Системы счисления

1. Введение
2. Двоичная система
3. Восьмеричная система
4. Шестнадцатеричная система
5. Другие системы счисления

© К.Ю. Поляков, 2007-2012

Системы счисления

Тема 1. Введение

© К.Ю. Поляков, 2007-2012

Определения

Система счисления – это способ записи **чисел** с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры:

0, 1, 2, …   I, V, X, L, …

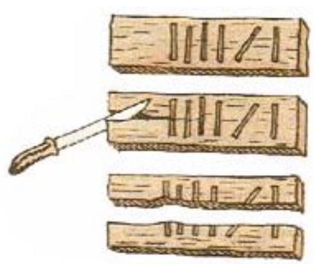
Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места *(позиции)* в записи числа;
- **позиционные** – зависит…

Непозиционные системы

Унарная – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, …)



Десятичная египетская система счисления:

Непозиционные системы

Римская система счисления:

I – 1 (палец),

V – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),

X – 10 (две ладони),

L – 50,

C – 100 (*Centum*),

D – 500 (*Demimille*),

M – 1000 (*Mille*)

Римская система счисления

Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна**!) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично* непозиционная!)

Примеры:

MDCXLIV = 1000 + 500 + 100 – 10 + 50 – 1 + 5 = 1644

2389 = 2000 + 300 + 80 + 9

M M **CCC** **LXXX** **IX**

2389 = M M C C C L X X X I X

Примеры:

3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V**, **X**, **L**, **C**, **D**, **M**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:

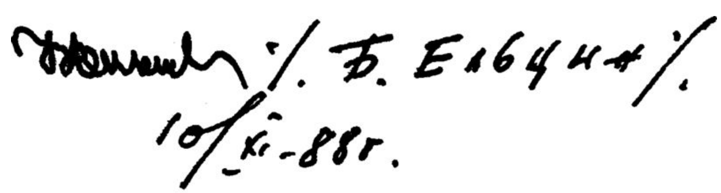
  CCCLIX + CLXXIV =?

Где используется:


ГЛАВА V.

Изслѣдованіе истоковъ Желтой рѣки.

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «***Пираты XX века»***
- циферблат часов
- номера месяцев



Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

Часы Суздальского Кремля

Позиционные системы

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах
изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): **10**

сотни **десятки** **единицы**

2 1 0 **разряды**

$$3\ 7\ 8 = 3\cdot10^{2} + 7\cdot10^{1} + 8\cdot10^{0}$$

300 **70** **8**

Другие позиционные системы:

- **двоичная**, восьмеричная, **шестнадцатеричная** (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

Позиционные системы

Задача: в какой системе счисления число 58 записывается как «46_x»? Определите основание системы счисления X.

$$58 = 46_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому $x > 6$
- переводим правую часть в десятичную систему

$$58 = \overset{1}{4}\overset{0}{6}_x = 4 \cdot x^1 + 6 \cdot x^0 = 4 \cdot x + 6$$

- решаем уравнение

$$58 = 4 \cdot x + 6 \qquad \boxed{x = 13}$$

Позиционные системы

Задача: найдите основание системы счисления, в которой выполняется равенство

$$16_x + 33_x = 52_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому $x > 6$
- переводим в десятичную систему

$$\overset{1}{1}\overset{0}{6}_x = x + 6 \qquad \overset{1}{5}\overset{0}{2}_x = 5\cdot x + 2$$

$$33_x = 3\cdot x + 3$$

- решаем уравнение

$$4\cdot x + 9 = 5\cdot x + 2$$

$$\boxed{x = 7}$$

Позиционные системы

Задача: перечислите через запятую все системы счисления, в которых выполняется неравенство

$$21_x + 32_x > 102_x$$

- в записи есть цифра 3, поэтому $x > 3$
- переводим в десятичную систему

$$\overset{1}{2}\overset{0}{1}_x = 2\cdot x + 1 \qquad \overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{2}_x = x^2 + 2$$

$$32_x = 3\cdot x + 2$$

- решаем неравенство (перебор x = 4, 5, 6, …)

$$5\cdot x + 3 > x^2 + 2$$

$$\boxed{x = 4{,}5}$$

Позиционные системы

Задача: найдите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 30 имеет 3 значащих разряда.

- минимальное 3-разрядное число 100_x
- максимальное 3-х разрядное число?

$$1000_x - 1$$

- решаем неравенство

$$100_x \le 30 \le 1000_x - 1$$

$$x^2 \le 30 \le x^3 - 1$$

(перебор x = 2, 3, 4, …)

x = 4

Системы счисления

Тема 2. Двоичная система счисления

© К.Ю. Поляков, 2007-2012

Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): **2**

10 → 2

19 | 2
18 | 9 | 2
1 | 8 | 4 | 2
1 | 4 | 2 | 2
0 | 2 | 1 | 2
0 | 0 | 0
1

$$19 = 10011_2$$

система счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 **разряды**

$$10011_2 = 1\cdot 2^4 + \cancel{0}\cdot 2^3 + \cancel{0}\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

Примеры:

131 =

79 =

Примеры:

$$101011_2 =$$

$$110110_2 =$$

Когда двоичное число четное? делится на 8?

Метод подбора

77 $10 \to 2$

наибольшая степень двойки, которая меньше или равна данному числу

77 13 5 1

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

$$77 = 64 + 13 \quad 5 \quad 1$$

Разложение по степеням двойки:

$$77 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

$$77 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

6 5 4 3 2 1 0 **разряды**

$$77 = 1001101_2$$

Перевод дробных чисел

10 → 2

$0{,}375 = 0{,}011_2$

$$\begin{array}{r} 0{,}375 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{0}{,}750 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}75 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{1}{,}50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}5 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{1}{,}0 \end{array}$$

$0{,}7 = ?$

$0{,}7 = 0{,}1011001100110\ldots$

$= 0{,}1(0110)_2$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$

2 1 0 -1 -2 -3 **разряды**

$101{,}011_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$

$= 4 + 1 + 0{,}25 + 0{,}125 = 5{,}375$

Примеры:

$0{,}625 =$

$3{,}875 =$

Арифметические операции

сложение

$0+0=0 \quad 0+1=1$

$1+0=1 \quad 1+1=\mathbf{1}0_2$

$1+1+1=\mathbf{1}1_2$

перенос

$$
\begin{array}{r}
{\color{red}1\,1\,1\,1\,1} \\
10110_2 \\
+\;111011_2 \\
\hline
1010001_2
\end{array}
$$

вычитание

$0-0=0 \quad 1-1=0$

$1-0=1 \quad \mathbf{1}0_2-1=1$

заем

$$
\begin{array}{r}
0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 10_2 \;\; 0 \;\; 10_2 \\
\cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{1}\,0\,1_2 \\
-\;11011_2 \\
\hline
{\color{red}0}101010_2
\end{array}
$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ +\ 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ +101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ +\ 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ +\ 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ -\ 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ -110101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110011_2 \\ -\ 10101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110101_2 \\ -\ 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

умножение

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,1\,0\,1_2 \\
\times \quad 1\,0 \\
\hline
1_2\,1\,0\,1\,0\,1_2 \\
+\,1\,0\,1\,0\,1_2 \\
\hline
\boxed{1\,1\,0\,1\,0\,0\,1_2}
\end{array}
$$

деление

$$
\begin{array}{r|l}
1\,0\,1\,0\,1_2 & 1\,1\,1_2 \\
\cline{2-2}
-\;1\,1\,1_2 & \boxed{1\,1_2} \\
\cline{1-1}
1\,1\,1_2 & \\
-\,1\,1\,1_2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Плюсы и минусы двоичной системы

- нужны устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
- **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов
- выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными

- двоичные числа имеют **много разрядов;**
- запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.

?

Двоично-десятичная система

BCD = *binary coded decimals* (десятичные цифры в двоичном коде)

10 → BCD

$$9024{,}19 = 1001\ 0000\ 0010\ 0100,\ 0001\ 1001_{BCD}$$

9 0 2 4 , 1 9

BCD → 10

$$1\ \ 0101\ \ 0011,\ \ 0111\ \ 1_{BCD} =$$

$$0001\ 0101\ 0011,\ 0111\ 1000_{BCD} = 153{,}78$$

Запись числа в BCD не совпадает с двоичной!

$$10101{,}1_{BCD} = 15{,}8$$

$$10101{,}1_{2} = 16 + 4 + 1 + 0{,}5 = 21{,}5$$

Системы счисления

Тема 3. Восьмеричная система счисления

© *К.Ю. Поляков, 2007-2012*

Восьмеричная система

Основание (количество цифр): **8**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8

101	8		
96	12	8	
5	8	1	8
	4	0	0
		1	

$$101 = 145_8$$

система счисления

8 → 10

2 1 0 **разряды**

$$145_8 = 1\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 5\cdot 8^0$$

$$= 64 + 32 + 5 = 101$$

Примеры:

$134 =$

$75 =$

$134_8 =$

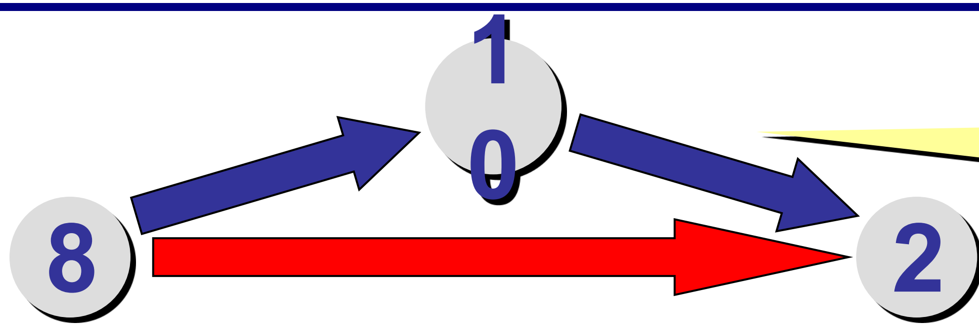
$75_8 =$

Таблица восьмеричных чисел

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

X_{10}	X_8	X_2
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную и обратно



- трудоемко
- 2 действия

$8 = 2^3$

! Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5}{}_2$$

Примеры:

$3467_8 =$

$\cancel{2148}_8 =$

$7352_8 =$

$1231_8 =$

Перевод из двоичной системы

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

$$\boxed{1}\quad \boxed{1}\quad \boxed{3}\quad \boxed{5}\quad \boxed{7}$$

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

$101101010010_2 =$

$11111101011_2 =$

$1101011010_2 =$

Арифметические операции

сложение

$$
\begin{array}{r}
\;{\color{red}1}\;{\color{red}1}\;{\color{red}1} \\
156_8 \\
+\;662_8 \\
\hline
1040_8
\end{array}
$$

$6 + 2 = 8 = \mathbf{8} + 0$

1 в перенос

$5 + 6 + {\color{red}1} = 12 = \mathbf{8} + 4$

1 в перенос

$1 + 6 + {\color{red}1} = \mathbf{8} = \mathbf{8} + 0$

1 в перенос

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ +\ 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ +\ 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

вычитание

$$
\begin{array}{r}
456_8 \\
-\;277_8 \\
\hline
157_8
\end{array}
$$

заем

$(6 + 8) - 7 = 7$

заем

$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$

$(4 - 1) - 2 = 1$

Примеры

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ -\quad 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ -\quad 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

Тема 4. Шестнадцатеричная система счисления

© К.Ю. Поляков, 2007-2012

Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): **16**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**

A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15

10 → 16

$$
\begin{array}{r|l}
107 & 16 \\ \hline
96 & 6 \\
\boxed{11} & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
6 & 16 \\ \hline
0 & 0 \\
\boxed{6} & \\
\end{array}
$$

B

$$107 = 6B_{16}$$

система счисления

16 → 10

2 1 0 **разряды**

C

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

Примеры:

$171 =$

$1BC_{16} =$

$206 =$

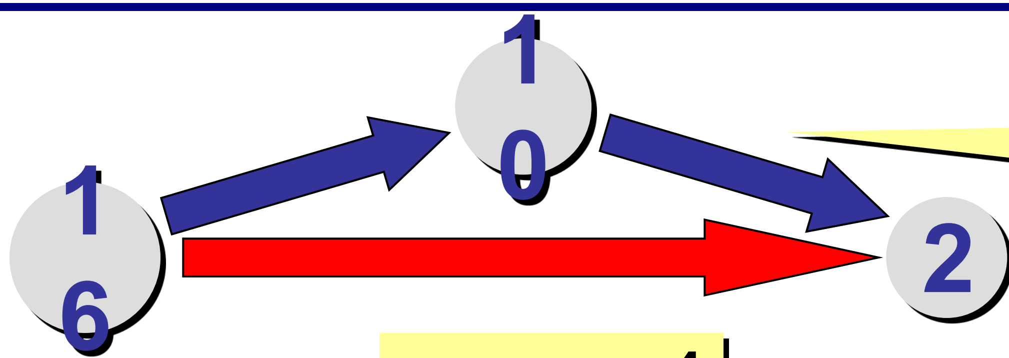
$22B_{16} =$

Таблица шестнадцатеричных чисел

X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

X_{10}	X_{16}	X_2
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Перевод в двоичную систему



- трудоемко
- 2 действия

$$16 = 2^4$$

! **Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!**

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1010}_{A}{}_2$$

Примеры:

$C73B_{16} =$

$2FE1_{16} =$

Перевод из двоичной системы

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

1 2 E F

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

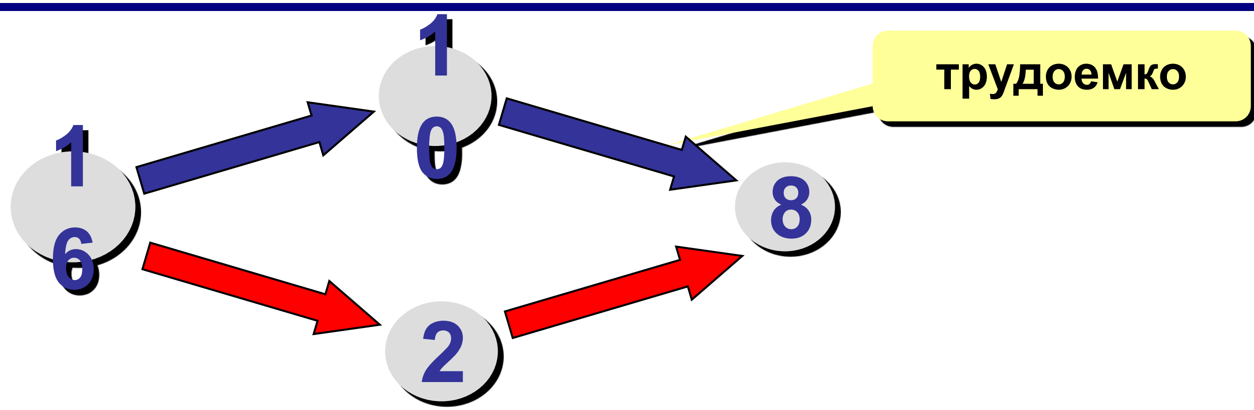
Примеры:

$1010101101010110_2 =$

$111100110111110101_2 =$

$110110110101111110_2 =$

Перевод в восьмеричную и обратно



Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Примеры:

$A35_{16} =$

$765_8 =$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} A\,5\,B_{16} \\ +\;C\,7\,E_{16} \\ \hline 1\,6\,D\,9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & & 1 & \\ & 10 & 5 & 11 \\ + & 12 & 7 & 14 \\ \hline 1 & 6 & 13 & 9 \end{array}$$

1 в перенос

$11+14=25=16+9$

$5+7+1=13=D_{16}$

1 в перенос

$10+12=22=16+6$

Пример:

$$
\begin{array}{r}
C\,B\,A_{16} \\
+\quad A\,5\,9_{16} \\
\hline
\end{array}
$$

Арифметические операции

вычитание

$$
\begin{array}{r} C\,5\,B_{16} \\ -\;A\,7\,E_{16} \\ \hline 1\,D\,D_{16} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr} \dot{12} & \dot{5} & 11 \\ -\;10 & 7 & 14 \\ \hline 1 & 13 & 13 \end{array}
$$

заем

заем

$(11+16)-14=13=D_{16}$

$(5-1)+16-7=13=D_{16}$

$(12-1)-10=1$

Пример:

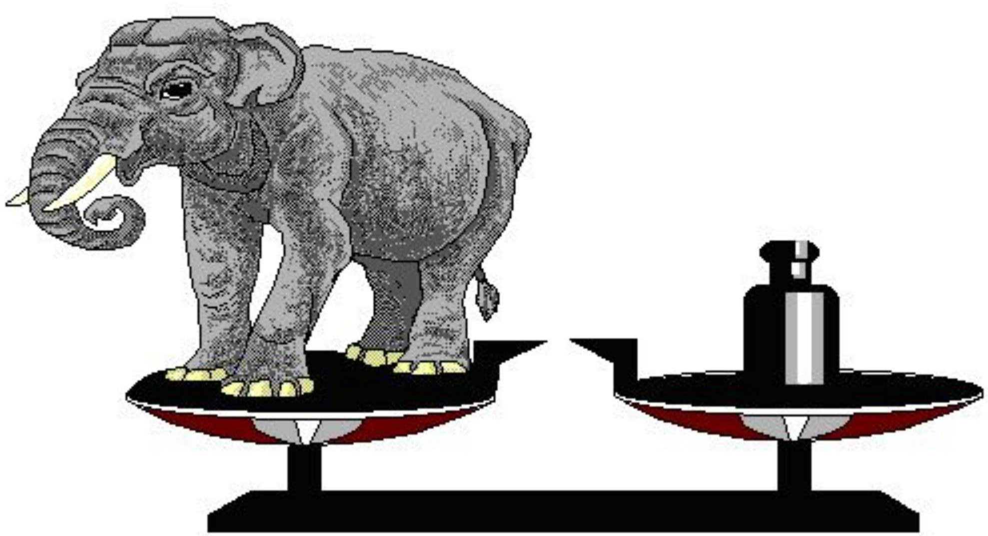
$$
\begin{array}{r}
1\,B\,A_{16} \\
-\quad A\,5\,9_{16} \\
\hline
\end{array}
$$

Системы счисления

Тема 5. Другие системы счисления

© К.Ю. Поляков, 2007-2012

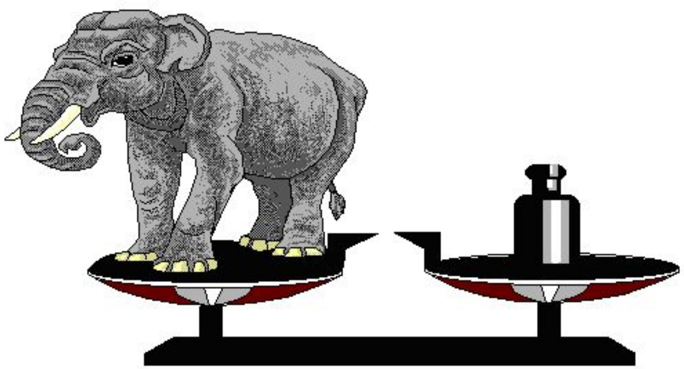
Троичная уравновешенная система



Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гири можно располагать на любой чашке весов.

Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа

0 гиря снята

– 1 гиря слева

Троичная система!

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

27 кг + 9 кг + 3 кг + 1 кг = 40 кг

$$1\quad 1\quad 1\quad 1_{3\text{ур}} = 40$$

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов

Конец фильма