Показательные уравнения

- Показательные уравнения - уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени.
- Решение показательных уравнений сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0, a \neq 1$, x — неизвестное.

Это уравнение решается с помощью свойства степени, состоящего в том, что

- степени с одинаковым основанием $a > 0, a \neq 1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Задача 1. Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

Решение. Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$

откуда $x + 2 = 0$.

Ответ. $x = -2$.

Задача 2. Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.

Решение. Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$

Получаем: $8^x \cdot 3^x = 576$.

$$24^x = 24^2$$

откуда $x = 2$

Задача 3. Решить уравнение $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25.$

$$3^2 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{-2}3^x = 25.$$

$$3 \cdot 3^x - 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 3^x = 25.$$

$$3^x \cdot (3 - \frac{2}{9}) = 25$$

$$3^x \cdot 2\frac{7}{9} = 25$$

$$3^x \cdot \frac{25}{9} = 25 \quad |: \frac{25}{9}$$

$$3^x = 25 \cdot \frac{9}{25} \qquad 3^x = 9 \qquad 3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

Задача 4. Решить уравнение $3^x = 7^x$.

Решение. $3^x = 7^x \quad |: 7^x$

$$\frac{3^x}{7^x} = 1$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^0$$

$$x = 0$$

Задача 6. Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0.$

Решение. Заметим, что $9^x = 3^{2x}$

Введем новую переменную $t = 3^x$

Получаем квадратное уравнение: $t^2 - 4t - 45 = 0$

Находим корни квадратного уравнения: $D = 16 + 4 \cdot 45 = 196$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 14}{2} = 2 \pm 7; \quad \Rightarrow t_1 = 9; t_2 = -5$$

Возвращаемся к исходной переменной, получаем два уравнения:

$3^x = 9$

$x = 2$

$3^x = -5$

Решений нет.

Ответ. $x = 2$

Показательные неравенства

Неравенства, в которых неизвестное содержится в показателе степени, называются показательными неравенствами.

Алгоритм решения показательных неравенств.

1. Привести неравенство к такому виду, чтобы обе части неравенства представляли собой степени с одним и тем же основанием.
2. Перейти к равносильному неравенству (сравниваем показатели степеней из левой и правой частей неравенства).

При этом учитываем свойства возрастания –убывания показательной функции:

- Если основание степени $a > 1$, то знак неравенства сохраняется неизменным;
- Если основание степени $0 < a < 1$, то знак неравенства изменяется на противоположный.

Задача 1. Решить неравенство $3^x < 81$.

Запишем неравенство в виде $3^x < 3^4$.

Так как $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей.

Поэтому решениями неравенства являются числа $x < 4$.

Задача 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \sqrt{8}$

Представим $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Получаем: $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ - убывающая, значит:

$$x > -\frac{3}{2}$$

45. Решить неравенство:

1) $3^x > 9$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$;

4) $4^x < \frac{1}{2}$;

5) $2^{3x} \geq \frac{1}{2}$;

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq \frac{1}{9}$;

46. 1) $5^{x-1} \leq \sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} > 9$; 3) $3^{x^2-4} \geq 1$; 4) $5^{2x^2-18} < 1$

48. 1) $2^{-x^2+3x} < 4$; 2) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}$; 3) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} < \frac{121}{169}$; 4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x} \leq 7\frac{1}{9}$.

Логарифмические уравнения.

Логарифмические уравнения – это уравнения, в которых неизвестное содержится под знаком логарифма.
Например, $\log_3 x = 4$
или $\log_x 25 = 5$

При решении логарифмических уравнений обязательно учитывается ОДЗ (*область допустимых значений)*

ОДЗ логарифмического уравнения вида $\log_a x = b$

$$\boxed{x > 0}$$

ОДЗ логарифмического уравнения вида $\log_x a = b$

$$\boxed{x > 0}$$

Решить уравнение: $\log_3(5x+7)=4$

Решение. 1. Находим ОДЗ: $5x+7>0 \Rightarrow x> -1\frac{2}{5}$

Приводим уравнение к такому виду, чтобы обе части уравнения представляли собой логарифмы с одним и тем же основанием:

$$\log_3(5x-7)=\log_3 3^4$$

$$\log_3(5x-7)=\log_3 81$$

Два логарифма с одинаковыми основаниями равны тогда и только тогда, когда равны их логарифмируемые выражения:

$$5x-7=81 \quad \Rightarrow 5x=88 \quad \Rightarrow x=17{,}6$$

Проверяем удовлетворяет ли найденный корень ОДЗ:

$x=17{,}6> -1\frac{2}{5}$ Значит, $x=17{,}6$ – корень уравнения.

88. 1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$; 3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0$.

89. 1) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2$; 2) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$

Решение логарифмических неравенств:

При решении логарифмических неравенств:

1. Находим ОДЗ
2. Обе части неравенства приводим к такому виду, чтоб они представляли собой логарифмы одного и того же основания
3. Переходим к новому неравенству: сравниваем выражения, содержащиеся под знаком логарифма в обеих частях неравенства.

При этом учитываем следующее:

- Если основание логарифма $a > 1$, то знак неравенства остается неизменным;
- Если основание логарифма $0 < a < 1$, то знак неравенства изменяется на противоположный.

4. Решаем систему неравенств, состоящую из ОДЗ и упрощенного неравенства.

Решить неравенство $\lg(x+1) < 2$.

Решение. 1) Находим ОДЗ: $x + 1 > 0 \quad x > -1$

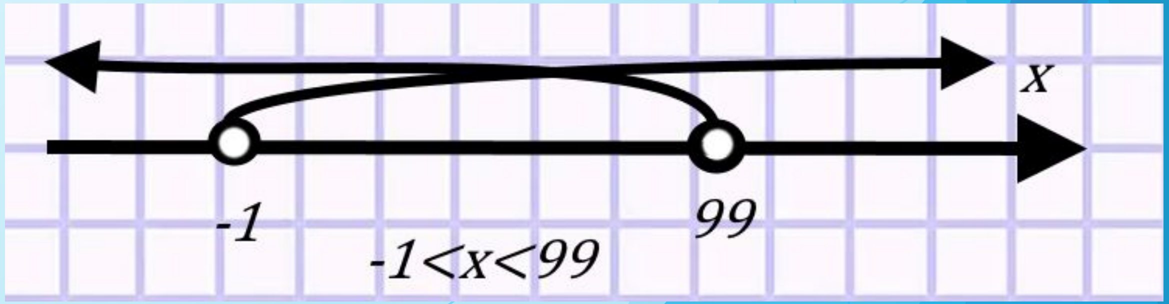
$\lg(x+1) < 2 \quad \Rightarrow \lg(x+1) < \lg 10^2 \quad \Rightarrow \lg(x+1) < \lg 100$

Так как основание логарифма $10 > 1$, то при переходе к упрощенному неравенству знак неравенства сохраняется:

$x + 1 < 100 \quad \Rightarrow x < 99$

Решаем систему неравенств: $\begin{cases} x > -1 \\ x < 99 \end{cases}$

Графически находим общее решение:



Ответ. $x \in (-1; 99)$

Решить неравенство (113—115).

113. 1) $\log_3(x+2)<3$; 2) $\log_8(4-2x)\geqslant 2$;

3) $\log_3(x+1)<-2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\geqslant -2$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x)\geqslant -1$; 6) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<-2$.

114. 1) $\log x>\lg 8+1$; 2) $\lg x>2-\lg 4$;

3) $\log_2(x-4)<1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

153. Решить неравенство:

1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+\log_{\sqrt{6}}(x+1)\leqslant 2$;

2) $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)+\log_{3\sqrt{2}}(x+12)\leqslant 2$;

3) $\log_3(8x^2+x)>2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

4) $\log_2 x+\log_2(x-3)>\log_2 4$;