Лекция 2
Первообразная и неопределённый интеграл

Литература.

В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.
Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть II Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 44, 45, 46.

Лекция 44 . Интегрирование простейших элементарных дробей. Примеры интегрирования рациональных функций.

Лекция 45. Универсальная тригонометрическая подстановка. Некоторые частные приемы нахождения интегралов, содержащих тригонометрические функции.

Лекция 46. Нахождение интегралов от иррациональных выражений. Рационализация функций с помощью тригонометрических подстановок.

Интегрирование простейших рациональных

$$I.\ \frac{A}{x-a},\quad II.\ \frac{A}{(x-a)^n}\ (n=2,3,...),\quad III.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ (D=p^2-4q<0),$$

$$IV.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (D=p^2-4q<0, n=2,3...).$$

Рассмотрим, как находятся интегралы от этих дробей.

Интегралы от простейших дробей первого и второго типов являются табличными интегралами, входящими туда под номерами 1 и 2.

$$I.\ \int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

$$II.\ \int\frac{Adx}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=$$

$$=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$$

$$III.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ (D=p^2-4q<0),$$

$$\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'=ax+\frac{b}{2}=t. \quad (44.1)$$

$$III.\ \int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{array}{ll}\frac{1}{2}(x^2+pq+q)'=t & dx=dt\\ x+\frac{p}{2}=t & x=t-\frac{p}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{(t-\frac{p}{2})^2+p(t-\frac{p}{2})+q}dt=\int\frac{Mt+(N-\frac{Mp}{2})}{t^2+(q-\frac{P^2}{4})}dt.$$

Если ввести обозначение: $q-\dfrac{p^2}{4}=a^2>0$, то

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=M\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Заменяя t и a их выражениями, получим:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.(44.2)$$

$$x^2 + px + 1 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Пример 44.1. *Найти интеграл:* $I = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}\,dx.$

Р е ш е н и е: Половину производной квадратного трёхчлена обозначим через t, т.е. $t = x + 2$, тогда $x = t - 2$ и $dx = dt$. Следовательно,

$$I = \int \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{t-2+1}{(t-2)^2+4(t-2)+8}\,dt = \int \frac{t-1}{t^2+4}\,dt =$$

$$= \int \frac{tdt}{t^2+4} - \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\ln(t^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

Этот же интеграл найдем другим способом.

$$\frac{x+1}{x^2+4x+8} = \frac{1}{2}\frac{2x+4-2}{x^2+4x+8} = \frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+8} - \frac{1}{(x+2)^2+4}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8} - \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \quad (44.3)$$

Вычисление таких интегралов является трудоёмкой операцией. Для вычисления таких интегралов на современном уровне развития компьютерной техники, лучше использовать специализированные программы. Например, Maxima или MathCad. Примеры IV типа без ком

Пример 44.2. *Найти интеграл:* $I_3 = \int \dfrac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Программа математического пакета Maxima состоит из одной команды

```
(%i1) integrate(1/(t^2+1)^3, t);
```

$$(\%o1)\quad \frac{3\,\mathrm{atan}(t)}{8} + \frac{3\,t^3+5\,t}{8\,t^4+16\,t^2+8}$$

Программа математического пакета MathCad

$$\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^3}\,dt \rightarrow \frac{3\cdot\mathrm{atan}(t)}{8} + t\cdot\left[\frac{1}{4\cdot\left(t^2+1\right)^2} + \frac{3}{8\cdot t^2+8}\right]$$

Рассмотрим теперь $\int R(x)\,dx$, где $R(x)$ – рациональная дробь.

В лекции 34 отмечалось, что любая дробь $R(x)$ может быть представлена в виде суммы целой части (многочлена) и правильной дроби $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $m<n$.

Для правильной дроби имеется теорема

Теорема 34.3. *Правильную рациональную дробь* $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, *где* $P_n(x) = (x-a)^k \cdots (x^2+px+q)^l \cdots$, *можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:*

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \cdots \tag{34.7}$$

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}, \cdots,$$

где A_i, B_i, M_i, N_i $(i=1,2,\ldots)$ – *действительные числа.*

В формуле (34.7) первое многоточие в разложении многочлена $P_n(x)$ на множители соответствует другим, кроме a, действительным корням, а второе – комплексным.

Из формулы (34.7) следует, что линейным множителям в разложении знаменателя соответствуют дроби I и II типов, а квадратичным множителям соответствуют простейшие дроби III и IV типов.

При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители.

Следовательно, $\int R(x)\,dx$ всегда может быть сведен к интегралам от многочлена и суммы от простейших дробей.

Пример 44.3. *Найти интеграл* $I = \displaystyle\int \frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}\,dx.$

Р е ш е н и е: Дробь под интегралом правильная. Представим её в виде:

$$\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{E}{x+2}.$$

Приведем в правой части к общему знаменателю и приравняем числители:

$$2x^2+5x-8 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2)^2 + C(x-1)^2(x+2)^2 + D(x-1)^3 + E(x-1)^3(x+2)$$

Коэффициенты A, B, C, D, E найдем пользуясь и методом произвольных значений, и методом неопределённых коэффициентов:

$$2x^2+5x-8=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)^2+C(x-1)^2(x+2)^2+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+2)$$

$$\begin{cases} x=1\Rightarrow -1=9A \;\Rightarrow\; A=-\frac{1}{9}, \\ x=-2\Rightarrow -10=-27D \;\Rightarrow\; D=\frac{10}{27}, \\ x=2\Rightarrow 10=16A+16C+D+4E \;\Rightarrow\; 4B+4C+E=\frac{77}{27}, \\ x^4\Rightarrow C+E=0, \\ \text{св. чл.}\Rightarrow -8=4A-4B+4C-D-2E\Rightarrow 2B-2C+E=\frac{97}{27}. \end{cases}$$

$$A=-\tfrac{1}{9},\; B=\frac{29}{27},\;\; C=-\frac{13}{27},\;\; D=\tfrac{10}{27},\; E=\frac{13}{27}.$$

$$\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}dx=\int\Big(\frac{-1/9}{(x-1)^3}+\frac{29/27}{(x-1)^2}+\frac{-13/27}{x-1}+$$
$$+\frac{10/27}{(x+2)^2}+\frac{13/27}{x+2}\Big)dx=\frac{1}{18}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{29}{27}\frac{1}{x-1}-$$
$$-\frac{13}{27}\ln|x-1|-\frac{10}{27}\frac{1}{x+2}+\frac{13}{27}\ln|x+2|+C=$$
$$=-\frac{26x^2+5x-34}{18(x-1)^2(x+2)}+\frac{13}{27}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Пример 44.4. *Найти интеграл* $I = \int \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1} dx$.

Решение: Неправильную дробь, стоящую под интегралом, представим в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1} = x + 3 + \frac{-6x^2 - 5x + 8}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$

$$x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 1)(x^2 + x - 1).$$

Представим правильную дробь в виде суммы дробей:

$$\frac{-6x^2 - 5x + 8}{(x + 1)(x^2 + x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x - 1}.$$

Приведем в правой части к общему знаменателю и приравняем числители:

$$-6x^2 - 5x + 8 = A(x^2 + x - 1) + (Bx + C)(x + 1) = (A + B)x^2 + (A + B + C)x - A + C$$

$$\begin{cases} x = -1 \implies 7 = -A \implies A = -7, \\ x^2 \Rightarrow -6 = A + B \implies B = 1, \\ \text{свободные члены} \Rightarrow 8 = -A + C \implies C = 1. \end{cases}$$

Интегрирование простейших рациональных

Следовательно, $\dfrac{-6x^2-5x+8}{(x+1)(x^2+x-1)} = \dfrac{-7}{x+1} + \dfrac{x+1}{x^2+x-1}$.

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1+1}{x^2+x-1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}.$$

Теперь окончательно получаем:

$$I = \int\left(x+3-\frac{7}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}\right)dx =$$

$$= \int x\,dx - 3\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x-1)}{x^2+x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - 7\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+x-1| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Поэтому с помощью формул:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}. \qquad (45.2)$$

интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ сводится к интегралу $\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$

Пример 45.1. *Найти интегралы:* $\int \frac{dx}{\sin x}$ *и* $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$

аналогично $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$

Интегрирование тригонометрических функций

Пример 45.2. *Найти интеграл* $I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (45.2)$$

Решение: По формулам (45.2):

$$I = \int \frac{\frac{2}{t^2+1}\,dt}{\frac{4t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = \int \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1}.$$

Сделаем ещё одну подстановку:

$$\frac{1}{2}(2t^2 + 2t + 1)' = 2t + 1 = z \Longrightarrow t = \frac{z-1}{2},\ dt = \frac{dz}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{2(\frac{z-1}{2})^2 + 2(\frac{z-1}{2}) + 1} = \int \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z + C.$$

Возвращаясь от z к t, а затем от t к x, получим:

$$I = \operatorname{arctg}(2t+1) + C = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1) + C.$$

45.2. Нахождение интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$

45.2.1. Хотя бы один из показателей степени – целое нечётное положительное число $2k+1$ ($k \geqslant 0$, $k \in Z$), другой показатель – равен любому числу (даже не целому).

Если $m = 2k+1$, делается подстановка $\sin x = t$, если $n = 2k+1$, то $-\cos x = t$. Если и m, и n – нечётные числа, делается любая из указанных подстановок.

Пример 45.3. *Найти интеграл* $I = \int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$.

Решение:

а) с помощью подстановки:

$$I = |\sin x = t,\ \cos x dx = dt| = \int (1-t^2)t^2 dt = \int (t^2 - t^4)\,dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

б) с помощью подведения функции под знак дифференциала:

$$I = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x) d\sin x =$$

$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Пример 45.4. *Найти интеграл* $I = \int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$.

$\cos x\,dx = d(\sin x)$, $\qquad \cos^4 x = (1-\sin^2 x)^2$.

Тогда:

$$I = \int \frac{1-2\sin^2 x+\sin^4 x}{\sin^{1/3} x} d(\sin x) =$$

$$= \int (\sin x)^{-1/3}\, d(\sin x) - 2\int (\sin x)^{5/3}\, d(\sin x) +$$

$$+ \int (\sin x)^{11/3}\, d(\sin x) = \frac{3}{2}(\sin x)^{2/3} - \frac{3}{4}(\sin x)^{8/3} +$$

$$+ \frac{3}{14}(\sin x)^{14/3} + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

45.2.2. Оба показателя степени – чётные положительные числа (один из них может равняться 0). В этом случае пользуются тригонометрическими формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \qquad (45.3)$$

Пример 45.5. *Найти интеграл* $I = \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

Р е ш е н и е:

$$I = \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx.$$

Первый интеграл относится к пункту 45.2.2, второй к пункту 45.2.1.

$$I = \frac{1}{8} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

Пример 45.6. *Найти интеграл:* $I = \int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x}$.

Решение: $$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sin x \cos x} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x} d\operatorname{tg} x =$$
$$= \int \operatorname{tg} x \, d\operatorname{tg} x + \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Пример 45.7. $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\operatorname{tg} x \qquad \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\right)^3} = \left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}\right)^3.$$

Поэтому: $$I = \int \left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}\right)^3 d\operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \int \frac{1 + 3\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^6 x}{\operatorname{tg}^3 x} d\operatorname{tg} x =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left(\operatorname{tg}^{-3} x + \frac{3}{3\operatorname{tg} x} + 3\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x\right) d\operatorname{tg} x =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$, полезна подстановка $\cos x = t$.

Если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, полезна подстановка $\sin x = t$.

Если $R(\sin x, \cos x)$ не меняется при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$, и $\cos x$ на $-\cos x$,, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 45.8. *Найти интеграл:* $I = \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$.

Р е ш е н и е: Так как синус и косинус находятся в чётных степенях, то подынтегральная функция не изменится при изменениях знака у этих функций. $\operatorname{tg} x = t \implies x = \operatorname{arctg} t \implies dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$\operatorname{tg} x = t, \text{ то } \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{a^2}{1+t^2} + \frac{b^2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{a^2 + b^2t^2} = \frac{1}{b}\int \frac{bdt}{a^2 + (bt)^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a} + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + C$$

Пример 45.9. *Найти интеграл:* $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$.

Решение: При замене $\sin x$ на $-\sin x$ подынтегральная функция меняет знак, поэтому применяем подстановку

$$\cos x = t \implies \sin x = \sqrt{1-t^2} \implies x = \arccos t \implies dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Интеграл примет вид: $$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{(1-t^2)^3}t^2} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2 t^2}.$$

Это – интеграл от рациональной дроби. Раскладывая дробь $\frac{1}{(1-t^2)^2 t^2}$ на простейшие, после тождественных преобразований, окончательно получим

$$I = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

45.3. Нахождение интегралов вида $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$

Можно рекомендовать два способа:

а) С использованием формулы: $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ (45.4)

б) С помощью подстановки: $\operatorname{tg} x = t$, откуда $x = \operatorname{arctg} t$ и $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Пример 45.10. *Найти интеграл:* $I = \int \operatorname{tg}^4 2x\,dx$

Решение: Обозначим: $\operatorname{tg} 2x = t$, тогда $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$ и $dx = \frac{1}{2}\frac{dt}{1+t^2}$.

Поэтому: $$I = \frac{1}{2}\int \frac{t^4\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{6} - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{tg} 2x + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{6} - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + x + C.$$

Аналогично находятся интегралы вида $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx$.

45.4. Нахождение интегралов вида $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$

В этом случае с помощью подстановки $\operatorname{tg} x = t$ получаем интеграл от рациональной функции аргумента t.

Пример 45.11. *Вычислить интеграл* $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x + 3}{\operatorname{tg} x - 1}\,dx.$

$$t = \operatorname{tg} x \implies x = \operatorname{arctg} t \implies dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad I = \int \frac{t+3}{(t-1)(t^2+1)}\,dt.$$

Разлагаем дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{t+3}{(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Приводим в правой части тождества к общему знаменателю и приравниваем числители: $t + 3 = A(t^2+1) + (Bt+C)(t-1)$.

Подставив в последнее соотношение $t = 1$, найдем $A = 2$. Приравняв коэффициенты при t^2, а затем свободные члены, найдем $B = -2$ и $C = -1$.

$$I = \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+1}{t^2+1}\right) dt = 2\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= 2\ln|t-1| - \ln(t^2+1) - \operatorname{arctg} t + C.$$

Сделав обратную подстановку, и учитывая, что $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ и $\operatorname{arctg}\operatorname{tg} t = t$,

получим $I = 2\ln|\operatorname{tg} x - 1| + \ln|\cos x| - x + C.$

Интегрирования иррациональных функций

46.1. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b})\,dx$

Замена $$ax+b=t^n,\ \text{тогда}\ x=\frac{t^n-b}{a},\ dx=\frac{nt^{n-1}}{a}dt,\ \sqrt[n]{ax+b}=t. \qquad (46.1)$$

Пример 46.1. *Найти интеграл:* $I=\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}\,dx.$

Решение: Положим: $x+1=t^2$, тогда $x=t^2-1$ и $dx=2t\,dt$.

Поэтому: $$I=\int\frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2-t-1}=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2-t-1}=2\int\left(1+\frac{t+1}{t^2-t+1}\right)dt.$$

Замена $$\frac{1}{2}(t^2-t-1)'=z,\ \text{откуда}\ t=z+\frac{1}{2}\ \text{и}\ dt=dz.$$

$$I=2t+2\int\frac{z+\frac{3}{2}}{z^2-\frac{5}{4}}dz=2t+\int\frac{d(z^2-\frac{5}{4})}{z^2-\frac{5}{4}}+3\int\frac{dz}{z^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=t+\ln\left|z^2-\frac{5}{4}\right|+\frac{3}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\frac{\sqrt{5}}{2}}{z+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=t+\ln|t^2-t-1|+\frac{3}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x+1}+\ln|x-\sqrt{x+1}|+\frac{3}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\sqrt{x+1}-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{x+1}-1+\sqrt{5}}\right|+C.$$

46.2. Интегралы вида $\int R\left(x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

Замена $\quad \dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n. \quad (46.2)$

Пример 46.2. *Вычислить интеграл:* $I = \int x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}\,dx$

Замена $\dfrac{x-1}{x+2} = t^2$, тогда $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}} = t$, $x = \dfrac{1+2t^2}{1-t^2}$ и $dx = \dfrac{6t}{(1-t^2)^2}\,dt$.

Поэтому $\quad I = \int \dfrac{1+2t^2}{1-t^2} t \dfrac{6t}{(1-t^2)^2}\,dt = -6\int \dfrac{2t^4+t^2 dt}{(t^2-1)^3}.$

Раскладываем подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{2t^4+t^2}{(t^2-1)^3)} = \frac{2t^4+t^2}{(t-1)^3)(t+1)^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t-1)^3} + \frac{D}{t+1} + \frac{E}{(t+1)^2} + \frac{F}{(t+1)^3}.$$

Приведя выражение справа к общему знаменателю, получим:

$$\frac{2t^4+t^2}{(t-1)^3)(t+1)^3} = \Big(A(t-1)^2(t+1)^3 + B(t-1)(t+1)^3 + C(t+1)^3 +$$
$$+ D(t-1)^3(t+1)^2 + E(t-1)^3(t+1) + F(t-1)^3\Big)/((t-1)^3(t+1)^3).$$

Откуда, приравняв числители, имеем:

при $t=1: \quad 3 = 8C \Rightarrow C = 3/8,$

при $t=-1: 3 = -8F \Rightarrow F = -3/8.$

Преобразовав для дальнейшего использования выражение с неизвестными коэффициентами, запишем равенство:

$$2t^4+t^2=A(t^2-1)(t+1)+B(t^2-1)(t+1)^2+C(t+1)^3+$$
$$+D(t^2-1)^2(t-1)+E(t^2-1)(t-1)^2+F(t-1)^3=$$
$$=A(t^4-2t^2+1)(t+1)+B(t^2-1)(t^2+2t+1)+C(t^3+3t^2+3t+1)+$$
$$+D(t^4-2t^2+1)(t-1)+E(t^2-1)(t^2-2t+1)+F(t^3-3t^2+3t-1).$$

Или, окончательно:

$$2t^4+t^2=A(t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1)+B(t^4+2t^3-2t-1)+$$
$$+C(t^3+3t^2+3t+1)+D(t^5-t^4-2t^3+2t^2-t-1)+$$
$$+E(t^4-2t^3+2t-1)+F(t^3-3t^2+3t-1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в многочленах справа и слева, получаем:

$$\begin{cases} t^5: \ A+D=0, \\ t^4: \ A+B-D+E=2, \\ t^3: \ -2A+2B+C-2D-2E+F=0, \\ t: \ A-B+C-D-E-F=0. \end{cases}$$

Подставляя в эту систему найденные значения $C = \frac{3}{8}$ и $F = -\frac{3}{8}$, получим систему:
$$\begin{cases} A + D = 0, \\ A + B - D + E = 2, \\ -A + B - D - E = 0, \\ A - B - D - E = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$
Решив которую, имеем: $A = \frac{5}{16}$; $B = \frac{11}{16}$; $D = -\frac{5}{16}$; $E = \frac{11}{16}$ и, следовательно
$$I = -6\int \frac{2t^4 + t^2}{(t^2-1)^3}\,dt = -\frac{15}{8}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{33}{8}\int \frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{9}{4}\int \frac{dt}{(t-1)^3} +$$
$$+ \frac{15}{8}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{33}{8}\int \frac{dt}{(t+1)^2} + \frac{9}{4}\int \frac{dt}{(t+1)^3} = \frac{15}{8}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| +$$
$$+ \frac{33}{8}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) + \frac{9}{8}\left(\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{(t+1)^2}\right) + C.$$

После некоторых алгебраических преобразований и возвращению к первоначальной переменной x получим:
$$I = \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\,dx = \frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}\right| - \frac{11}{4}(x+2) +$$
$$+ \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{(x-1)(x+2)} + C.$$

Пример 46.1. *Найти интеграл* $I = \int \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt{x-2}}\,dx.$

Из практических занятий

$$I = |x - 2 = t^6,\ \ dx = 6t^5\,dt| = \int \frac{t^2}{t^4 - t^3} 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^4}{t-1}\,dt =$$

$$= 6\int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = 6\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{4} + \frac{\sqrt{x-2}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x-2}}{2} + \sqrt[6]{x-2} + \ln|\sqrt[6]{x-2} - 1|\right) + C.$$

46.3. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx$

После подстановки $\frac{1}{2}(Ax^2 + Bx + C)' = t$ такие интегралы сводятся к интегралам, содержащим корни вида:

$$\sqrt{a^2 - t^2}, \ \sqrt{t^2 - a^2}, \ \sqrt{a^2 + t^2}. \tag{46.4}$$

Если интеграл не является табличным, то интегралы, содержащие корни вида (46.4), рационализируются подстановками:

$$\sqrt{a^2 - t^2} \implies t = a \sin z \text{ или } t = a \cos z,$$

$$\sqrt{t^2 - a^2} \implies t = \frac{a}{\sin z} \text{ или } t = \frac{a}{\cos z},$$

$$\sqrt{a^2 + t^2} \implies t = a \operatorname{tg} z \text{ или } t = a \operatorname{ctg} z.$$

Пример 46.4. *Вычислить интеграл:* $I = \int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}\,dx$

Р е ш е н и е: После подстановки: $\frac{1}{2}(x^2+2x-3)' = t$ или $x+1=t,\ x=t-1,\ dx=dt$

интеграл запишется в виде: $I = \int \frac{\sqrt{(t-1)^2+2(t-1)-3}}{t^3}\,dt = \int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}\,dt.$

Далее положим $t = \frac{2}{\cos z}$, тогда $\sqrt{t^2-4} = 2\,\mathrm{tg}\, z,\ dt = \frac{2\sin z}{\cos^2 z}\,dz.$

Таким образом: $I = \int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}\,dt = \int \frac{2\,\mathrm{tg}\, z}{(\frac{2}{\cos z})^3}\frac{2\sin z}{\cos^2 z}\,dz = \frac{1}{2}\int \sin^2 z\,dz =$

$$= \frac{1}{4}\int(1-\cos 2z)dz = \frac{1}{4}\left(z - \frac{\sin 2z}{2}\right) + C = \frac{1}{4}(z - \sin z\cos z) + C.$$

Так как $t = \frac{2}{\cos z}$, то $\cos z = \frac{2}{t}$, $z = \arccos\frac{2}{t}$, $\sin z = \sqrt{1-\cos^2 z} = \frac{\sqrt{t^2-4}}{t}.$

Поэтому $I = \frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{t} - \frac{2\sqrt{t^2-4}}{t^2}\right) + C = \frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{x+1} - \frac{2\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2}\right) + C.$

Из практического занятия

Пример 46.5. *Найти интеграл* $I = \int \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2+8x+1}}\,dx.$

Р е ш е н и е:

$$I = \left| \frac{1}{2}(5x^2+8x+1)' = t,\ 5x+4=t,\ x=\frac{t-4}{5},\ \ dx=\frac{dt}{5} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{3}{5}(t-4)-7}{5\sqrt{5\left(\frac{t-4}{5}\right)^2+\frac{8}{5}(t-4)+1}}\,dt = \frac{3}{10\sqrt{5}} \int \frac{d(t^2-11)}{\sqrt{t^2-11}} - \frac{47}{5\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-11}} =$$

$$= \frac{3}{5\sqrt{5}}\sqrt{t^2-11} - \frac{47}{5\sqrt{5}} \ln\left|t+\sqrt{t^2-11}\right| + C =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1} - \frac{47}{5\sqrt{5}} \ln\left|5x+4+\sqrt{5(5x^2+8x+1)}\right| + C.$$

46.4. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-m)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $x > m$

Замена
$$x - m = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2}. \qquad (46.5)$$

Из практического занятия

Пример 46.6. *Найти интеграл* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$.

Р е ш е н и е:

$$I = \left| x = \frac{1}{t},\ \ dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = \int \frac{-dt/t^2}{\sqrt{3t^2+1}/t^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{3t^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}t)}{\sqrt{(\sqrt{3}t)^2+1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\sqrt{3}t + \sqrt{3t^2+1}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left| \frac{\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} \right| + C.$$

Из практического занятия

Пример 46.7. *Найти интеграл* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$.

Решение:

$$I = \left| x = \frac{1}{t},\ \ dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = \int \frac{-\,dt/t^2}{\sqrt{7t^2-1}/t^3} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{7t^2-1}} =$$

$$= -\frac{1}{14}\int \frac{d(7t^2-1)}{\sqrt{7t^2-1}} = -\frac{1}{14}2\sqrt{7t^2-1} + C = -\frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{x^2}-1} + C.$$

Спасибо за внимание