РАСПРЕДЕ-ЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

472. Два сосуда с объемами V_1 и V_2 соединены трубкой с краном. В каждом из них при закрытом кране находится по одному молю одного и того же газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса. До открытия крана температура газа в обоих сосудах была одинакова и равна T. Нагреется или охладится газ, если открыть кран? На сколько при этом изменится температура газа? Определить давление газа после открытия крана. Стенки сосуда и соединяющей их трубки считать адиабатическими, а теплоемкость C_V — не зависящей от температуры.

T, C_v

V_1, V_2

$\nu_1 = \nu_2 = 1$

T', p'

T, C_v
V_1, V_2
$\nu_1 = \nu_2 = 1$

T', p'

$$U_0 = \left(\nu_1 C_V T - \frac{a\nu_1^2}{V_1}\right) + \left(\nu_2 C_V T - \frac{a\nu_2^2}{V_1}\right),$$

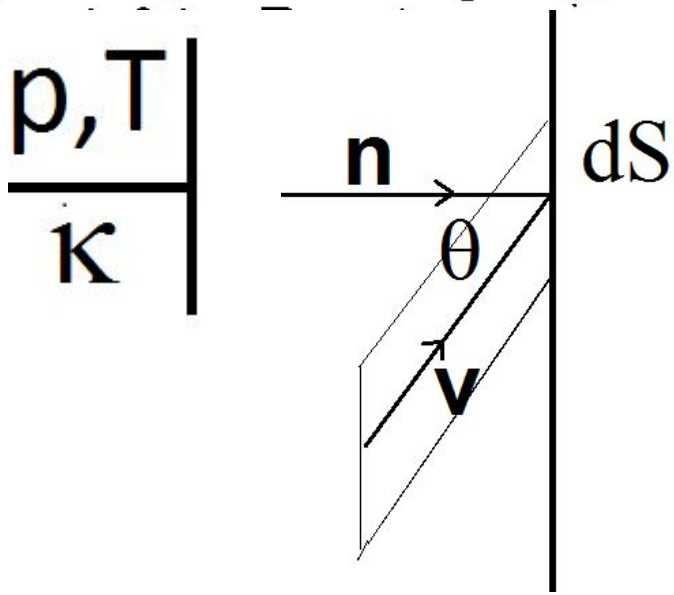
$$U = (\nu_1 + \nu_2) C_V T' - \frac{a(\nu_1 + \nu_2)^2}{V_1 + V_2} = U_0$$

$$T' = T - \frac{a}{2C_V(\nu_1 + \nu_2)} \left(\frac{(\nu_1 + \nu_2)^2}{V_1 + V_2} - \frac{\nu_1^2}{V_1} - \frac{\nu_2^2}{V_2} \right) \Bigg|_{\nu_1 = \nu_2 = 1}$$

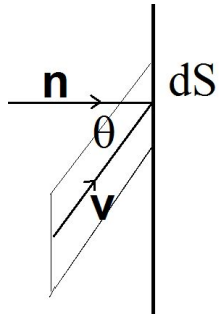
$$= T - \frac{a}{2C_V} \left(\frac{4}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = T - \frac{a}{2C_V} \frac{4V_1V_2 - (V_1 + V_2)^2}{V_1V_2(V_1 + V_2)}$$

$$= T - \frac{a}{2C_V} \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_1V_2(V_1 + V_2)}, \quad p' = \frac{2RT'}{V_1 + V_2 - 2b}$$

2.66. Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот (N_2) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?



2.66. Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот (N_2) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?

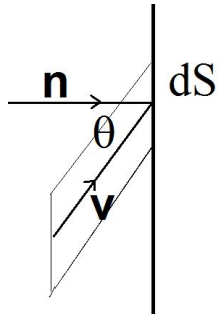


$$\kappa = \frac{1}{dtdS}\int dv \frac{d\Omega(\theta)}{2\pi} n_v dV$$

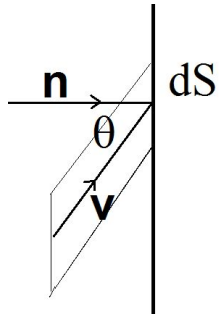
$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta = 2\pi d\left(\cos\theta\right), \quad dV = dS v dt \cos\theta$$

$$\kappa = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\cos\theta \int_0^{+\infty} v n_v dv = \frac{n\langle v\rangle}{4}, \quad \langle v\rangle = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} v n_v dv$$

2.66. Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот (N_2) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?



2.66. Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот (N_2) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?

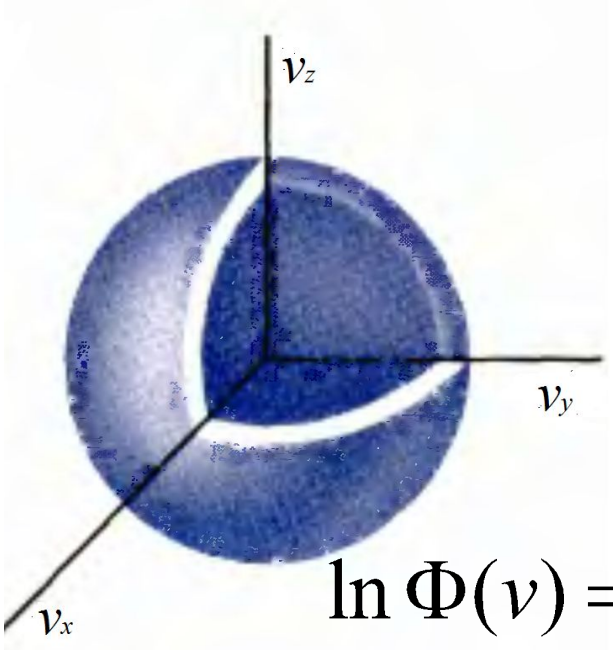


$$\kappa = \frac{1}{dtdS}\int dv\frac{d\Omega}{2\pi}n_v dV = \frac{1}{2\pi dtdS}\int dv\frac{d\Omega}{2\pi}n_v dV$$

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta = 2\pi d\left(\cos\theta\right), \quad dV = dSvdt\cos\theta$$

$$\kappa = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\cos\theta\int_0^{+\infty} vn_v dv = \frac{n\langle v\rangle}{4}, \quad \langle v\rangle = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} vn_v dv$$

Следствия изотропности пространства



$$f(\mathbf{v}) = \varphi_x(v_x)\varphi_y(v_y)\varphi_z(v_z)$$

$$f(\mathbf{v}) = \Phi(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\ln\Phi(v) = \ln\varphi(v_x) + \ln\varphi(v_y) + \ln\varphi(v_z) \quad \Big| \frac{\partial}{\partial v_x}$$

$$\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}\frac{\partial v}{\partial v_x} \equiv \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}\frac{v_x}{v} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}$$

Распределение по одной проекции

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}\frac{1}{v_x} = \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}\frac{1}{v} = -\alpha$$

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = -\alpha v_x \Rightarrow \varphi(v) = A\exp\left(-\alpha v^2\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} A\exp\left(-\alpha v^2\right)dx = 1 \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{mv^2}{2} A\exp\left(-\alpha v^2\right)dx = \frac{kT}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \\ \alpha &= \frac{m}{2kT} \end{aligned}\right.$$

Подробности взятия интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\exp\left(-\alpha v^2\right)dx = A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\alpha x^2\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^2\exp\left(-\alpha v^2\right)dv =$$

$$-\frac{1}{2\alpha}\left(v^2\exp\left(-\alpha v^2\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\alpha v^2\right)dv\right) = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{4\alpha}A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{kT}{2} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{m}{2kT}, \quad A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$$

Распределение Максвелла

$$f(\mathbf{v}) = \Phi(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right) \times \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$F(v) = 4\pi v^2 \Phi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

О нормировке и размерностях

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)dv = 1, \quad [\varphi(v)] = \left[\frac{1}{v}\right].$$

$$\int f(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z = 1,$$

$$[f(\mathbf{v})] = [\Phi(v)] = \left[\frac{1}{v^3}\right].$$

$$\int_{0}^{+\infty} F(v)dv = 1, \quad [F(v)] = \left[\frac{1}{v}\right].$$

Характерные скорости

$$v_в: \quad F'(v_в) = 0 \Rightarrow v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 F(v)dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Безразмерный вид

$$F(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv =$$

$$= \frac{4\pi v^2}{\pi^{3/2} v_в^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_в^2}\right) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2) du,$$

$$u = v\sqrt{\frac{m}{2kT}} = \frac{v}{v_в}$$

$$\varphi(v)dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u^2\right) du$$

• **2.88.** Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул газа обладает скоростями, отличными от наиболее вероятной не более чем на 1 %?

2.88. Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул газа обладает скоростями, отличными от наиболее вероятной не более чем на 1 %?

$$\alpha = \int_{0,99v_в}^{1,01v_в} F(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{0,99}^{1,01} u^2 \exp(-u^2)du$$

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} 0,02u^2 \exp(-u^2)\Big|_{u=1} = \frac{0,08}{\sqrt{\pi e}}$$

Найти среднее значение модуля скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре *T. Масса молекулы равна m.*

Найти среднее значение модуля скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре *T. Масса молекулы равна m.*

$$\int_0^\infty vF(v)dv = \frac{4v_в}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^3\exp(-u^2)du = \frac{2v_в}{\sqrt{\pi}}u^2\exp(-u^2)\Big|_0^{+\infty} +$$

$$da = u\exp(-u^2)du, \quad a = -\frac{\exp(-u^2)}{2} \qquad \left(v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\right)$$

$$b = u^2, \qquad db = 2udu$$

$$+\frac{4v_в}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u\exp(-u^2)du = \frac{2v_в}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре *T. Масса молекулы равна m.*

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} F(v) v^2 dv}$$

Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре *T. Масса молекулы равна m.*

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} F(v) v^2 dv}$$

$$\frac{m v_{кв}^2}{2} = \frac{i_{пост}}{2} kT = \frac{3}{2} kT \quad \Rightarrow \quad v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

2.85. Найти среднее значение модуля x-вой компоненты скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T. Масса молекулы равна m.

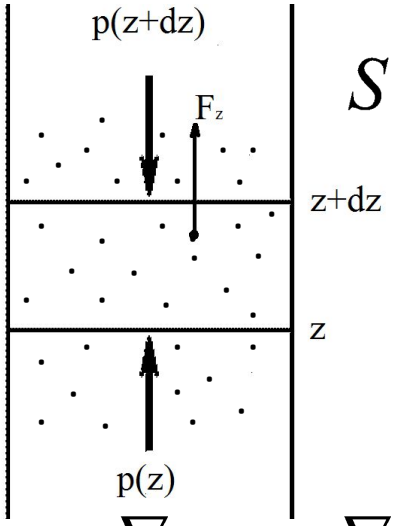
2.85. Найти среднее значение модуля x-вой компоненты скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T. Масса молекулы равна m.

$$\varphi(v)dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-u^2\right)du \qquad \left(v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\right)$$

$$\left\langle |v_x| \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |v|\varphi(v)dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2kT}{m}}\int_0^{+\infty} u\exp(-u^2)du$$

$$= 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}\left[-\frac{\exp(-u^2)}{2}\right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

Распределение Больцмана



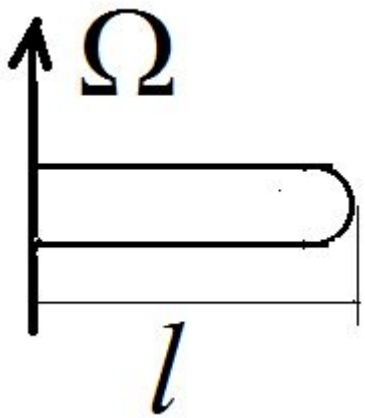
$$S\left(p\big|_{z+dz} - p\big|_{z}\right) = dN\,F_z = nSdz\,F_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = nF_z$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla p &= n\mathbf{F} = -n\nabla U \\ p &= nkT \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad kT\nabla n = -n\nabla U \Rightarrow$$

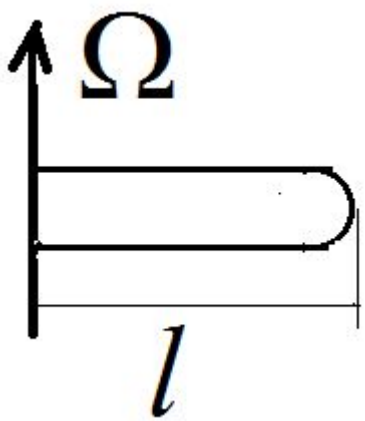
$$\Rightarrow \frac{\nabla n}{n} = -\frac{\nabla U}{kT} \Rightarrow \quad \nabla \ln n = -\frac{\nabla U}{kT} \quad \Rightarrow n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kt}\right)$$

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{U}{kt}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kt}\right)$$

2.99. Закрытая с одного конца труба длины $l=1{,}00$ м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью $\omega=62{,}8$ рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0=1{,}00\cdot10^5$ Па, температура $t=20$ °С. Найти давление p воздуха в трубе вблизи закрытого конца.



2.99. Закрытая с одного конца труба длины $l=1{,}00$ м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью $\omega=62{,}8$ рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0=1{,}00\cdot10^5$ Па, температура $t=20$ °С. Найти давление p воздуха в трубе вблизи закрытого конца.

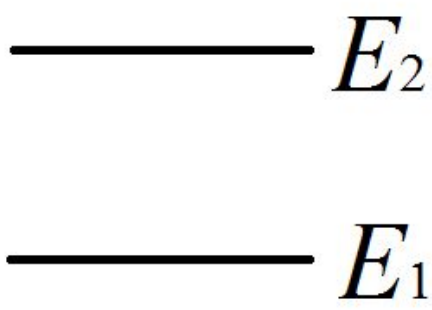


$$m\mathbf{a} = m\omega^2\mathbf{r} = \mathbf{F}_ц,\ \ \mathbf{F}_ц = -\nabla U,$$

$$U = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{m(\omega r)^2}{kT}\right)$$

2.100. Имеется N частиц, энергия которых может принимать лишь два значения E_1 и E_2. Частицы находятся в равновесном состоянии при температуре T. Чему равна суммарная энергия E всех частиц в этом состоянии?



$$N(E) = N_0 \exp(-E/kT),$$

$$N_1 = N_0 \exp(-E_1/kT), \qquad N_2 = N_0 \exp(-E_2/kT),$$

$$N_1 + N_2 \equiv N_0 \exp(-E_1/kT) + N_0 \exp(-E_2/kT) = N,$$

$$N_0 = \frac{N}{\exp(-E_1/kT) + \exp(-E_2/kT)},$$

$$N_1 = \frac{N \exp(-E_1/kT)}{\exp(-E_1/kT) + N_0 \,\mathrm{xp}(-E_2/kT)},$$

$$N_2 = \frac{N \exp(-E_2/kT)}{\exp(-E_1/kT) + N_0 \,\mathrm{xp}(-E_2/kT)}$$