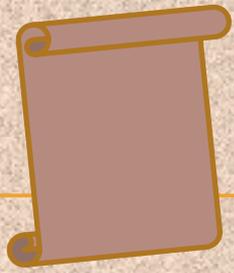

ΚΡΥΒΤΕ

ΒΤΟΦΡΟΤΟ

ΠΩΦ *Туперδου*

α

a



ΟΥΠΕΡΕΔΕΛΕ
ΗΜΕ

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ СТОРОН

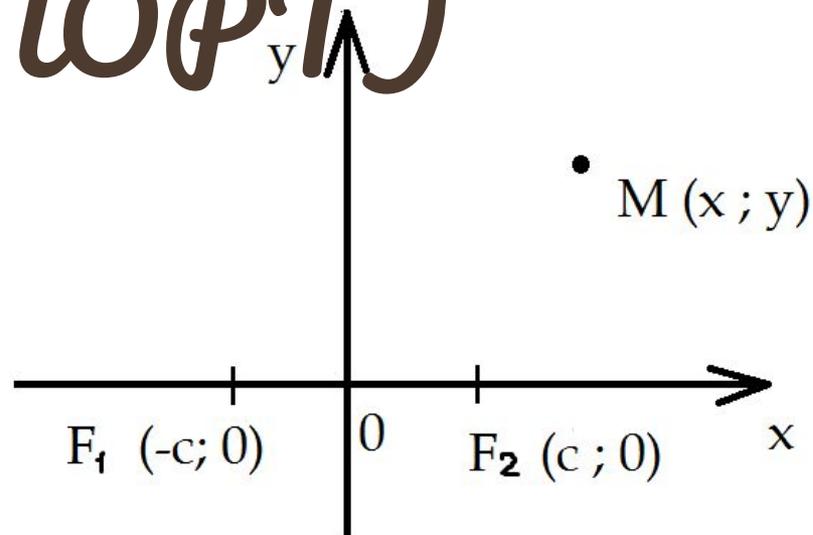
Дано:

$$MF_1 - MF_2 = 2a,$$

$$2a < 2c$$

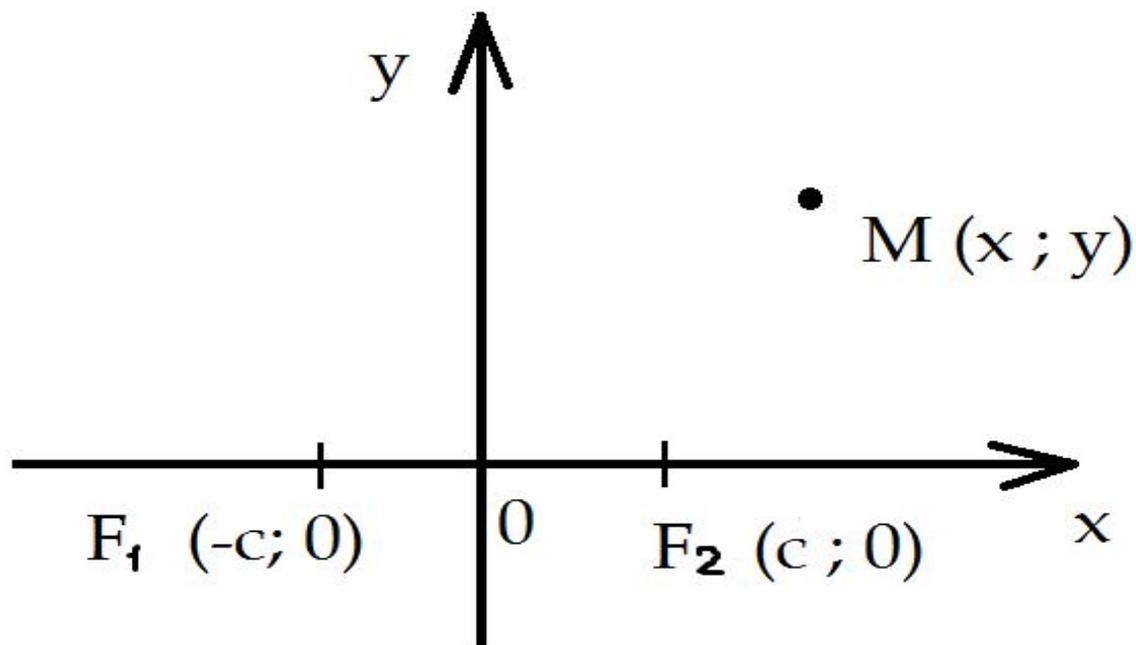
Составить:

Уравнение
геометрического
места точек.



РЕШЕНИЕ:

1) Выбор системы координат xOy



ΚΑΘΟΛΗΥΕΣΤΟΕ ΥΠΕΡΒΟΛΗΜΕ ΤΥΠΕΡΦΟΛΗ

$$2) \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

$$(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a)^2;$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (xc - a^2)^2;$$

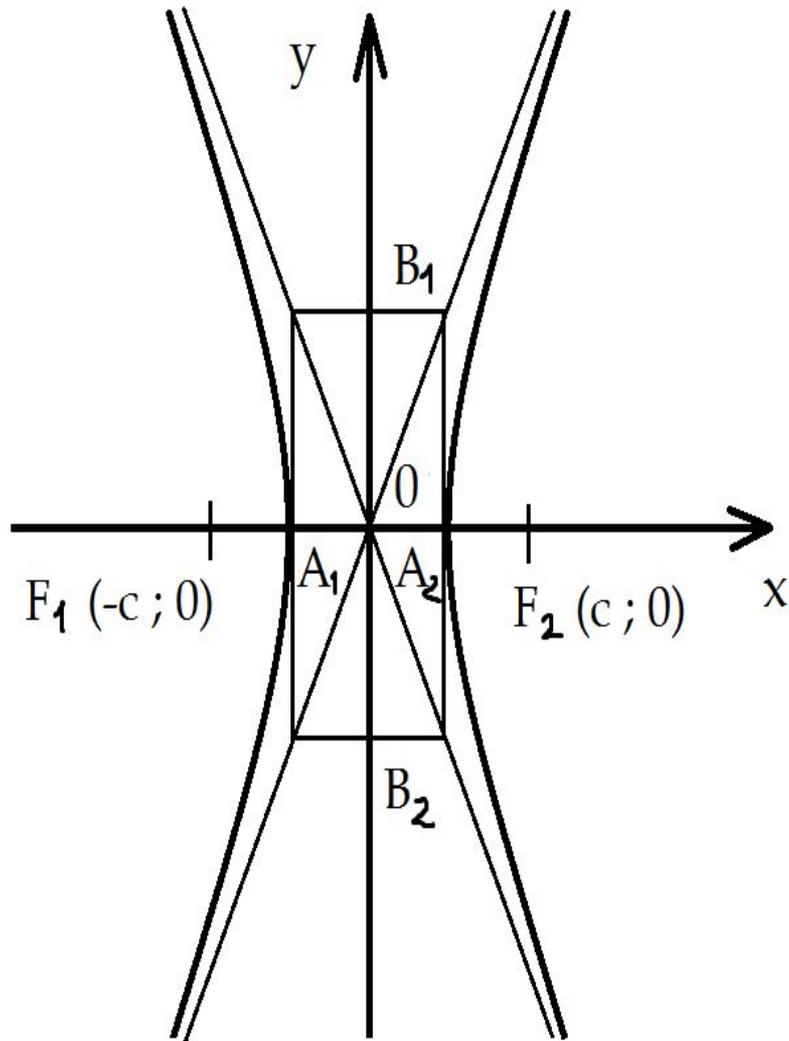
$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2y^2 + a^2c^2 = x^2c^2 - 2xca^2 + a^4;$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2);$$

$$x^2/a^2 - y^2/(c^2 - a^2) = 1; \quad c^2 - a^2 = b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ



1) точки $A_1 (-a ; 0)$, $A_2 (a ; 0)$
- вершины гиперболы

2) точки $B_1 (0 ; b)$, $B_2 (0 ; -b)$
- мнимые вершины
гиперболы

3) прямые $y = \frac{bx}{a}$ и $y = -\frac{bx}{a}$
- асимптоты

(греч. «несливающийся»)
гиперболы, проходящие
через противоположные
вершины прямоугольника
со сторонами $2a$ и $2b$.

4) уравнение гиперболы содержит лишь чётные степени переменных x и y , значит, эта кривая обладает симметричностью относительно осей Ox и Oy , а значит, она обладает центральной симметрией относительно начала координат. Точка O – центр гиперболы.

5) отрезок A_1A_2 – действительная ось гиперболы;
 $A_1A_2 = 2a$

Доказательство:

$$MF_1 - MF_2 = 2a \text{ (свойство точек гиперболы)}$$

$$AF_2 - AF_1 = 2a \text{ (свойство точек гиперболы)}$$

$$AF_1 = A_2F_2 \text{ (из соображений симметрии)}$$

$$AF_2 - A_2F_2 = 2a$$

$$\underline{AA_2 = 2a}$$

6) можно доказать, что $B_1B_2 = 2b$, где B_1B_2 – мнимая ось гиперболы.

ПОСТРОЕНИЕ ТИПЕРБОЛЫ С ПОМОЩЬЮ НАТЯЖУТОЙ НИТИ

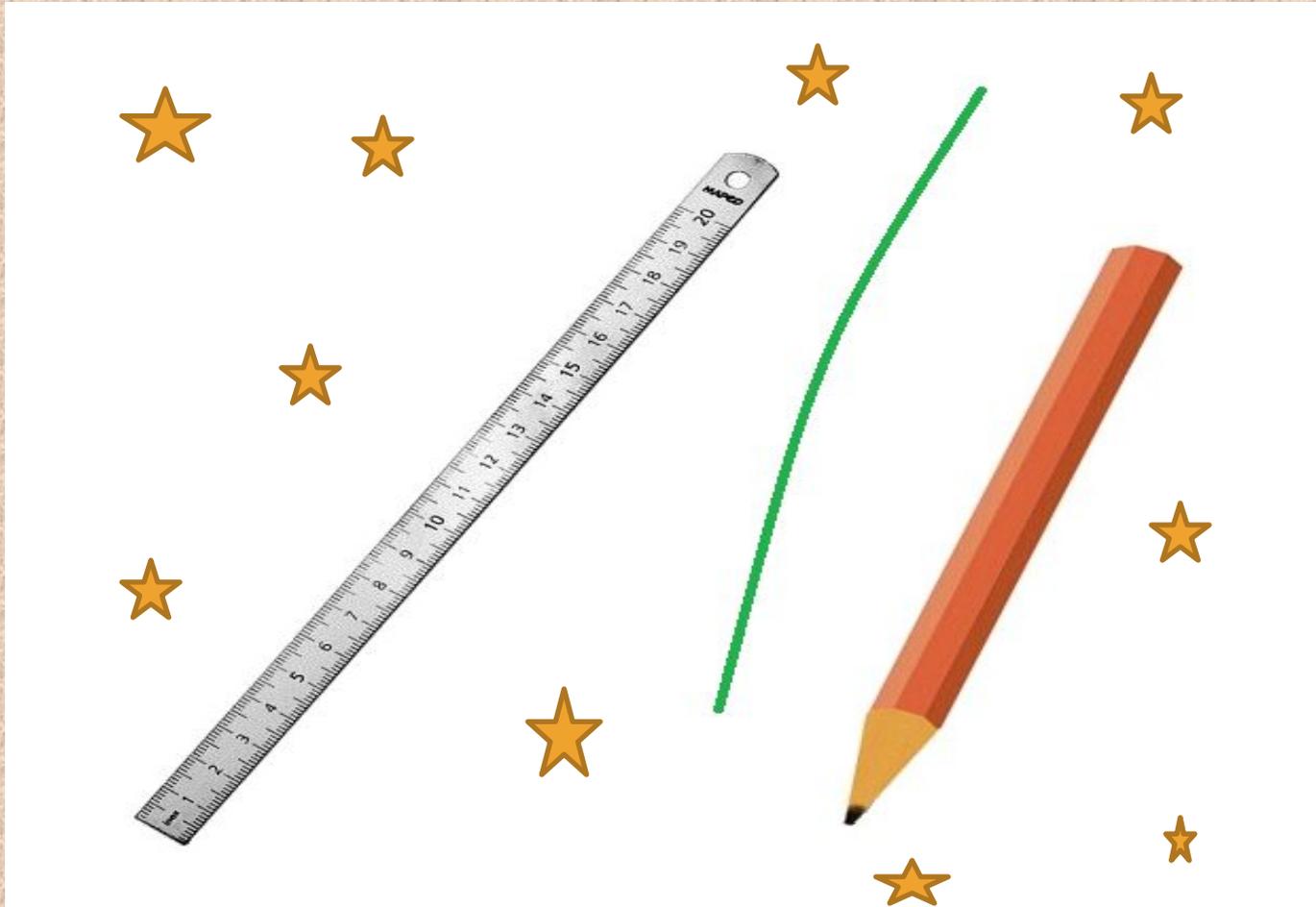
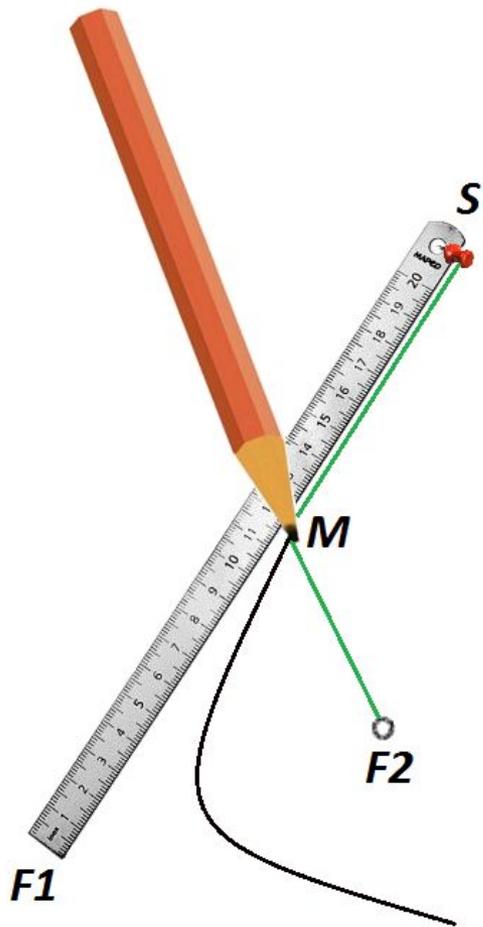


РИСУНОК:



УСЛОВИЯ:

- 1) Нить с концами в точках F_2 и S . Острие карандаша прижимает нить к линейке, натягивая её.
- 2) F_1 и F_2 – заданные фокусы гиперболы.
- 3) Линейка одним концом закреплена в точке F_1 и вращается вокруг неё.
- 4) Остриё карандаша рисует гиперболу.

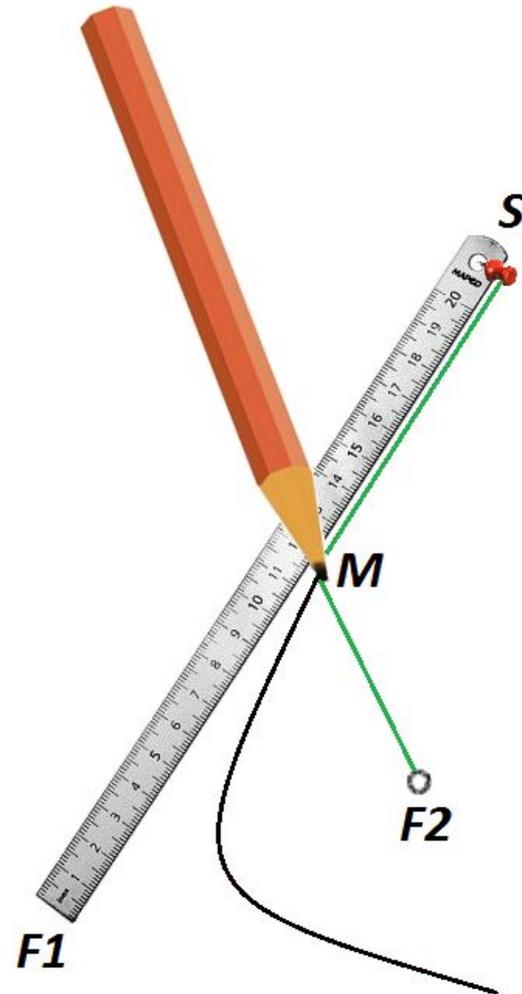
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\begin{aligned} MF_1 - MF_2 &= (MF_1 + MS) - \\ & (MF_2 + MS) = \\ &= F_1S - (MF_2 + MS), \text{ где} \\ & F_1S - \text{длина линейки, } (MF_2 + \\ & + MS) - \text{длина} \end{aligned}$$

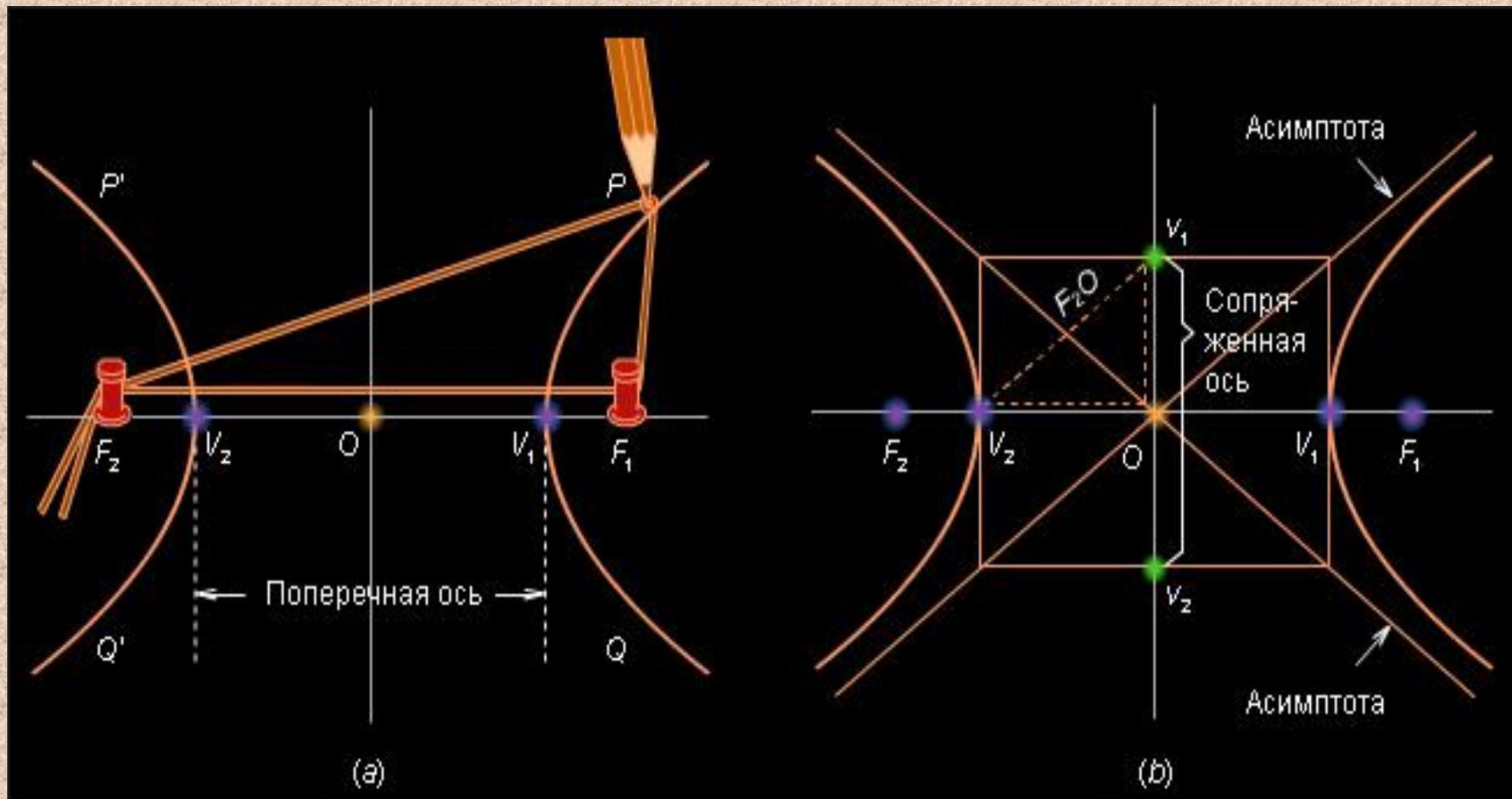
нити (нить должна быть короче линейки).

Величина $F_1S - (MF_2 + MS)$ постоянна, а, значит, и величина $MF_1 - MF_2$ постоянны.

Вывод: Множество точек M есть гипербола (её часть).



ПОСТРОЕНИЕ ТИПЕРБОЛЫ С ПОМОЩЬЮ НАТЯЖУТОЙ НИТИ



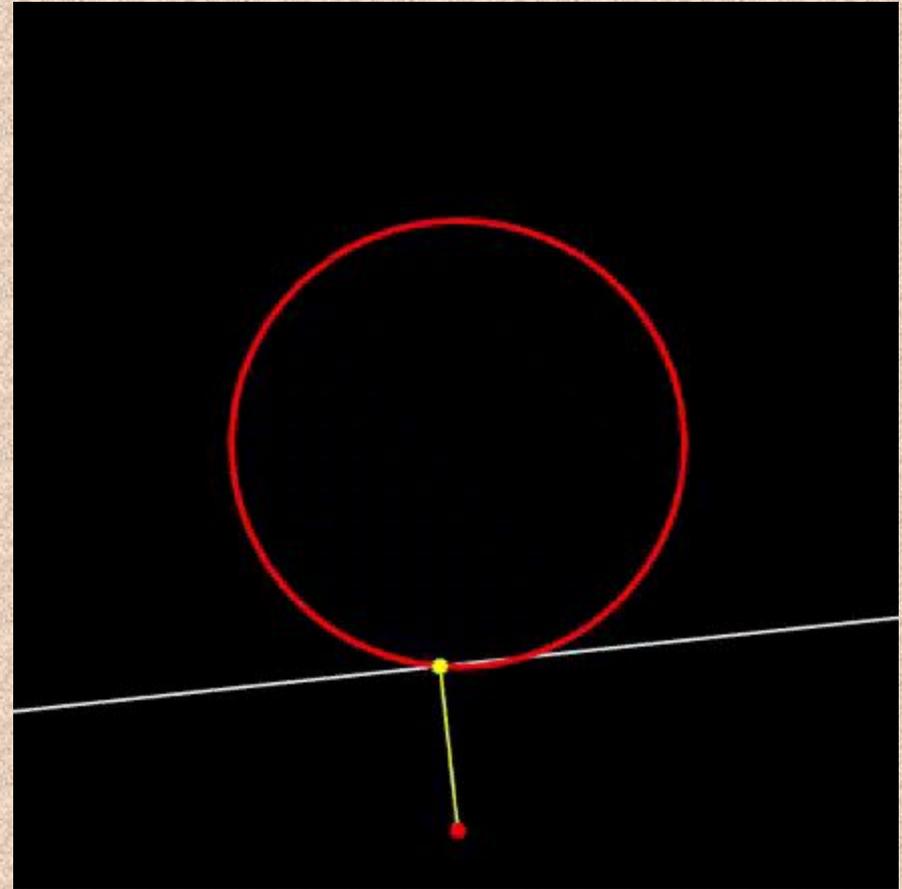
ГИПЕРБОЛА КАК ОГИБАЮЩАЯ СЕМЕЙСТВА ПРЯМЫХ

Гиперболу, как и эллипс, можно построить с помощью метода сгибания листа бумаги, что указывает на взаимосвязь этих кривых.

На листе бумаги чертим окружность с центром в точке O и отмечаем точку A вне окружности.

Множественно сгибаем лист бумаги так, чтобы окружность проходила через точку A .

Гипербола – огибающая касательных (сгибов), а точки O и A – фокусы гиперболы.



ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛЫ

Оптическое свойство:

Оптические лучи, исходящие из одного фокуса гиперболы, отразившись от нее кажутся исходящими из второго фокуса.

Фокальное свойство:

Отрезки, соединяющие точку гиперболы с её фокусами, составляют равные углы с касательной в точке X .

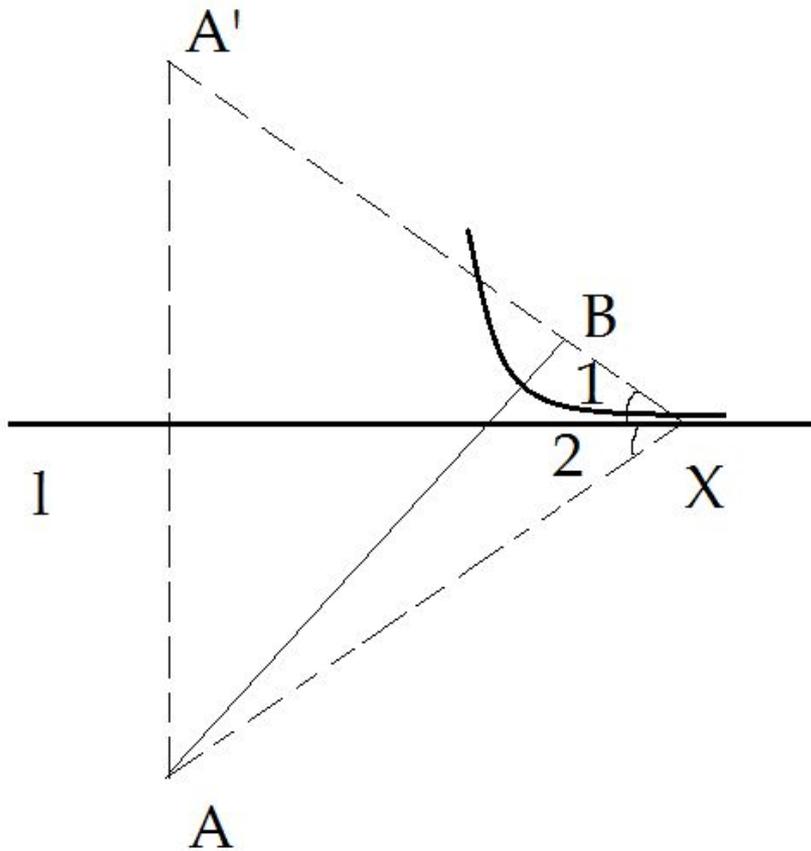
Дано:

Прямая l ,
 A не принадлежит l ,
 B не принадлежит l ,
 A и B – по разные стороны от прямой l .

Найти:

Точку X принадлежащую l ,
где $(AX-BX)$ –
наибольшая.

РЕШЕНИЕ

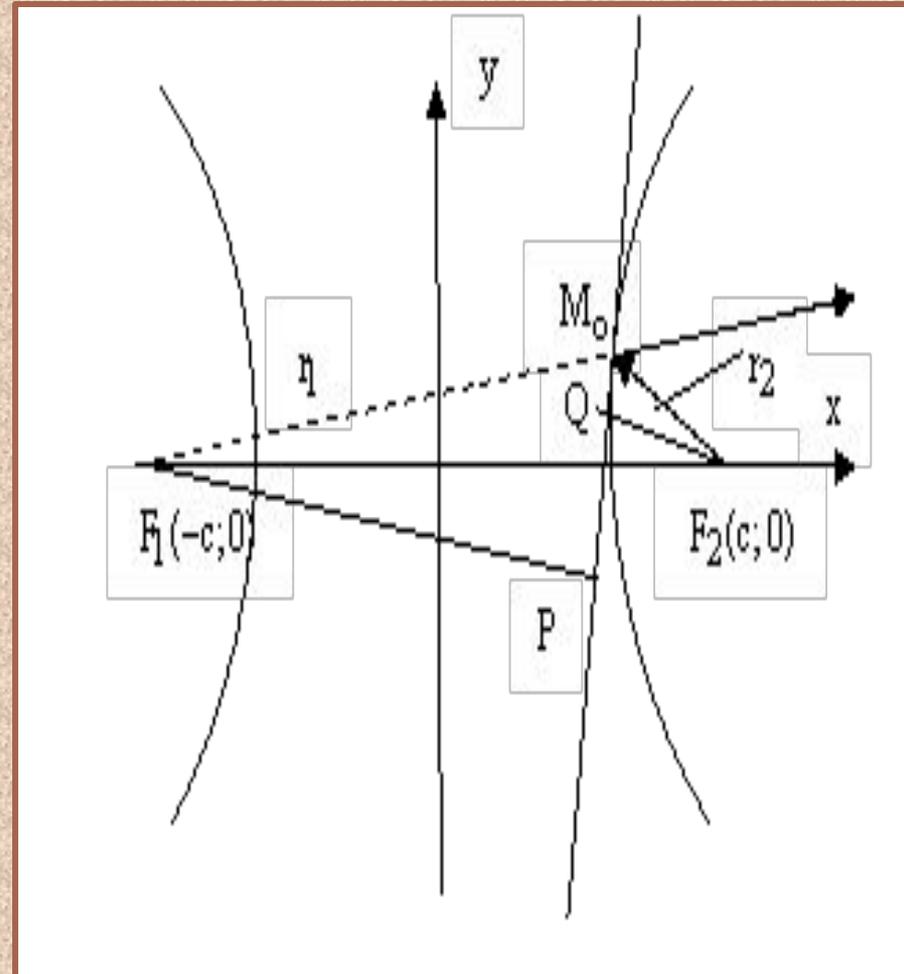


- а) Точка A_1 симметрична точке A относительно l , A_1B пересекает l в точке X ($AX=A_1X$,
 $AX-BX=A_1X-BX=A_1B$ – наибольшая разность).
- б) Углы **1** и **2** равны (по свойству симметрии). Вывод: отрезки AX и BX составляют равные углы с прямой l .
- в) Из предыдущего следует: X есть точка гиперболы с фокусами A и B . Значит, точка X – точка касания прямой l с гиперболой, имеющей фокусы A и B .

ЗЕРКАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ГИПЕРБОЛЫ

Либо: Луч света, выпущенный из фокуса гиперболы, после отражения от зеркала гиперболы, кажется наблюдателю идущим из другого фокуса гиперболы.

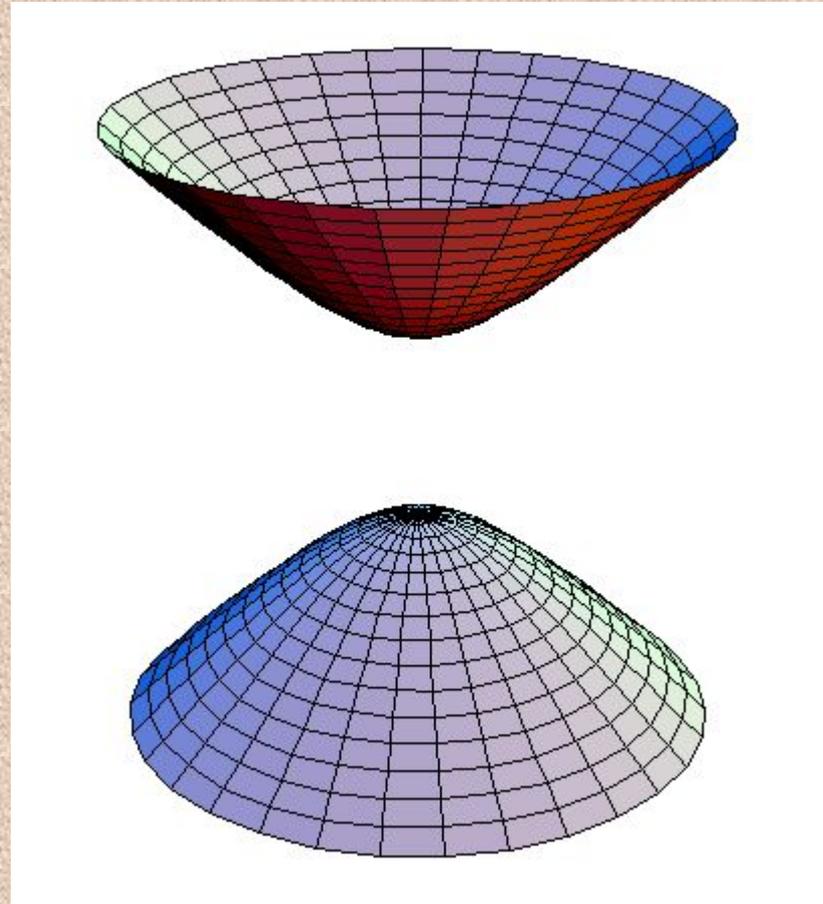
Либо: Свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается второй ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе.



ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ТИПЕРБОЛЫ

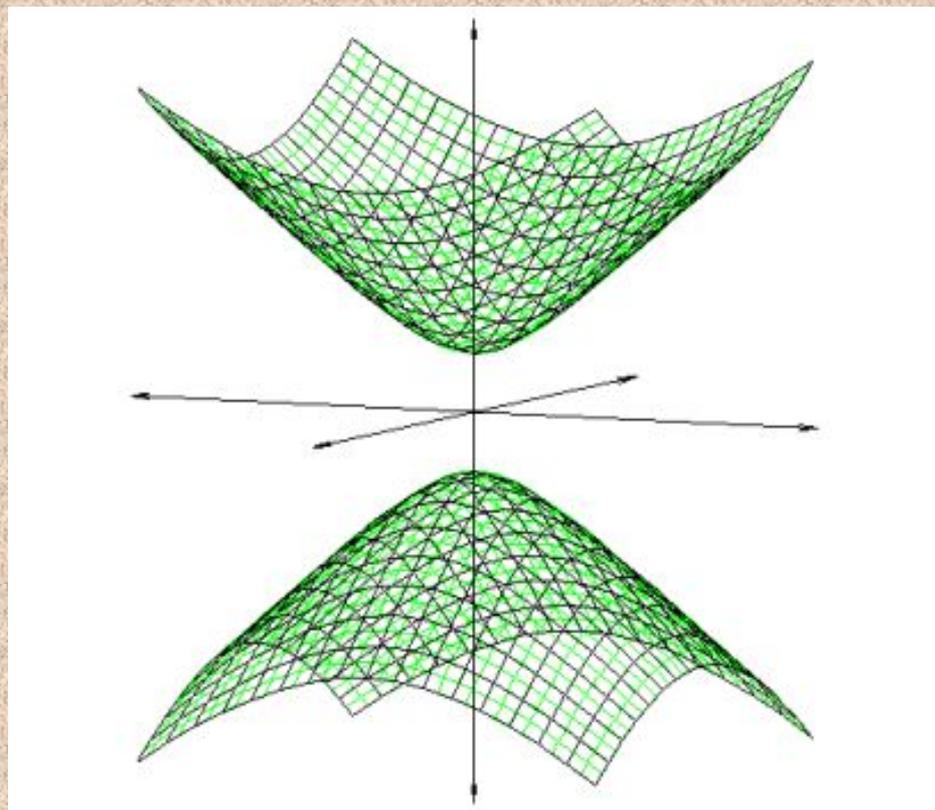
Зеркала, в сечении имеющие форму гипербол, используются в некоторых телескопах – рефлекторах, камерах специального назначения, а также в качестве отражателей карманных фонарей и прожекторов.

Свойство двуполостного гиперболоида вращения отражать лучи, направленные в один из фокусов, в другой фокус, используется в телескопах системы Кассегрена и в антеннах Кассегрена.



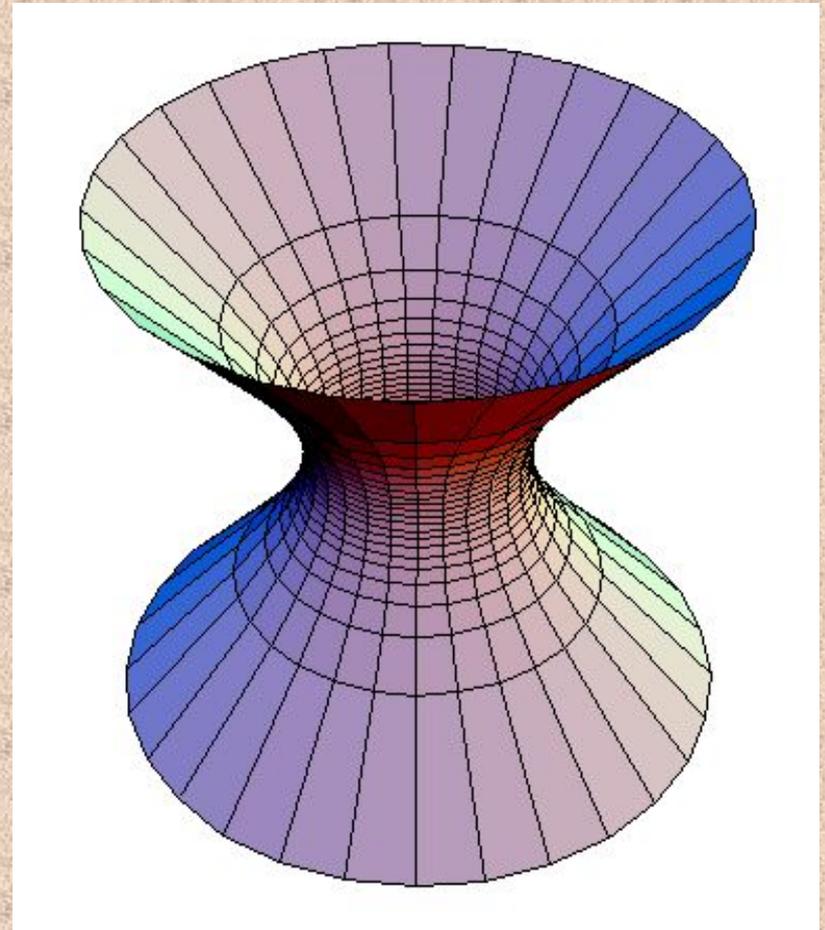
ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ТИПЕРБОЛЫ

Гиперболические зеркала имеют форму **двухполостных гиперболоидов**, полученных при вращении гиперболы вокруг ее действительной оси. Такой же гиперболоид использовался в фильме по роману **А. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина»**.



ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ТИПЕРБОЛЫ

При вращении
гиперболы вокруг
мнимой оси
получается
однополостных
гиперболоид,
который является
линейчатой
поверхностью,
состоящей из двух
различных семейств
прямых



ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ТИТЕРБОЛЫ

Шуховская башня (Шаболовская башня, Радио-башня) —

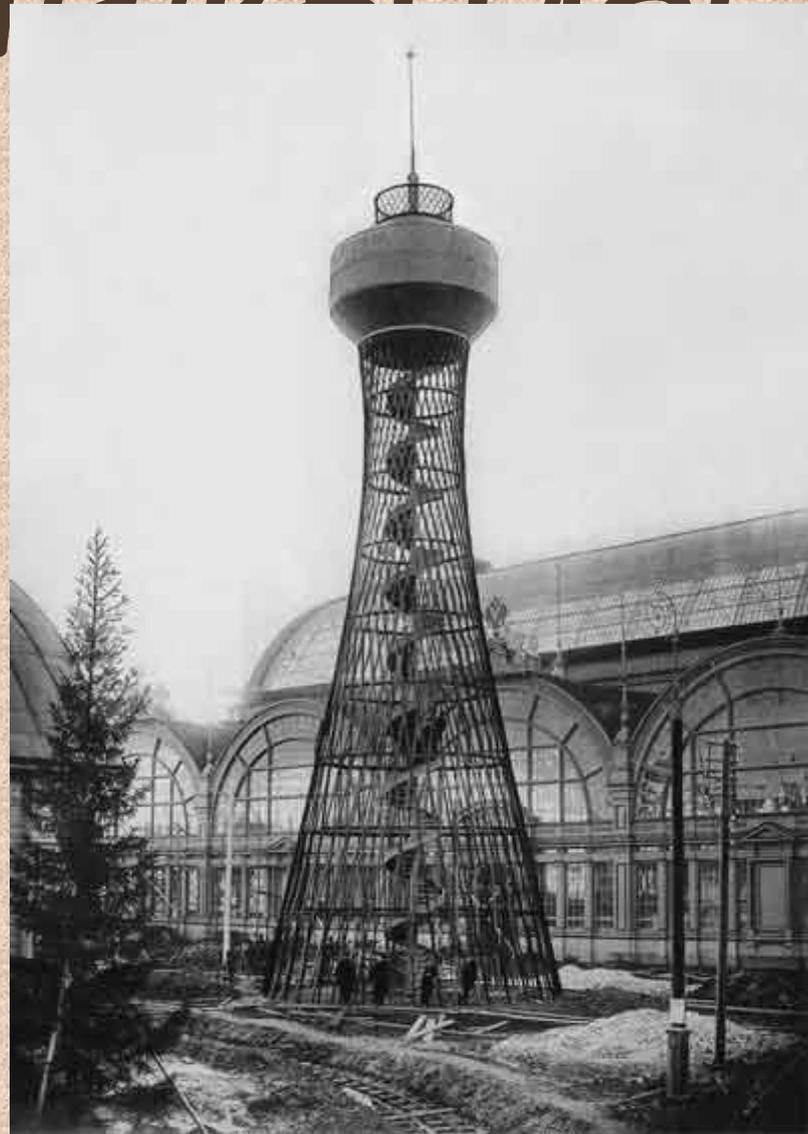
уникальная гиперболоидная конструкция, выполненная в виде несущей стальной сетчатой оболочки. Расположена в Москве на улице Шаболовка. Построена в 1920—1922 годах. Памятник архитектуры. Автор проекта и руководитель строительства радио-башни — великий русский инженер, архитектор, и учёный, академик Владимир Григорьевич Шухов (1853-1939 гг.). Башня получила признание как одно из самых красивых и выдающихся достижений инженерной мысли в мире.



ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ГИПЕРБОЛОИДНОЙ

Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид — дважды **линейчатые поверхности**, то есть через любую точку такой поверхности можно провести две пересекающиеся прямые, которые будут целиком принадлежать поверхности. Вдоль этих прямых и устанавливаются балки, образующие характерную решётку. Такая конструкция является **жёсткой**: если балки соединить шарнирно, **гиперболоидная** конструкция всё равно будет сохранять свою форму под действием внешних сил.

Для высоких сооружений основную опасность несёт ветровая нагрузка, а у решётчатой конструкции она невелика. Эти особенности делают **гиперболоидные** конструкции прочными, несмотря на невысокую материалоемкость.



ГЕОМЕТРИЯ ПОКАЖИТЕСЬ

Гипербола является графиком различных кривых второго порядка. Даже такое простое уравнение, как $ab=c$, где c – константа, порождает график в виде гиперболы. Аналогичное уравнение описывает многие физические законы (например, закон Бойля и закон Ома).

КАК УВИДЕТЬ ГИПЕРБОЛУ?

Предлагаем дома провести

простой эксперимент,
позволяющий
«увидеть» кривую,
описываемую
зависимостью

$$ab=c,$$

который приведён в
книге **Мартин
Гарднера**

«От мозаик Пенроуза к
надёжным шифрам»

в главе 15, посвящённой

Установить две
стеклянные пластины
в сосуд с
подкрашенной водой
так, чтобы с одной
стороны они
совмещались, а с
другой – были
разведены. Вставить
между ними полоску
картона, стянуть их
резинками. Под
действием
капиллярных сил
образуется гипербола.

ГИПЕРБОЛА ОТ СВЕЧ

Гипербола в жизни
встречается
гораздо реже, чем парабола
или эллипс.

Наши предки наблюдали
ветвь гиперболы на стене,
когда подносили к ней
горящую свечу в
подсвечнике с круглым
основанием.



ТИПЕРФОЛА В СВЕТЕ ЛАМПЫ

Изредка мы можем видеть полную гиперболу, если лампа с цилиндрическим или коническим абажуром отбрасывает тень на соседнюю стенку.



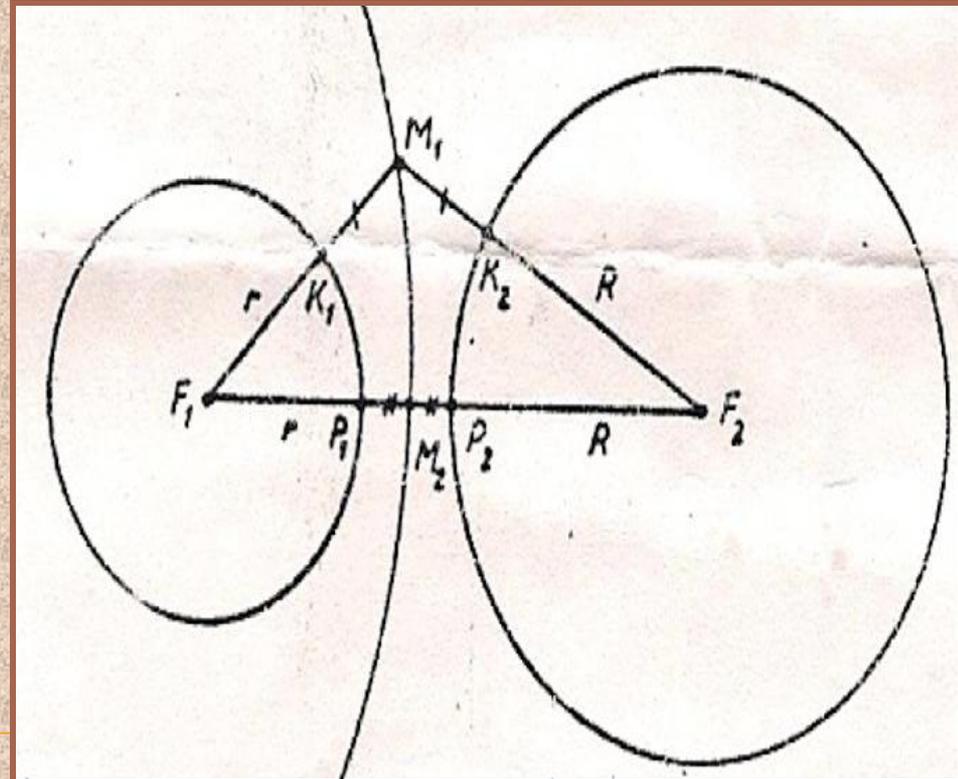
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Дано:

Лодка, плывущая на одинаковом расстоянии от двух круглых островов разного диаметра, движется по гиперболе.

Доказать:

Лодка движется по гиперболе.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$MK_1 = MK_2;$$

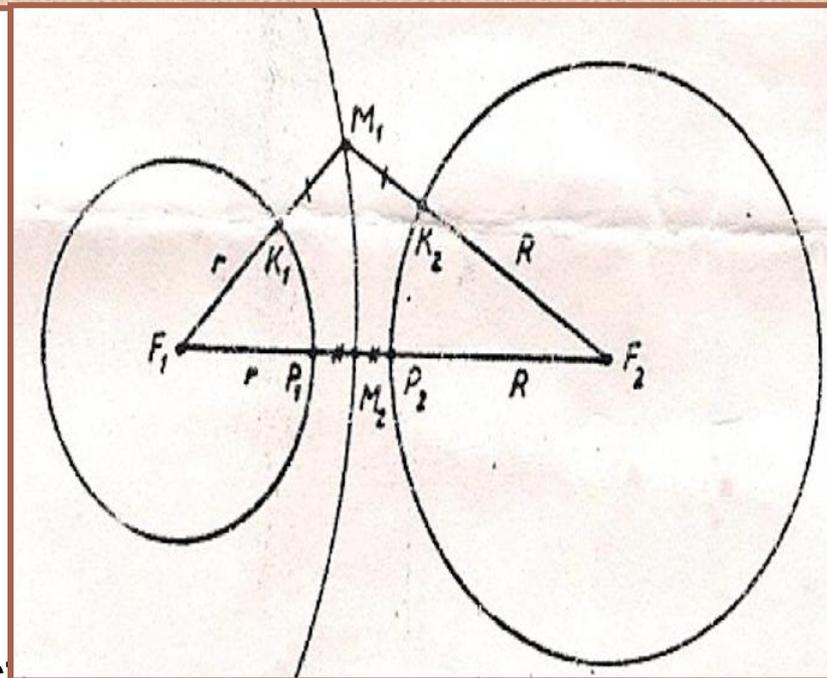
$$M_2P_1 = M_2P_2$$

$$MF_2 - MF_1 = R - r$$

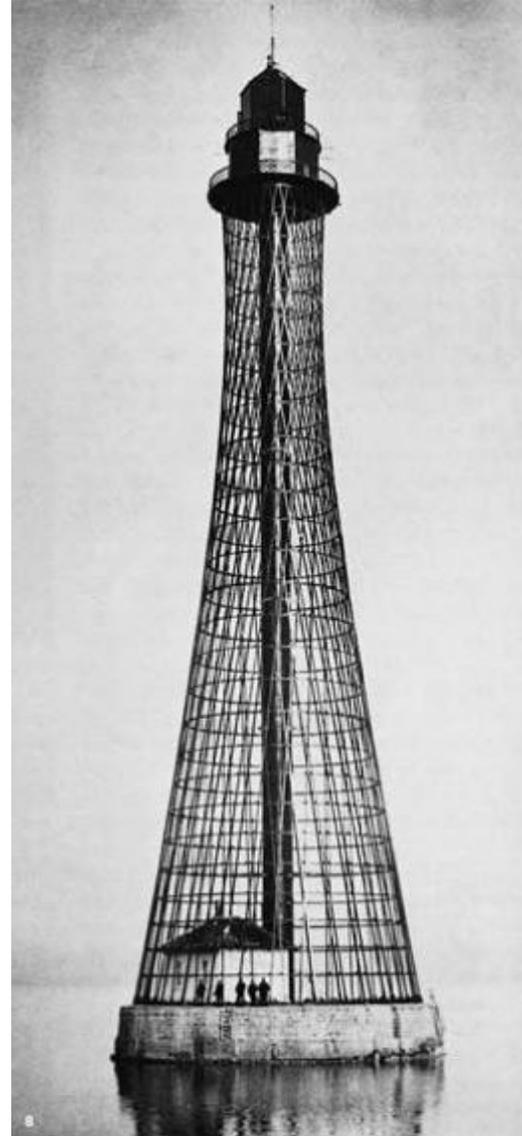
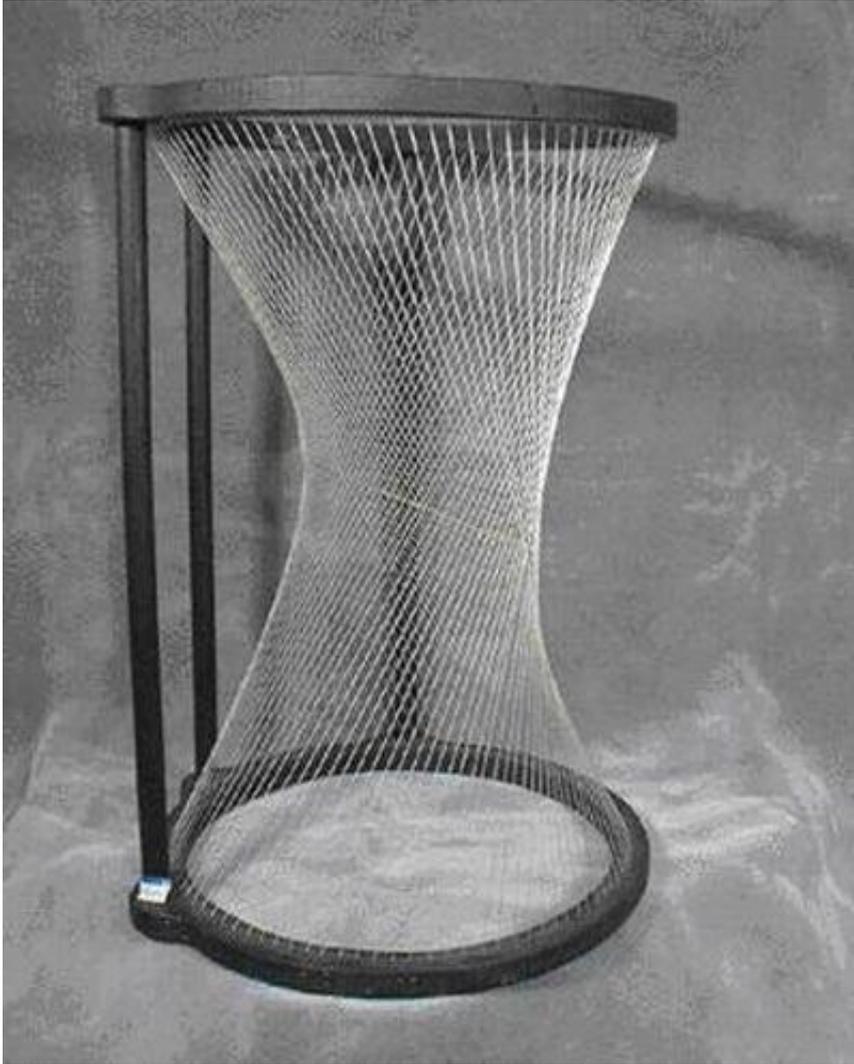
$$M_2F_2 - M_2F_1 = R - r$$

$$(MF_1 - MF_2) = (M_2F_2 - M_2F_1)$$

Вывод: Линия движения есть геометрическое место точек M , разность расстояний от которых до F_1 и F_2 постоянна, значит, линия движения – ветвь гиперболы.



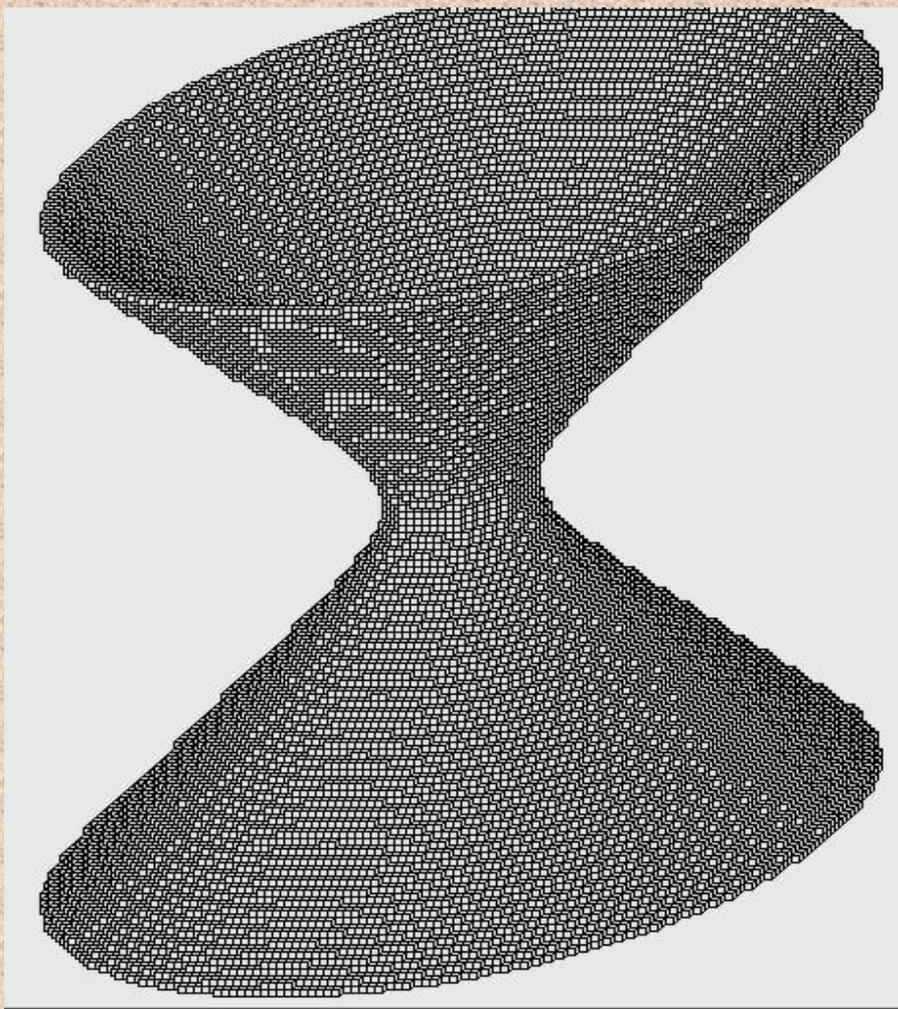
ΓΕΟΜΕΤΡΙΑ ΒΟΚΡΥΤ



Adziogol-Leuchtturm bei Cherson am Schwarzen Meer.
Höhe 68m (Bild 1911)

ΓΕΟΜΕΤΡΙΑ ΒΟΚΡΥΤ





ΚΟΗΛΥ