

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
МАКСВЕЛЛА И
БОЛЬЦМАНА

472. Два сосуда с объемами V_1 и V_2 соединены трубкой с краном. В каждом из них при закрытом кране находится по одному молю одного и того же газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса. До открытия крана температура газа в обоих сосудах была одинакова и равна T . Нагреется или охладится газ, если открыть кран? На сколько при этом изменится температура газа? Определить давление газа после открытия крана. Стенки сосуда и соединяющей их трубки считать адиабатическими, а теплоемкость C_V — не зависящей от температуры.

T, C_V

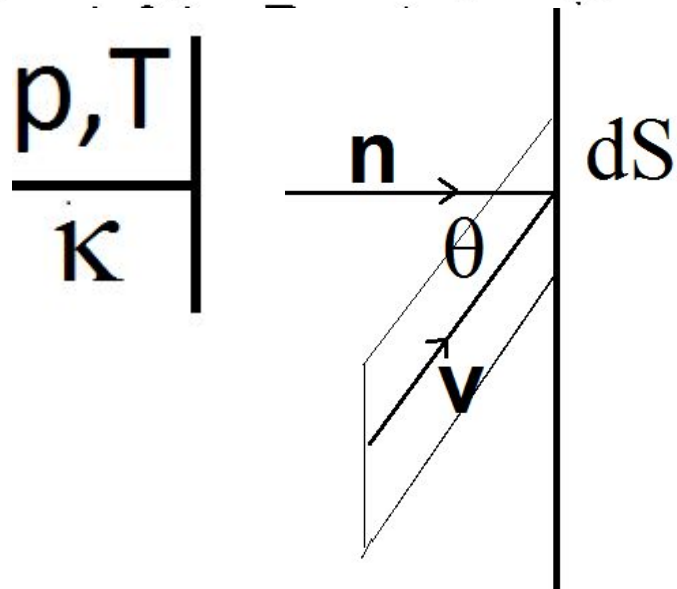
V_1, V_2

$\nu_1 = \nu_2 = 1$

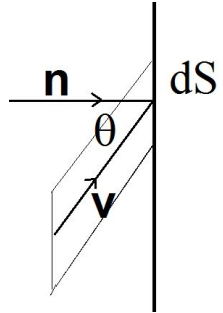
T', p'

\mathbf{T}, \mathbf{C}_v V_1, V_2 $v_1 = v_2 = 1$	$U_0 = \left(v_1 C_V T - \frac{a v_1^2}{V_1} \right) + \left(v_2 C_V T - \frac{a v_2^2}{V_1} \right),$
\mathbf{T}', \mathbf{p}'	$U = (v_1 + v_2) C_V T' - \frac{a(v_1 + v_2)^2}{V_1 + V_2} = U_0$
	$T' = T - \frac{a}{2C_V(v_1 + v_2)} \left(\frac{(v_1 + v_2)^2}{V_1 + V_2} - \frac{v_1^2}{V_1} - \frac{v_2^2}{V_2} \right) \Bigg _{v_1=v_2=1}$
	$= T - \frac{a}{2C_V} \left(\frac{4}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = T - \frac{a}{2C_V} \frac{4V_1V_2 - (V_1 + V_2)^2}{V_1V_2(V_1 + V_2)}$
	$= T - \frac{a}{2C_V} \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_1V_2(V_1 + V_2)}, \quad p' = \frac{2RT'}{V_1 + V_2 - 2b}$

2.66. Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот (N₂) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?



2.66. Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот (N₂) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?

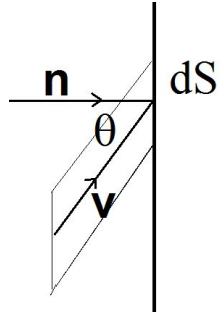


$$\kappa = \frac{1}{dt dS} \int dv \frac{d\Omega(\theta)}{2\pi} n_\nu dV$$

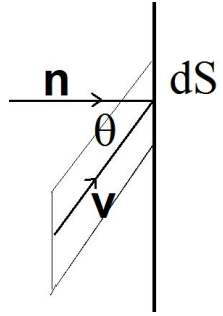
$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi d(\cos \theta), \quad dV = dS v dt \cos \theta$$

$$\kappa = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d \cos \theta \int_0^{+\infty} v n_\nu dv = \frac{n \langle v \rangle}{4}, \quad \langle v \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} v n_\nu dv$$

2.66. Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот (N₂) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?



2.66. Сколько молекул ν ударяется за 1 с об 1 м² стенки сосуда, в котором находится азот (N₂) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20 °С?



$$\kappa = \frac{1}{dt dS} \int dv \frac{d\Omega}{2\pi} n_\nu dV = \frac{1}{2\pi dt dS} \int dv \frac{d\Omega}{2\pi} n_\nu dV$$

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi d(\cos \theta), \quad dV = dS v dt \cos \theta$$

$$\kappa = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d \cos \theta \int_0^{+\infty} \nu n_\nu d\nu = \frac{n \langle \nu \rangle}{4}, \quad \langle \nu \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \nu n_\nu d\nu$$

Следствия изотропности

— изотропности

$$f(\mathbf{v}) = \varphi_x(v_x)\varphi_y(v_y)\varphi_z(v_z)$$

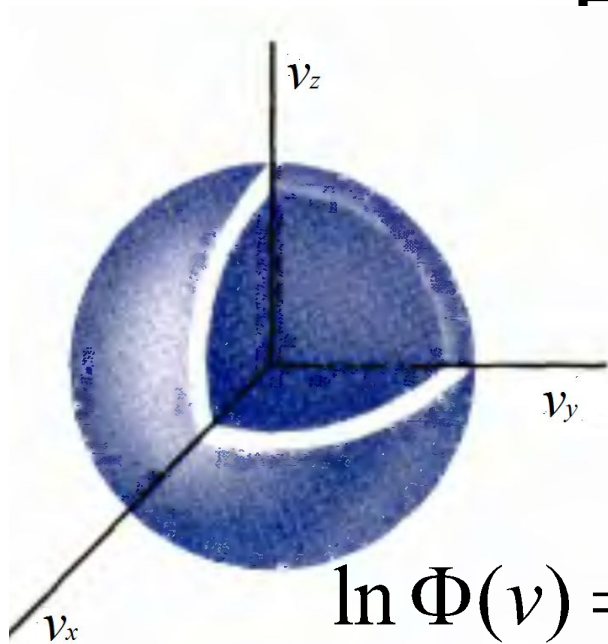
$$f(\mathbf{v}) = \Phi(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\ln \Phi(v) = \ln \varphi(v_x) + \ln \varphi(v_y) + \ln \varphi(v_z)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial v_x} \right.$$

$$\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)} \frac{\partial v}{\partial v_x} \equiv \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)} \frac{v_x}{v} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}$$



Распределение по одной

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} \frac{1}{v_x} = \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)} \frac{1}{v} = -\alpha \quad \text{проекция}$$

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = -\alpha v_x \Rightarrow \varphi(v) = A \exp(-\alpha v^2)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} A \exp(-\alpha v^2) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{mv^2}{2} A \exp(-\alpha v^2) dx &= \frac{kT}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \\ \alpha = \frac{m}{2kT} \end{cases}$$

Подробности взятия

интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A \exp(-\alpha v^2) dx = A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \exp(-\alpha v^2) dv =$$

$$-\frac{1}{2\alpha} \left(v^2 \exp(-\alpha v^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha v^2) dv \right) = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{4\alpha} A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{kT}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{m}{2kT}, \quad A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$$

Распределение Максвелла

$$f(\mathbf{v}) = \Phi(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT} \right) \times \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT} \right) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

$$F(v) = 4\pi v^2 \Phi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

О нормировке и размерностях

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) dv = 1, \quad [\varphi(v)] = \left[\frac{1}{v} \right].$$

$$\int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z = 1,$$

$$[f(\mathbf{v})] = [\Phi(v)] = \left[\frac{1}{v^3} \right].$$

$$\int_0^{+\infty} F(v) dv = 1, \quad [F(v)] = \left[\frac{1}{v} \right].$$

ХАРАКТЕРНЫЕ СКОРОСТИ

$$v_e : F'(v_e) = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$v_{KB} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 F(v)dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Безразмерный вид

$$F(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv =$$
$$= \frac{4\pi v^2}{\pi^{3/2} v_e^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_e^2} \right) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2) du,$$

$$u = v \sqrt{\frac{m}{2kT}} = \frac{v}{v_e}$$

$$\varphi(v)dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) du$$

• 2.88. Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул газа обладает скоростями, отличными от наиболее вероятной не более чем на 1 %?

• 2.88. Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул газа обладает скоростями, отличными от наиболее вероятной не более чем на 1 %?

$$\alpha = \int_{0,99v_g}^{1,01v_g} F(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{0,99}^{1,01} u^2 \exp(-u^2) du$$

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} 0,02u^2 \exp(-u^2) \Big|_{u=1} = \frac{0,08}{\sqrt{\pi}e}$$

Найти среднее значение модуля скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T . Масса молекулы равна m .

Найти среднее значение модуля скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T . Масса молекулы равна m .

$$\int_0^{\infty} v F(v) dv = \frac{4v_e}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^3 \exp(-u^2) du = \frac{2v_e}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2) \Big|_0^{+\infty} +$$

$$da = u \exp(-u^2) du, \quad a = -\frac{\exp(-u^2)}{2} \quad \left(v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \right)$$

$$b = u^2, \quad db = 2u du$$

$$+ \frac{4v_e}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u \exp(-u^2) du = \frac{2v_e}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T . Масса молекулы равна m .

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} F(v)v^2 dv}$$

Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T . Масса молекулы равна m .

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} F(v)v^2 dv}$$

$$\frac{mv_{кв}^2}{2} = \frac{i_{ном}}{2} kT = \frac{3}{2} kT \quad \Rightarrow \quad v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

↓ 2.85. Найти среднее значение модуля x -вой компоненты скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T . Масса молекулы равна m .

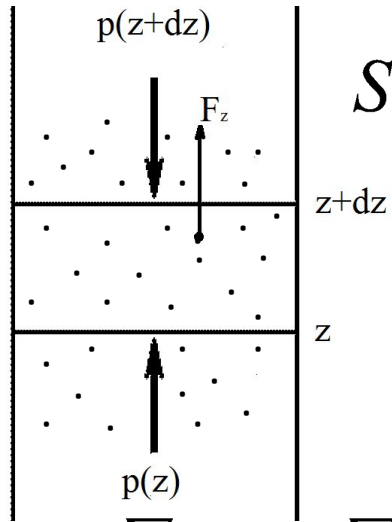
↓ 2.85. Найти среднее значение модуля x -вой компоненты скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T . Масса молекулы равна m .

$$\varphi(v)dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) du \quad \left(v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \right)$$

$$\langle |v_x| \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |v| \varphi(v) dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_0^{+\infty} u \exp(-u^2) du$$

$$= 2 \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \left[-\frac{\exp(-u^2)}{2} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

Распределение Больцмана



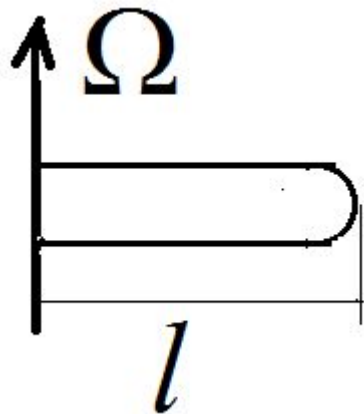
$$S(p|_{z+dz} - p|_z) = dN F_z = n S dz F_z \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = n F_z$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla p &= n \mathbf{F} = -n \nabla U \\ p &= nkT \end{aligned} \right\} \Rightarrow kT \nabla n = -n \nabla U \Rightarrow$$

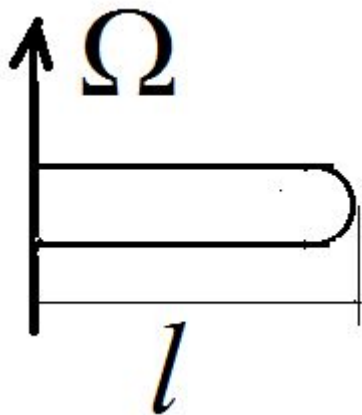
$$\Rightarrow \frac{\nabla n}{n} = -\frac{\nabla U}{kT} \Rightarrow \nabla \ln n = -\frac{\nabla U}{kT} \Rightarrow n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kt}\right)$$

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{U}{kt}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kt}\right)$$

2.99. Закрытая с одного конца труба длины $l=1,00$ м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью $\omega=62,8$ рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0=1,00 \cdot 10^5$ Па, температура $t=20$ °С. Найти давление p воздуха в трубе вблизи закрытого конца.



2.99. Закрытая с одного конца труба длины $l=1,00$ м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью $\omega=62,8$ рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0=1,00 \cdot 10^5$ Па, температура $t=20$ °С. Найти давление p воздуха в трубе вблизи закрытого конца.



$$m\mathbf{a} = m\omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{F}_ц, \quad \mathbf{F}_ц = -\nabla U,$$

$$U = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{m(\omega r)^2}{kT}\right)$$

2.100. Имеется N частиц, энергия которых может принимать лишь два значения E_1 и E_2 . Частицы находятся в равновесном состоянии при температуре T . Чему равна суммарная энергия E всех частиц в этом состоянии?

———— E_2

———— E_1

$$N(E) = N_0 \exp(-E / kT),$$

$$N_1 = N_0 \exp(-E_1 / kT), \quad N_2 = N_0 \exp(-E_2 / kT),$$

$$N_1 + N_2 \equiv N_0 \exp(-E_1 / kT) + N_0 \exp(-E_2 / kT) = N,$$

$$N_0 = \frac{N}{\exp(-E_1 / kT) + \exp(-E_2 / kT)},$$

$$N_1 = \frac{N \exp(-E_1 / kT)}{\exp(-E_1 / kT) + \exp(-E_2 / kT)},$$

$$N_2 = \frac{N \exp(-E_2 / kT)}{\exp(-E_1 / kT) + \exp(-E_2 / kT)}$$