# РАСПРЕДЕ-ЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

472. Два сосуда с объемами $V_1$ и $V_2$ соединены трубкой с краном. В каждом из них при закрытом кране находится по одному молю одного и того же газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса. До открытия крана температура газа в обоих сосудах была одинакова и равна $T$. Нагреется или охладится газ, если открыть кран? На сколько при этом изменится температура газа? Определить давление газа после открытия крана. Стенки сосуда и соединяющей их трубки считать адиабатическими, а теплоемкость $C_V$ — не зависящей от температуры.

$T$, $C_v$

$V_1$, $V_2$

$\nu_1 = \nu_2 = 1$

---

$T'$, $p'$

$T$, $C_V$

$V_1$, $V_2$

$\nu_1 = \nu_2 = 1$

---

$T'$, $p'$

$$U_0 = \left(\nu_1 C_V T - \frac{a\nu_1^2}{V_1}\right) + \left(\nu_2 C_V T - \frac{a\nu_2^2}{V_1}\right),$$

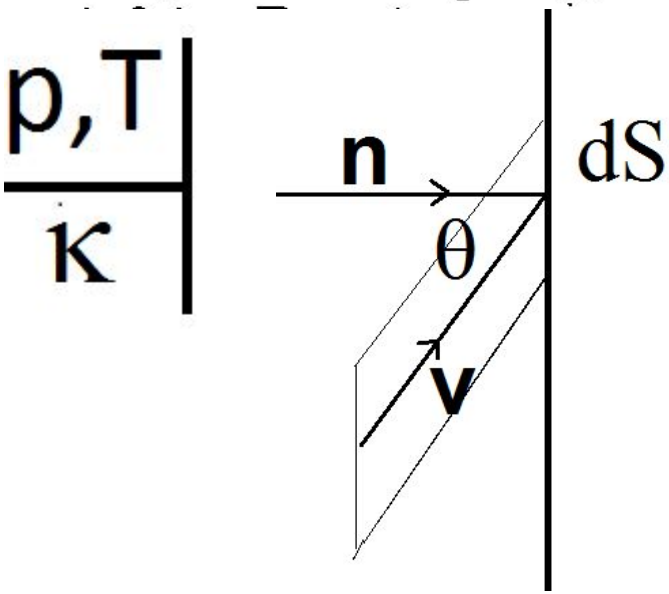
$$U = (\nu_1 + \nu_2) C_V T' - \frac{a(\nu_1 + \nu_2)^2}{V_1 + V_2} = U_0$$

$$T' = T - \frac{a}{2C_V(\nu_1 + \nu_2)} \left( \frac{(\nu_1 + \nu_2)^2}{V_1 + V_2} - \frac{\nu_1^2}{V_1} - \frac{\nu_2^2}{V_2} \right) \Bigg|_{\nu_1 = \nu_2 = 1}$$

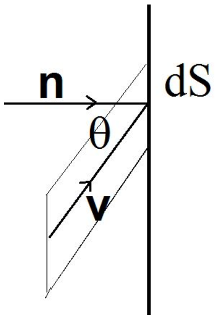
$$= T - \frac{a}{2C_V} \left( \frac{4}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = T - \frac{a}{2C_V} \frac{4V_1V_2 - (V_1 + V_2)^2}{V_1V_2(V_1 + V_2)}$$

$$= T - \frac{a}{2C_V} \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_1V_2(V_1 + V_2)}, \quad p' = \frac{2RT'}{V_1 + V_2 - 2b}$$

2.66. Сколько молекул $\nu$ ударяется за 1 с об 1 $м^2$ стенки сосуда, в котором находится азот ($N_2$) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?



2.66. Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот ($N_2$) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?

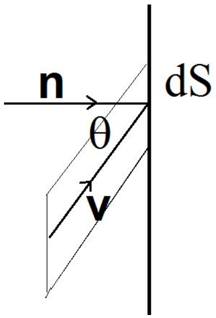



$$\kappa = \frac{1}{dtdS}\int dv \frac{d\Omega(\theta)}{2\pi} n_v dV$$

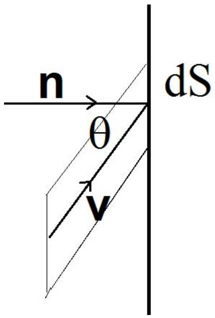
$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta = 2\pi d\left(\cos\theta\right), \quad dV = dSvdt\cos\theta$$

$$\kappa = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\cos\theta \int_0^{+\infty} vn_v dv = \frac{n\langle v\rangle}{4}, \quad \langle v\rangle = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} vn_v dv$$

**2.66.** Сколько молекул $\nu$ ударяется за 1 с об 1 $м^2$ стенки сосуда, в котором находится азот ($N_2$) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?



**2.66.** Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот ($N_2$) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °C?

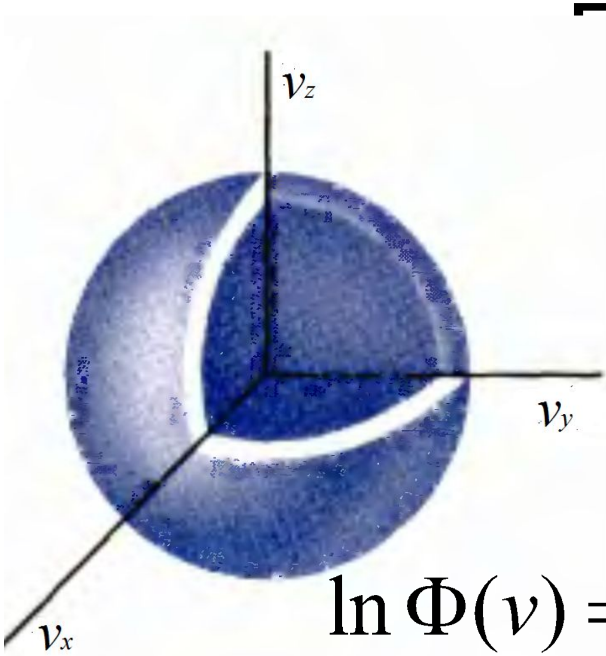



$$\kappa = \frac{1}{dtdS}\int dv \frac{d\Omega}{2\pi} n_v dV = \frac{1}{2\pi dtdS}\int dv \frac{d\Omega}{2\pi} n_v dV$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta = 2\pi d\left(\cos\theta\right), \quad dV = dS v dt \cos\theta$$

$$\kappa = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\cos\theta \int_0^{+\infty} v n_v dv = \frac{n\langle v\rangle}{4}, \quad \langle v\rangle = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} v n_v dv$$

# Следствия изотропности пространства




$$f(\mathbf{v}) = \varphi_x(v_x)\varphi_y(v_y)\varphi_z(v_z)$$

$$f(\mathbf{v}) = \Phi(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\ln\Phi(v) = \ln\varphi(v_x) + \ln\varphi(v_y) + \ln\varphi(v_z) \quad \Big| \frac{\partial}{\partial v_x}$$

$$\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}\frac{\partial v}{\partial v_x} \equiv \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}\frac{v_x}{v} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}$$

# Распределение по одной проекции

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}\frac{1}{v_x}=\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}\frac{1}{v}=-\alpha$$

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}=-\alpha v_x \Rightarrow \varphi(v)=A\exp\left(-\alpha v^2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} A\exp\left(-\alpha v^2\right)dx=1\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{mv^2}{2}A\exp\left(-\alpha v^2\right)dx=\frac{kT}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\sqrt{\dfrac{m}{2\pi kT}}\\ \alpha=\dfrac{m}{2kT}\end{array}\right.$$

# Подробности взятия интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\exp\left(-\alpha v^2\right)dx = A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \exp\left(-\alpha v^2\right)dv =$$

$$-\frac{1}{2\alpha}\left(v^2 \exp\left(-\alpha v^2\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha v^2\right)dv\right) = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{4\alpha}A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{kT}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{m}{2kT}, \quad A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$$

# Распределение Максвелла

$$f(\mathbf{v}) = \Phi(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right) \times \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$F(v) = 4\pi v^2 \Phi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

# О нормировке и размерностях

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)dv = 1, \quad [\varphi(v)] = \left[\frac{1}{v}\right].$$

$$\int f(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z = 1,$$

$$[f(\mathbf{v})] = [\Phi(v)] = \left[\frac{1}{v^3}\right].$$

$$\int_{0}^{+\infty} F(v)dv = 1, \quad [F(v)] = \left[\frac{1}{v}\right].$$

# Характерные скорости

$$v_в: \quad F'(v_в) = 0 \Rightarrow v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 F(v)dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

# Безразмерный вид

$$F(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv =$$

$$= \frac{4\pi v^2}{\pi^{3/2} v_в^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_в^2}\right)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2)du,$$

$$u = v\sqrt{\frac{m}{2kT}} = \frac{v}{v_в}$$

$$\varphi(v)dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u^2\right)du$$

● **2.88.** Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул газа обладает скоростями, отличными от наиболее вероятной не более чем на 1 %?

● 2.88. Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул газа обладает скоростями, отличными от наиболее вероятной не более чем на 1 %?

$$\alpha = \int_{0,99v_в}^{1,01v_в} F(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{0,99}^{1,01} u^2 \exp(-u^2)du$$

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} 0,02u^2 \exp(-u^2)\Big|_{u=1} = \frac{0,08}{\sqrt{\pi e}}$$

Найти среднее значение модуля скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре *T*. *Масса молекулы равна m*.

Найти среднее значение модуля скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре *T. Масса молекулы равна m.*

$$\int_0^{\infty} vF(v)dv = \frac{4v_в}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} u^3 \exp(-u^2)du = \frac{2v_в}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2)\Big|_0^{+\infty} +$$

$$da = u\exp(-u^2)du, \quad a = -\frac{\exp(-u^2)}{2} \qquad \left( v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \right)$$

$$b = u^2, \qquad db = 2udu$$

$$+\frac{4v_в}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} u\exp(-u^2)du = \frac{2v_в}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре *T. Масса молекулы равна m.*

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} F(v) v^2 dv}$$

Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре *T. Масса молекулы равна m.*

$$v_{кв} = \sqrt{\left\langle v^2 \right\rangle} = \sqrt{\int\limits_0^{+\infty} F(v) v^2 dv}$$

$$\frac{m v_{кв}^2}{2} = \frac{i_{пост}}{2} kT = \frac{3}{2} kT \quad \Rightarrow \quad v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

**2.85.** Найти среднее значение модуля $x$-вой компоненты скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре $T$. Масса молекулы равна $m$.

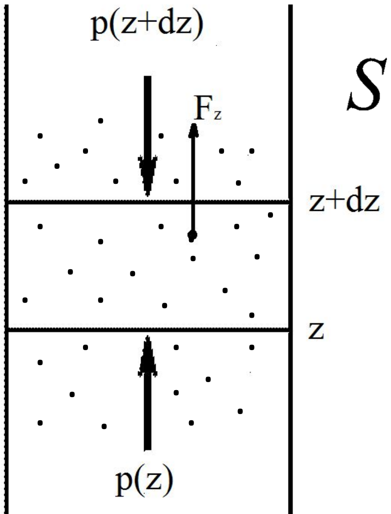
2.85. Найти среднее значение модуля $x$-вой компоненты скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре $T$. Масса молекулы равна $m$.

$$\varphi(v)dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-u^2\right)du \qquad \left(v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\right)$$

$$\langle|v_x|\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}|v|\varphi(v)dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2kT}{m}}\int_0^{+\infty}u\exp(-u^2)du$$

$$= 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}\left[-\frac{\exp(-u^2)}{2}\right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

# Распределение Больцмана



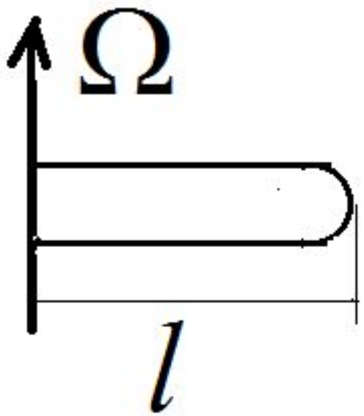

$$S\left(p\big|_{z+dz}-p\big|_{z}\right)=dN\,F_z=nSdz\,F_z \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial p}{\partial z}=nF_z$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla p=n\mathbf{F}=-n\nabla U\\ p=nkT\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad kT\nabla n=-n\nabla U\Rightarrow$$

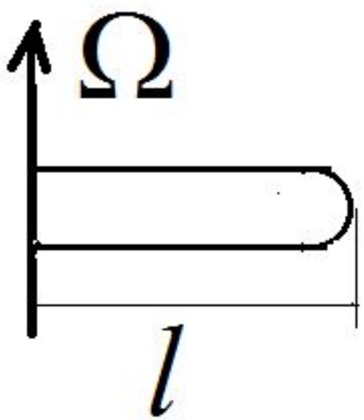
$$\Rightarrow\frac{\nabla n}{n}=-\frac{\nabla U}{kT}\Rightarrow\quad \nabla\ln n=-\frac{\nabla U}{kT}\quad\Rightarrow n=n_0\exp\left(-\frac{U}{kt}\right)$$

$$p=p_0\exp\left(-\frac{U}{kt}\right)=p_0\exp\left(-\frac{mgh}{kt}\right)$$

**2.99.** Закрытая с одного конца труба длины $l=1{,}00$ м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью $\omega=62{,}8$ рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0=1{,}00\cdot10^5$ Па, температура $t=20$ °C. Найти давление $p$ воздуха в трубе вблизи закрытого конца.



**2.99.** Закрытая с одного конца труба длины $l = 1{,}00$ м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью $\omega = 62{,}8$ рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Па, температура $t = 20$ °С. Найти давление $p$ воздуха в трубе вблизи закрытого конца.

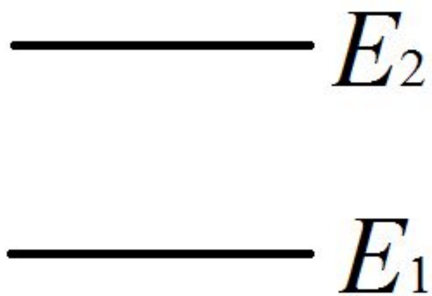



$$m\mathbf{a} = m\omega^2\mathbf{r} = \mathbf{F}_ц,\ \ \mathbf{F}_ц = -\nabla U,$$

$$U = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{m(\omega r)^2}{kT}\right)$$

**2.100.** Имеется $N$ частиц, энергия которых может принимать лишь два значения $E_1$ и $E_2$. Частицы находятся в равновесном состоянии при температуре $T$. Чему равна суммарная энергия $E$ всех частиц в этом состоянии?



$$N(E) = N_0 \exp(-E / kT),$$

$$N_1 = N_0 \exp(-E_1 / kT), \qquad N_2 = N_0 \exp(-E_2 / kT),$$

$$N_1 + N_2 \equiv N_0 \exp(-E_1 / kT) + N_0 \exp(-E_2 / kT) = N,$$

$$N_0 = \frac{N}{\exp(-E_1 / kT) + \exp(-E_2 / kT)},$$

$$N_1 = \frac{N \exp(-E_1 / kT)}{\exp(-E_1 / kT) + N_0 \operatorname{xp}(-E_2 / kT)},$$

$$N_2 = \frac{N \exp(-E_2 / kT)}{\exp(-E_1 / kT) + N_0 \operatorname{xp}(-E_2 / kT)}$$