

Математика

Перпендикулярность
прямых

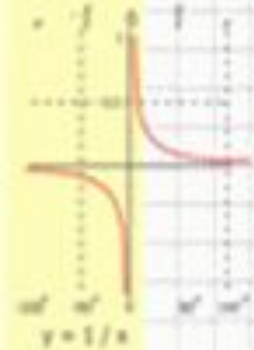
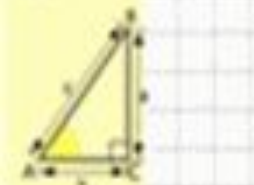
Перпендикулярность
прямой и плоскости.

Перпендикулярность
плоскостей

Проверь себя



- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$



Математика



$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

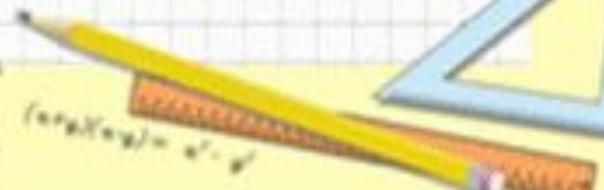
$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$\sin 90^\circ = 1$$



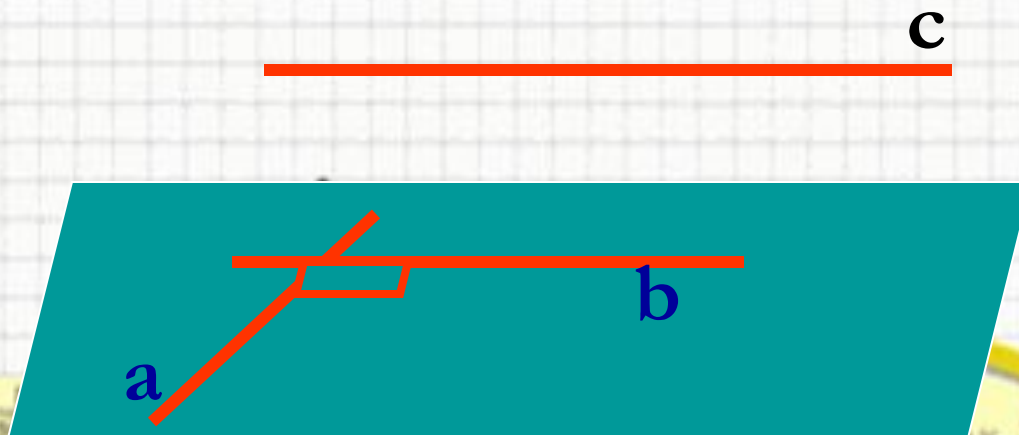
$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0.5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$



Математика

Перпендикулярные прямые в пространстве

- Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90° .
- Обозначается $a \perp b$
- Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

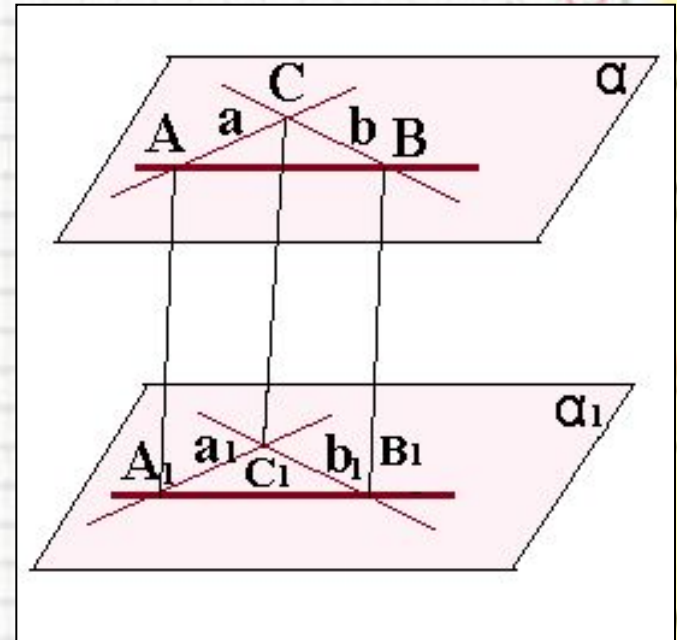


Математика

Перпендикулярные прямые в пространстве

- Теорема.**

Если две пересекающиеся прямые в пространстве параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

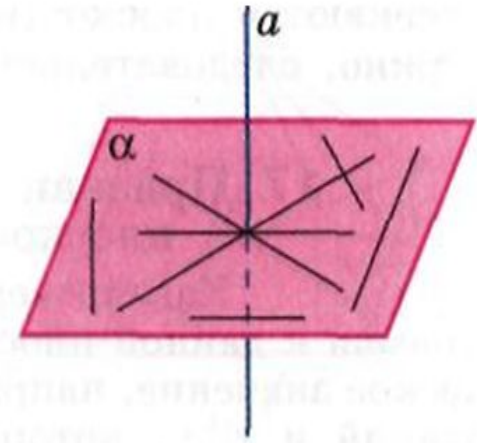


Через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Математика

Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.



Прямая a , перпендикулярная плоскости α ($a \perp \alpha$), означает, что $a \perp b$, $a \perp c$, где $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$.

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0,5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = \sin^2 \gamma$$

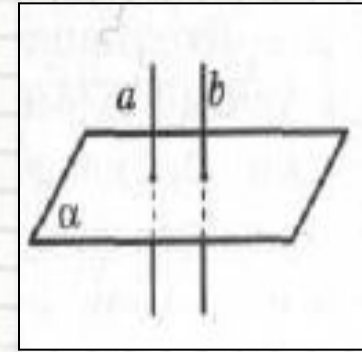
$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

Математика

Свойства :

1. Если плоскость перпендикулярна одной

- из двух параллельных прямых,
- то она перпендикулярна другой
- прямой. ($a \perp \alpha$ и $a \parallel b \Rightarrow b \perp \alpha$)

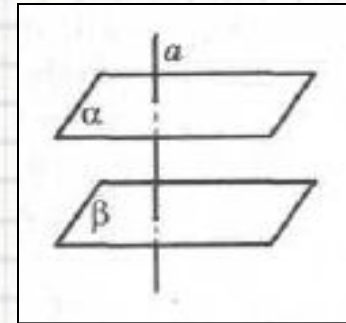


2. Если две прямые перпендикулярны

- одной и той же плоскости,
- то они параллельны. ($a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$)

3. Если прямая перпендикулярна

- одной из двух параллельных
- плоскостей, то она перпендикулярна
- и другой плоскости. ($\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha \Rightarrow a \perp \beta$)



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 30 \\ \sin \beta = 45 \\ \sin \gamma = 45 \end{cases}$$

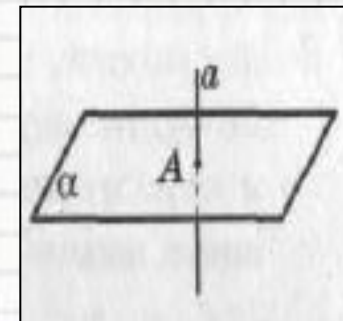
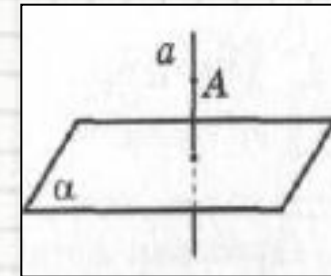
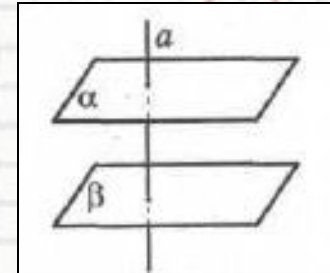
$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a' - a''$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

Математика

Свойства :

- 4 Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.
($a \perp \alpha$ и $a \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$)
- 5 Через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.
- 6 Через любую точку прямой можно провести плоскость, перпендикулярную ей и притом только одну.



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

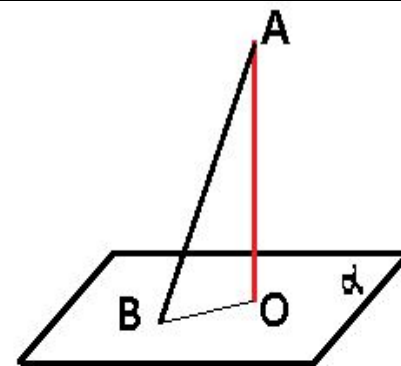
$$\begin{cases} \sin \alpha = 30 \\ \sin \beta = 45 \\ \sin \gamma = 60 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

Математика

Перпендикуляр и наклонная

- *Перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, - отрезок, лежащий на прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости, соединяющий данную точку с точкой плоскости.*
- *Конец этого отрезка, лежащий на плоскости, называют основанием перпендикуляра.*



АО - перпендикуляр
к плоскости α

АВ - наклонная к плоскости α

ВО - проекция наклонной АВ
на плоскость α

Наклонная, проведенная из данной точки к плоскости, - любой отрезок, соединяющей данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

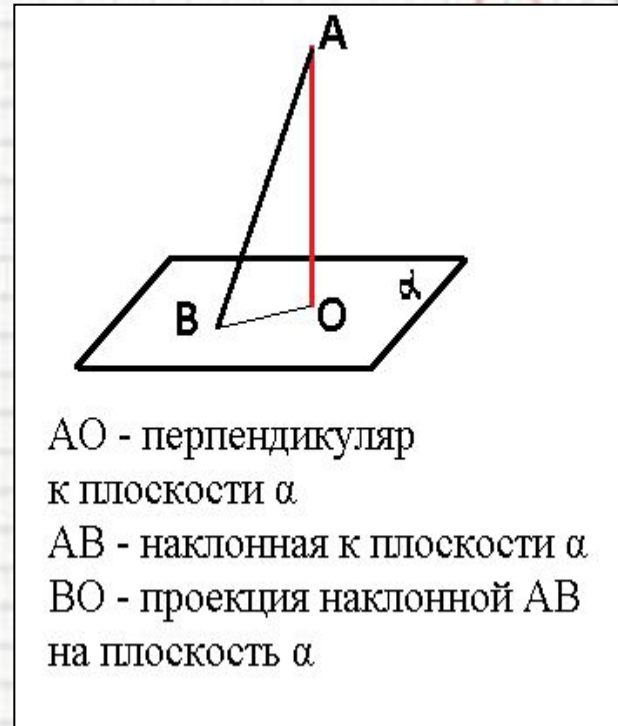
Математика

Перпендикуляр и наклонная

- *Конец отрезка, лежащий на плоскости, называют **основанием наклонной**.*
- *Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной**.*

- **Свойства:**

- 1 Перпендикуляр короче наклонной, проведенной из одной точки $AO < AB$.
2. Из данной точки, не лежащей на плоскости, можно провести **только один перпендикуляр** к плоскости и **бесконечное множество наклонных**.



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0.5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

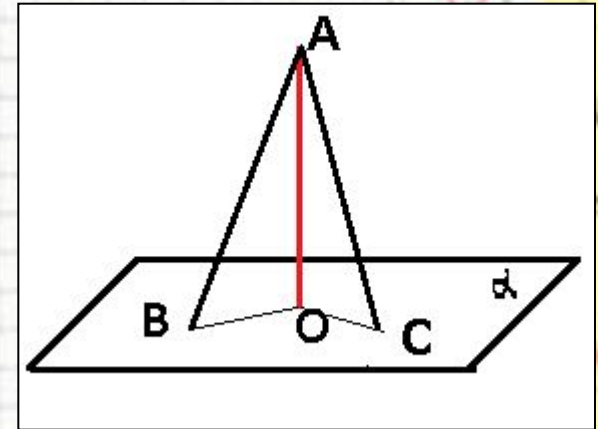
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

Математика

Перпендикуляр и наклонная.

- 3. Если из одной точки к одной
- плоскости проведены перпендикуляр и две наклонные, то:
- - равные наклонные имеют равные проекции (если $AB=AC$, то $BO=CO$);
- Если проекции наклонных равны, то сами наклонные равны (если $BO=CO$, то $AB=AC$);

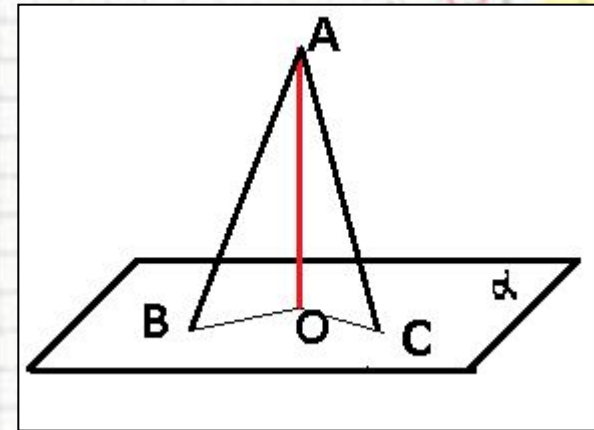


- Большая наклонная имеет большую проекцию (если $AB>AC$, то $BO>CO$);
- Из двух наклонных больше та, которая имеет большую проекцию (если $BO>CO$, то $AB>AC$).

Математика

Перпендикуляр и наклонная.

- Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.



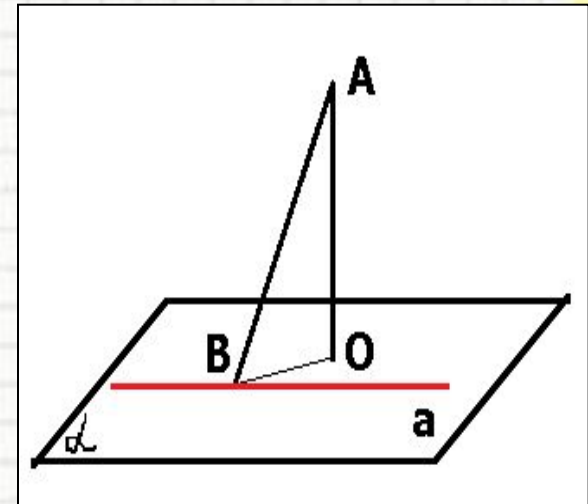
AO – расстояние от точки A до плоскости α .

Математика

Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна наклонной (если $a \perp BO$, то $a \perp AB$).

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной (если $a \perp AB$, то $\perp BO$).



Математика

Теорема о трех перпендикулярах

Доказательство:

1) AB - перпендикуляр, AC - наклонная, $d \in \alpha$, $C \in d$

2) Проводим $CA' \parallel AB$. $CA' \perp \alpha$

(по свойству перпендикулярных прямой и плоскости)

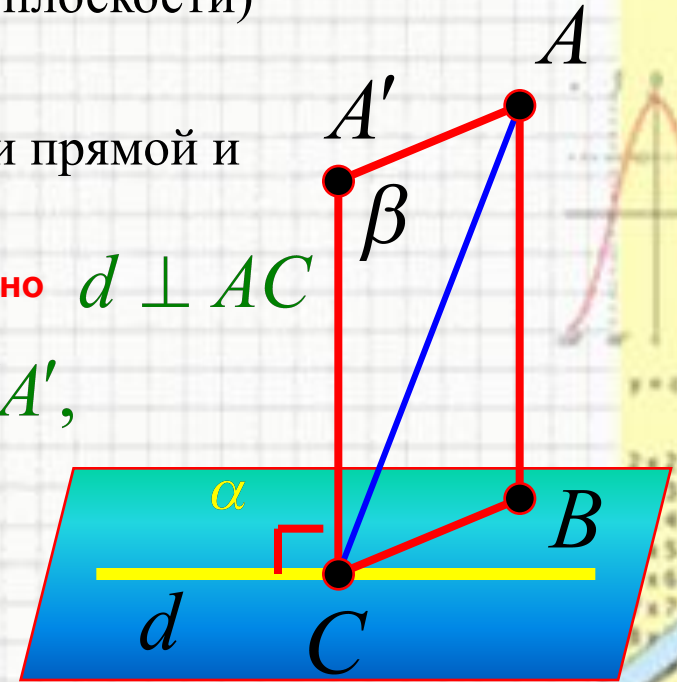
3) AB и $A'C$ определяют β

4) $d \perp CA'$ (признак перпендикулярности прямой и плоскости)

5) Если $d \perp CB$, то $d \perp \beta$, следовательно $d \perp AC$

6) Аналогично, если $d \perp CA$ и $d \perp CA'$,

$d \perp \beta$, следовательно $d \perp BC$



Задача

Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Доказать, что каждая точка этой прямой **равноудалена** от сторон треугольника.

Решение:

- 1) А, В, С- точки касания сторон треугольника с окружностью, О- центр окружности, S- точка на перпендикуляре
- 2) Так как радиус ОА перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах: SA- перпендикуляр к этой стороне
- 3) По теореме Пифагора:

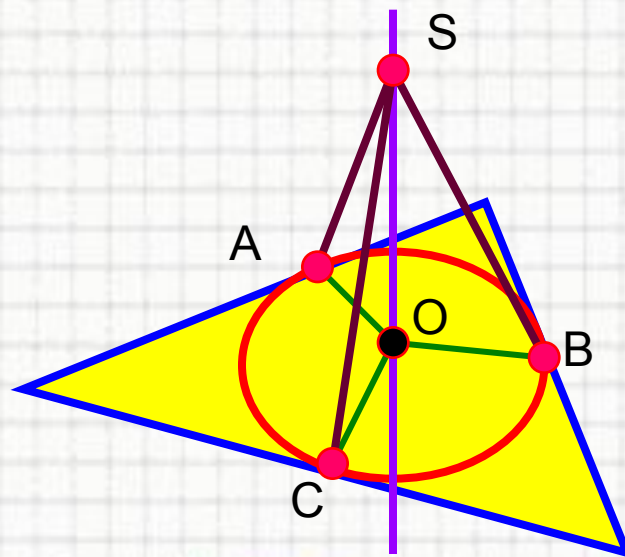
$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

где r-радиус вписанной окружности

$$4) \quad SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$$

$$5) \quad SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$$

Т.е. расстояния от S до сторон треугольника **равны**

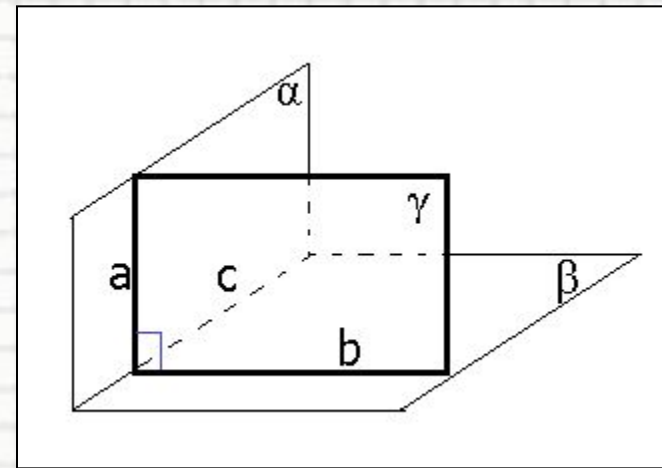


Математика

Перпендикулярность двух плоскостей

Перпендикулярные плоскости – две пересекающиеся плоскости, для которых выполняется условие, что третья плоскость, перпендикулярная линии их пересечения, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Плоскости α и β перпендикулярны ($\alpha \perp \beta$), если плоскость $\gamma \perp c$, γ пересекает α и β по взаимноперпендикулярным прямым a и b , ($a \perp b$).



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 3/5 \\ \sin \beta = 4/5 \\ \sin \gamma = ? \end{cases}$$

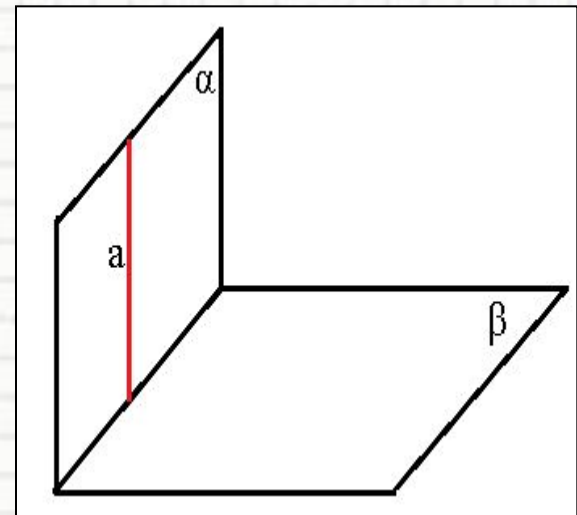
$$(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = \sin^2 \gamma$$

2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
8 x 8 = 64

Математика

Признак перпендикулярности плоскостей

Если прямая, лежащая в одной плоскости,
перпендикулярна другой плоскости, то эти
плоскости перпендикулярны
(если $a \subset \alpha$, $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$).



$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 0.5 \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a^2 - b^2$$

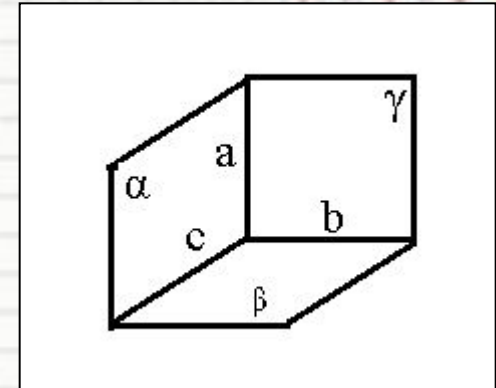
2	2	=	4
3	3	=	9
4	4	=	16
5	5	=	25
6	6	=	36
7	7	=	49
8	8	=	64

Математика

Свойства перпендикулярных плоскостей

1. Любая плоскость, перпендикулярная прямой пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

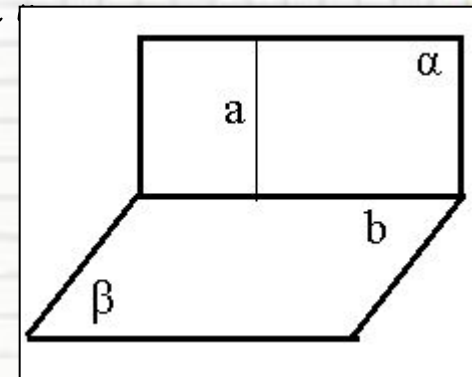
(если $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\gamma \cap \beta = b$ и $\gamma \perp c$, то $a \perp b$)



2. Если прямая лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей,

перпендикулярна прямой их пересечения, то она перпендикулярна другой плоскости.

(если $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = b$, $a \in \alpha$ и $a \perp b$, то $a \perp \beta$)

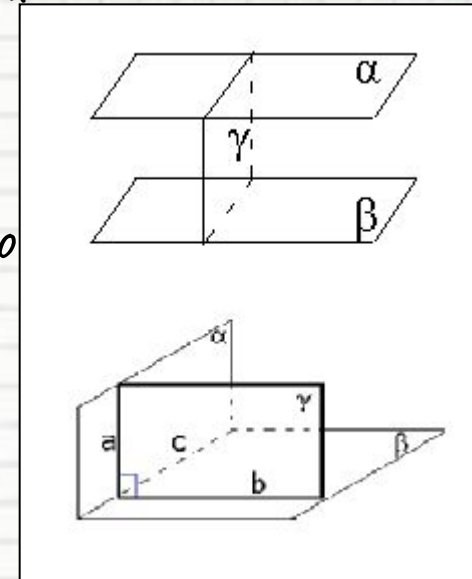


Математика

Свойства перпендикулярных плоскостей

3. Через любую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости

4. Две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, или параллельны, или пересекаются по прямой, перпендикулярной третьей плоскости.



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 30 \\ \sin \beta = 45 \\ \sin \gamma = 60 \end{cases}$$

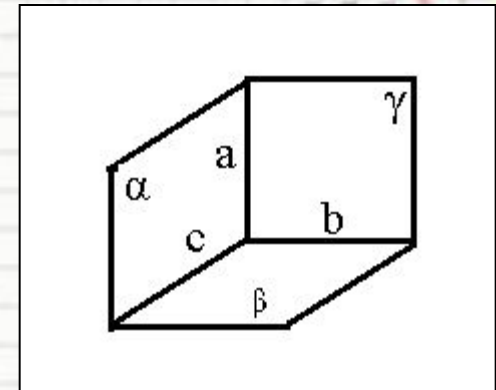
$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

Математика

Свойства перпендикулярных плоскостей

5. Три попарно перпендикулярные плоскости пересекаются по трем перпендикулярным прямым (если $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$, $\gamma \perp \alpha$, То $a \perp b$, $b \perp c$, $a \perp c$)



6. Через данную прямую некоторой плоскости можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

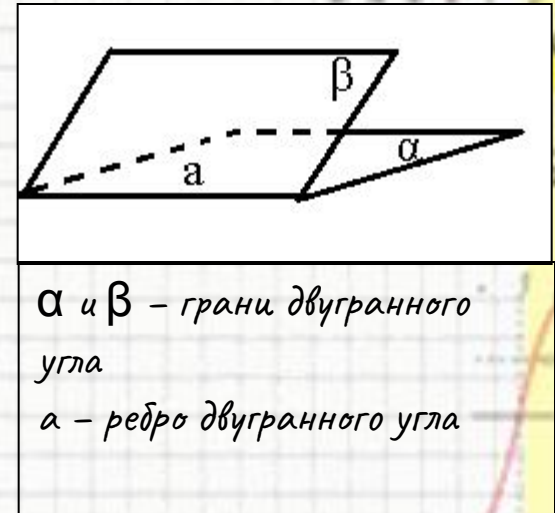
$$(\sin \alpha / \sin \beta) = a^2 - b^2$$

2	2	=	4
3	3	=	9
4	4	=	16
5	5	=	25
6	6	=	36
7	7	=	49
8	8	=	64

Математика

Двугранные углы.

- Двугранный угол – фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащими одной плоскости.
- Полуплоскости называются гранями, а прямая, их ограничивающая, – ребром двугранного угла.



$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 30 \\ \sin \beta = 45 \\ \sin \gamma = 25 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

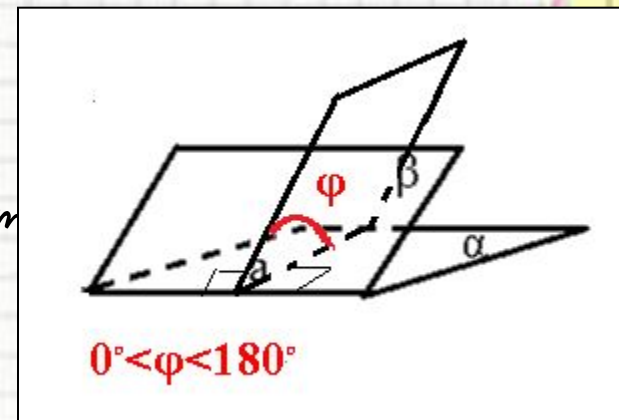
Математика

Двугранные углы.

Линейный угол двугранного угла – угол, являющийся разрезом этого двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру (угол между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, лежащими на гранях двугранного угла и имеющими на ребре общее начало).

Мера двугранного угла – мера соответствующего ему линейного угла.

Мера двугранного угла находится в пределах от 0 до 180 градусов.



Математика

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называют отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Утверждение: две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

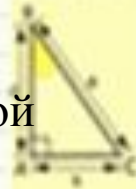
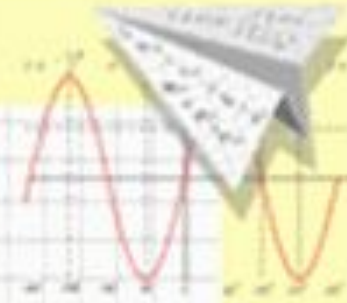
Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра



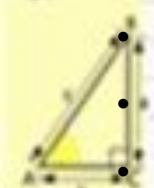
Математика

Проверь себя

- Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
- Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
- Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
- Если плоскость перпендикулярна одной из двух прямых , то она ,, ,, , другой прямой.
- Две прямые, перпендикулярные одной плоскости ,, ,, ,, ,
- Что такое перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость?
- Расстояние от точки до плоскости – это ...
- Что такое наклонная? Что такое проекция наклонной?
- Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
- Какие плоскости называются перпендикулярными?
- Признак перпендикулярности плоскостей.
- **Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?**



2 × 2 = 4
3 × 3 = 9
4 × 4 = 16
5 × 5 = 25
6 × 6 = 36
7 × 7 = 49
8 × 8 = 64



$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} \sin 30^\circ \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

