаточное условие наличия точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ трижды дифференцируема в точке x_0, причем $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f'''(x_0) > 0$. Тогда

$$f'''(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0-} \frac{f''(x)}{x - x_0}.$$

Выражение $\dfrac{f''(x)}{x - x_0}$ в некоторой левосторонней проколотой окрестности $(x_0 - \delta_1,\ x_0)$, $\delta_1 > 0$, должно иметь знак своего предела $f'''(x_0)$, т.е. $\dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$, а тогда (т.к. $x - x_0 < 0$) выполняется неравенство $f''(x) < 0$. Аналогично

$$f'''(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f''(x)}{x - x_0},$$

и $\dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ при $x \in (x_0,\ x_0 + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$, т.е. $f''(x) > 0$ при указанных x.

Мы видим, что вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. По предыдущей теореме x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$. Теорема доказана.

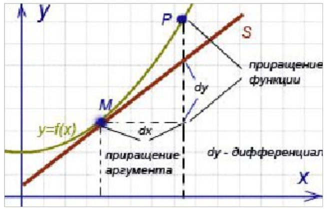
вопрос 24

Понятие и геометрический смысл дифференциала

Определение. Дифференциалом функции в некоторой точке x называется главная, линейная часть приращения функции.

Дифференциал функции y = f(x) равен произведению её производной на приращение независимой переменной x (аргумента).

Это записывается так: $dy = y'\Delta x$ или $df(x) = f'(x)\Delta x$ или же $df(x) = f'(x)dx$



Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции *y* = *f*(*x*) равен приращению ординаты касательной S, проведённой к графику этой функции в точке M(*x*; *y*), при изменении *x* (аргумента) на величину $\Delta x = dx$ (см. рисунок).

Дифференциал функции $z = g(y)$ в точке y_0 имеет вид:

$$dz = g'(y_0)\,dy,$$

где dy — дифференциал тождественного отображения $y \to y_0$:

$$dy(h) = h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Пусть теперь $y = f(x),\ x \in U(x_0),\ f \in \mathcal{D}(x_0)$. Тогда $dy = f'(x_0)\,dx$, и согласно цепному правилу:

$$dz = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)\,dx = g'(y_0)\,dy.$$

Таким образом, форма первого дифференциала остаётся одной и той же вне зависимости от того, является ли переменная функцией или нет.

Инвариантность формы первого дифференциала

В том случае, когда x и y являются независимыми аргументами функции $z = f(x, y)$, была установлена следующая форма ее дифференциала:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (9)$$

В случае, если z зависим от x и y сложным образом, т. е. через посредство некоторых функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ или $z = f[u(x, y), v(x, y)]$, то частные производные, входящие в выражение (9), будут выражаться по формулам (2):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

При этом оказывается, что форма дифференциала (9) не изменится, если мы его выразим только через u и v и их дифференциалы, т. к. имеет место теорема об инвариантности формы первого дифференциала функции многих переменных:

Теорема. Дифференциал функции $z = f(u, v)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли ее аргументы u и vНезависимыми переменными или функциями от независимых переменных.

Доказательство. В случае независимых переменных u и v по теореме 2 п. 2.3:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Если же $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, то, подставляя $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ из (2) в (9) после группировки выражений, содержащих $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, получим

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

И так как здесь в скобках стоят полные дифференциалы от u и v, то окончательно получим

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

вопрос 27

Теорема (*Ферма*). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке I и в некоторой внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (или наименьшее) значение на этом промежутке. Тогда, если существует производная $f'(x_0)$, то эта производная равна нулю.

Доказательство. Для определённости будем считать, что в точке x_0 функция $f(x)$ принимает наибольшее значение. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0,$$

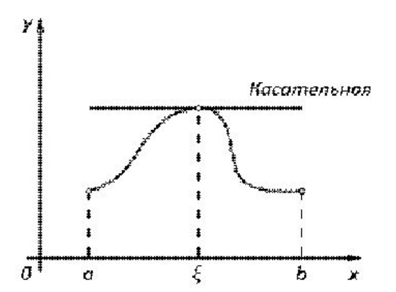
т.к. здесь числитель неположителен, а знаменатель положителен. Далее,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

т.к. числитель по-прежнему неположителен, а знаменатель отрицателен. Таким образом, $f'(x_0) \leqslant 0$ и $f'(x_0) \geqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$. Случай, когда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимальное значение рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теормема Ролля Если вещественная функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая на интервале $(a;b)$, принимает на концах отрезка $[a,b]$ одинаковые значения, то на интервале $(a;b)$ найдётся хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

геом смысл Теорема утверждает, что если ординаты обоих концов гладкой кривой равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс.



док-во

Если функция на отрезке постоянна, то утверждение очевидно, поскольку производная функции равна нулю в любой точке интервала.

Если же нет, поскольку значения функции в граничных точках сегмента равны, то согласно теореме Вейерштрасса, она принимает своё наибольшее или наименьшее значение в некоторой точке интервала, то есть имеет в этой точке локальный экстремум, и по лемме Ферма, в этой точке производная равна 0.

теорема логранджа Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в открытом промежутке (a,b) и сохраняет непрерывность на концах этого промежутка. Тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

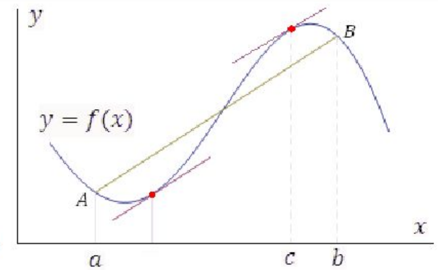
д-во Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Эта функция непрерывна и дифференцируема в промежутке $[a,b]$, а на его концах принимает одинаковые значения: $F(a) = F(b) = 0.$

Тогда $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и, следовательно, существует точка $c \in (a,b)$, в которой производная функции $F(x)$ равна нулю:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$



КОШИ Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в замкнутом промежутке $[a,b]$; дифференцируемы в открытом промежутке (a,b); $g'(x) \neq 0$ в открытом промежутке (a,b). Тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{15}$$

Доказательство. Заметим, что $g(b)-g(a) \neq 0$. В противном случае – согласно теореме Ролля – производная $g'(x)$ обратилась бы в нуль в некоторой точке $c \in (a,b)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

которая удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и, в частности, принимает одинаковые значения на концах промежутка $[a,b]$:

$$F(a) = F(b) = 0.$$

Тогда существует точка $c \in (a,b)$, в которой

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0,$$

что и требовалось доказать.

вопрос 32

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет в каждой точке интервала (a, b) неотрицательную производную, то она является неубывающей функцией в этом интервале.*

Доказательство. Возьмем $x_1 < x_2$ из интервала (a, b). Для функции $f(x)$ на интервале $[x_1, x_2]$ выполнены все условия теоремы Лагранжа. Поэтому $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x_0)$, где x_0 лежит в интервале (x_1, x_2), а следовательно, и в интервале (a, b). По условию $f'(x_0) \geq 0$ и $x_2 > x_1$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, или $f(x_2) \geq f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается и другая теорема.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ в каждой точке интервала (a, b) имеет неположительную производную, то она является невозрастающей функцией в этом интервале.* Аналогично теорема справедлива и в отношении убывающих функций. Надо только в условиях теоремы неотрицательность производной заменить на неположительность.

Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функции. [Л. 15]

Теорема (*достаточные условия возрастания функции на промежутке*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех его точках за исключением, быть может, конечного их числа. Если производная $f'(x)$ неотрицательна всюду, где она определена, и не равна тождественно нулю ни на одном интервале $I_1 \subset I$, то функция $f(x)$ возрастает на I.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что $f(x)$ не убывает на I. Пусть для некоторых точек x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, этого промежутка $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда для любой точки $x \in (x_1, x_2)$ имеем $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Это означает, что функция $f(x)$ постоянна на (x_1, x_2), и, следовательно, $f'(x)$ тождественно равна нулю на этом интервале, что противоречит условиям теоремы. Поэтому на деле $f(x_1) \neq f(x_2)$, а тогда $f(x_1) < f(x_2)$, и функция $f(x)$ возрастает на I. Теорема доказана.

Аналогично теорема справедлива и в отношении убывающих функций. Надо только в условиях теоремы неотрицательность производной заменить на неположительность.

вопрос 36

<u>Асимптота графика:</u>

Вертикальные асимптоты.
Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty .$$

Горизонтальные асимптоты. Если

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

Наклонная асимптота.
Для того, чтобы кривая $y = f(x)$ имела асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx]$$

Теорема (*о необходимых и достаточных условиях наличия наклонной асимптоты*). Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0$. Прямая $y = Ax + B$ тогда и только является правой асимптотой графика данной функции, когда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - Ax) = B .$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y = Ax + B$ — правая наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда по определению $f(x) = Ax + B + o(1)$, $x \to +\infty$. Отсюда $\frac{f(x)}{x} = A + \frac{B}{x} + \frac{o(1)}{x} \to A$, $f(x) - Ax = B + o(1) \to B$, если $x \to +\infty$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если $f(x) - Ax \to B$ при $x \to +\infty$, то $f(x) - Ax = B + o(1)$, $x \to +\infty$. Поэтому прямая $y = Ax + B$ есть (правая) наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x = A$ здесь не понадобился. Достаточность доказана. Теорема доказана.

вопрос 33

Точка x_0 называется точкой локального максимума функции f(x), если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x) \le f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой локального минимума функции f(x), если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности $f(x) \ge f(x_0)$.

Локальный экстремум:
Пусть функция y=f(x) определена в некоторой δ-окрестности точки x0, где δ>0.
Говорят, что функция f(x) имеет локальный максимум в точке x0, если для всех точек x≠x0, принадлежащих окрестности (x0–δ,x0+δ), выполняется неравенство f(x)≤f(x0).
Если для всех точек x≠x0 из некоторой окрестности точки x0 выполняется строгое неравенство f(x)<f(x0), то точка x0 является точкой строгого локального максимума.

Крит ические т очки **– это внутренние точки области определения функции в которых производная не существует или равна нулю.**

Для того, чтобы функция, дифференцируемая в точке ξ, имела локальный экстремум необходимо, чтоб производная в этой точке ξ была равна 0. $f'(\xi)=0$ Доказательство: следует из теоремы Ферма. Дано: точка ξ – точка локального экстремума. Доказать: $f'(\xi)=0$. Согласно определению локального экстремума, функция принимает в $U(\xi)$ либо максимальное, либо минимальное значение $\Longrightarrow$ по теореме Ферма производная в точке ξ равна 0. Т. Ферма: Пусть y=f(x) определена на (a;b) и в некоторой точке этого интервала принимает наибольшее или наименьшее значение. Если в этой точке функция имеет производную, то эта производная равна нулю. Доказательство: (Для наибольшего значения). Пусть $f(\xi) > f(x), \forall x \in (a;b)$. так как функция дифференцируема в $(\bullet)\xi$

$\exists \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi)$. $\quad f'_+(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi+0} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \le 0$; $\quad f'_-(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi-0} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0$; Т.к.

$\exists f'(\xi) \Rightarrow f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = 0$.

по 1 производной

Теорема (*первая теорема о достаточном условии наличия экстремума*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$ этой точки. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, то в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум, а если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через x_0, то функция $f(x)$ имеет в этой точке строгий локальный максимум. Если же $f'(x)$ сохраняет знак в проколотой окрестности точки x_0, то экстремума в этой точке нет.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение теоремы. Если $f'(x)<0$ при всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$, то на полуинтервале $(x_0-\delta,\ x_0]$ функция $f(x)$ убывает, и для любого $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ имеем по теореме о достаточных условиях убывания функции неравенство $f(x)>f(x_0)$. На полуинтервале $[x_0,\ x_0+\delta)$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x_0)<f(x)$ для всех $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$. Мы видим, что x_0 и в самом деле есть точка строгого локального минимума. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы. В случае последнего утверждения функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает на интервале $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ в зависимости от знака производной $f'(x)$; экстремума в точке x_0 в обоих случаях нет. Теорема доказана.

по 2 производной

Теорема (*вторая теорема о достаточном условии наличия экстремума*). Пусть в точке x_0 у функции $f(x)$ существуют все производные до n-го порядка включительно, причем $f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда, если n четно, и $f^{(n)}(x_0)>0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум. Если n четно, и $f^{(n)}(x_0)<0$, то в точке x_0 строгий локальный максимум. Если n нечетно, то экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство. Запишем для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано; в силу условия $f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ имеем такое равенство:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\ x\to x_0.$$

Отсюда

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0)+\alpha(x))\cdot(x-x_0)^n, \tag{1}$$

где $\quad \alpha(x)=n!\dfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}\longrightarrow 0$ при $x\to x_0$.

Пусть теперь n четно, и $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда

$$\lim_{n\to x_0}(f^{(n)}(x_0)+\alpha(x))=f^{(n)}(x_0)>0,$$

и по теореме о сохранении функцией знака своего предела существует проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 такая, что $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)>0$ для всех $x\in\mathring{U}(x_0)$. Далее, т.к. n четно, то также и $(x-x_0)^n>0$ для указанных x. Поэтому из (1) следует, что для всех $x\in\mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, т.е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. Пусть n нечетно, и пусть для определенности $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда, как и выше, найдется проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$ такая, что для любого $x\in\mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)>0$. Поскольку n нечетно, то при $x<x_0$ имеем неравенство $(x-x_0)^n<0$, а при $x>x_0$ — неравенство $(x-x_0)^n>0$. Поэтому из (1) получаем, что при $x<x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$, а при $x>x_0$ — неравенство $f(x)>f(x_0)$, если, конечно, $x\in\mathring{U}(x_0)$. Мы видим, что экстремума в точке x_0 нет. К такому же выводу мы придем, если предположим, что $f^{(n)}(x_0)<0$. Теорема доказана.