

# Системы счисления

1. Введение
2. Двоичная система
3. Восьмеричная система
4. Шестнадцатеричная система
5. Другие системы счисления

# Системы счисления

## Тема 1. Введение

# Определения

---

**Система счисления** – это способ записи чисел с помощью специальных знаков – **цифр**.

**Числа:**

123, 45678, 1010011, CXL

**Цифры:**

0, 1, 2, ...      I, V, X, L, ...

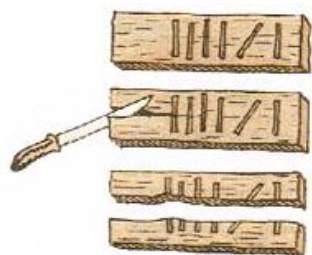
**Алфавит** – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

**Типы систем счисления:**


- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места (*позиции*) в записи числа;
- **позиционные** – зависит...

# Непозиционные системы

**Унарная** – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



**Десятичная египетская система счисления:**

чёрта	– 1	лотос	 – 1000	 – 1000000
хомут	∩ – 10	палец	 – 10000	человек
верёвка	⊖ – 100	лягушка	 – 100000	

$$\downarrow \ominus \ominus \cap \cap \cap \cap \parallel \parallel \parallel \parallel = ?$$

# Непозиционные системы

---

Римская система счисления:

**I** – 1 (палец),

**V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),

**X** – 10 (две ладони),

**L** – 50,

**C** – 100 (*Centum*),

**D** – 500 (*Demimille*),

**M** – 1000 (*Mille*)



# Римская система счисления

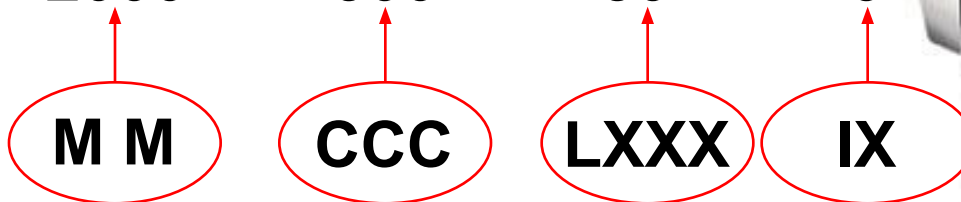
## Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично* непозиционная!)

## Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{M M C C C L X X X I X}$$



# Примеры:

---

**3768 =**

**2983 =**

**1452 =**

**1999 =**

# Римская система счисления

## Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (V, X, L, C, D, M)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:  
**СССLIX + CLXXIV = ?**

## Где используется:

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «**Пираты XX века**»
- циферблат часов
- номера месяцев



Жуковский / Ф. Е. Е. 1644 /  
10 / 11 - 885.





# Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)



Часы  
Суздальского  
Кремля

# Позиционные системы

**Позиционная система:** значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

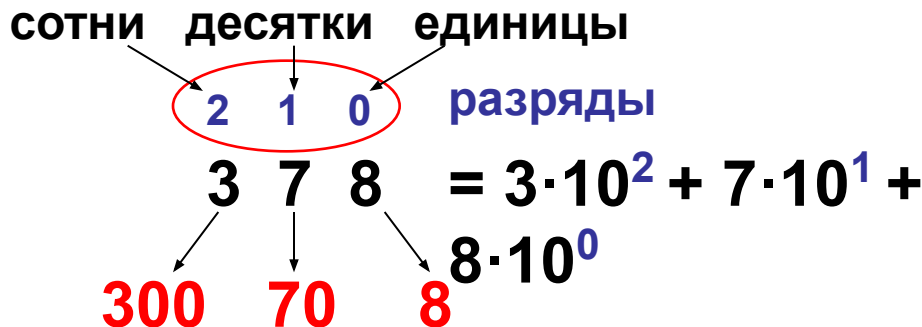
**Десятичная система:**

первоначально – счет на пальцах

изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

**Алфавит:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

**Основание** (количество цифр): 10



**Другие позиционные системы:**

- двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

# Позиционные системы

---

**Задача:** в какой системе счисления число 58 записывается как « $46_x$ »? Определите основание системы счисления  $X$ .

$$58 = 46_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому  $x > 6$
- переводим правую часть в десятичную систему

$$58 = 46_x = 4 \cdot x^1 + 6 \cdot x^0 = 4 \cdot x + 6$$

- решаем уравнение

$$58 = 4 \cdot x + 6 \quad x = 13$$

# Позиционные системы

---

**Задача:** найдите основание системы счисления, в которой выполняется равенство

$$16_x + 33_x = 52_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому  $x > 6$
- переводим в десятичную систему

$$16_x = x + 6$$

$$52_x = 5 \cdot x + 2$$

$$33_x = 3 \cdot x + 3$$

- решаем уравнение

$$4 \cdot x + 9 = 5 \cdot x + 2$$

$$x = 7$$

# Позиционные системы

**Задача:** перечислите через запятую все системы счисления, в которых выполняется неравенство

$$21_x + 32_x > 102_x$$

- в записи есть цифра 3, поэтому  $x > 3$
- переводим в десятичную систему

$$21_x = 2 \cdot x + 1 \quad 102_x = x^2 + 2$$

$$32_x = 3 \cdot x + 2$$

- решаем неравенство (перебор  $x = 4, 5, 6, \dots$ )

$$5 \cdot x + 3 > x^2 + 2$$

$$x = 4,5$$

# Позиционные системы

---

**Задача:** найдите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 30 имеет 3 значащих разряда.

- минимальное 3-разрядное число  $100_x$
- максимальное 3-х разрядное число?

$$1000_{x-1}$$

- решаем неравенство

$$100_x \leq 30 \leq 1000_{x-1}$$
$$x^2 \leq 30 \leq x^3 - 1$$

$$x = 4$$

(перебор  $x = 2, 3, 4, \dots$ )

# Системы счисления

## Тема 2. Двоичная система счисления

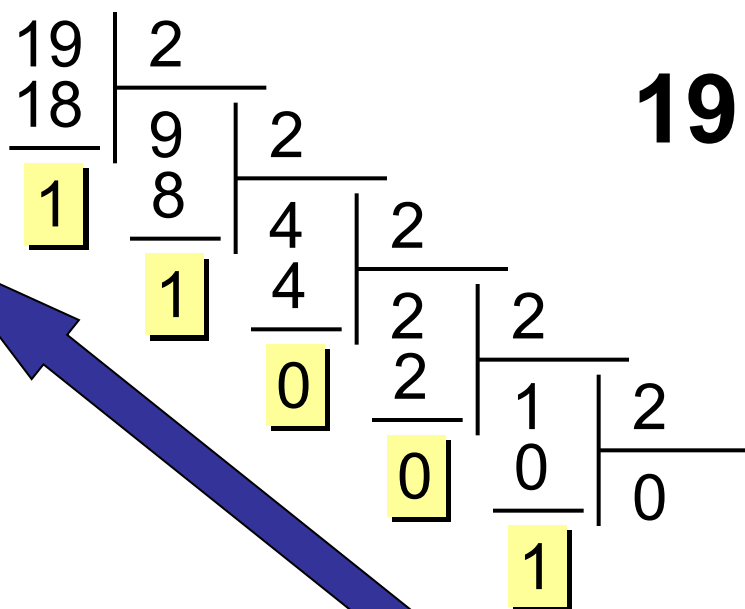
# Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): 2

**10 → 2**



$$19 = 10011_2$$

система  
счисления

**2 → 10**

4 3 2 1 0    разряды

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$



# Примеры:

---

**131 =**

**79 =**

# Примеры:

---

$$101011_2 =$$

$$110110_2 =$$



Когда двоичное число четное? делится на 8?

# Метод подбора

77  $10 \rightarrow 2$

наибольшая степень двойки, которая меньше или равна данному числу

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$

$$77 = 64 + 13 + 5 + 1$$

Разложение по степеням двойки:

$$77 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

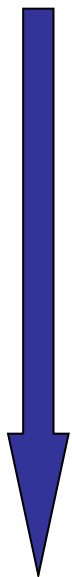
$$77 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

6 5 4 3 2 1 0 разряды

$$77 = 1001101_2$$

# Перевод дробных чисел

10 → 2



$$0,375 = 0,011_2$$

$$\times 2$$

$$\underline{0},750$$

$$0,75$$

$$\times 2$$

$$\underline{1},50$$

$$0,5$$

$$\times 2$$

$$\underline{1},0$$

$$0,7 = ?$$

$$0,7 = 0,101100110\dots$$

$$= 0,1(0110)_2$$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0,25$$

2 1 0 -1 -2 -3 разряды

$$101,011_2$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 0,25 + 0,125 = 5,375$$

**Примеры:**

---

**0,625 =**

**3,875 =**

# Арифметические операции

## сложение

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=10_2$$

$$1 + 1 + 1 = 11_2$$

перенос

## вычитание

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad 10_2-1=1$$

заем

1 1 1 1 1

1 0 1 1 0<sub>2</sub>

+ 1 1 1 0 1 1<sub>2</sub>

---

1 0 1 0 0 0 1

2

0 1 1 10<sub>2</sub> 0 10<sub>2</sub>

~~1 0 0 0~~ 1 0 1<sub>2</sub>

- 1 1 0 1 1<sub>2</sub>

---

0 1 0 1 0 1 0

2

# Примеры:

---

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

# Примеры:

---

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110011_2 \\ - 10101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 110101_2 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 110101_2 \\ - 11011_2 \\ \hline \end{array}$$



# Арифметические операции

умножение



$$\begin{array}{r} 10101_2 \\ \times 10 \\ \hline 1_210101_2 \\ + 10101_2 \\ \hline 1101001_2 \end{array}$$

деление

$$\begin{array}{r} 10101_2 \bigg| 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 0 \end{array}$$

# Плюсы и минусы двоичной системы

---

-  нужны устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
  - **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов
  - выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными
- 
-  двоичные числа имеют **много разрядов**;
  - запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.

# Двоично-десятичная система

**BCD** = *binary coded decimals* (десятичные цифры в двоичном коде)

**10 → BCD**

$$9024,19 = 1001 \mathbf{0000} 0010 \mathbf{0100}, 0001 \mathbf{1001}_{\text{BCD}}$$

9      0      2      4      ,      1      9

**BCD → 10**

$$1 \ 0101 \ 0011, \ 0111 \ 1_{\text{BCD}} =$$
$$\mathbf{0001 \ 0101 \ 0011, \ 0111 \ 1000}_{\text{BCD}} = \mathbf{153,78}$$



Запись числа в BCD не совпадает с двоичной!

$$10101,1_{\text{BCD}} = \mathbf{15,8}$$

$$10101,1_2 = 16 + 4 + 1 + 0,5 = \mathbf{21,5}$$

# Системы счисления

## Тема 3. Восьмеричная система счисления

# Восьмеричная система

Основание (количество цифр): 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8

$$\begin{array}{r|l} 101 & 8 \\ \hline 96 & 12 \quad 8 \\ \hline 5 & 8 \quad 1 \quad 8 \\ \hline & 4 \quad 0 \quad 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$101 = 145_8$$

система  
счисления

8 → 10

2 1 0 разряды

$$\begin{aligned} 145_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 5 = 101 \end{aligned}$$

# Примеры:

---

$$134 =$$

$$75 =$$

$$134_8 =$$

$$75_8 =$$

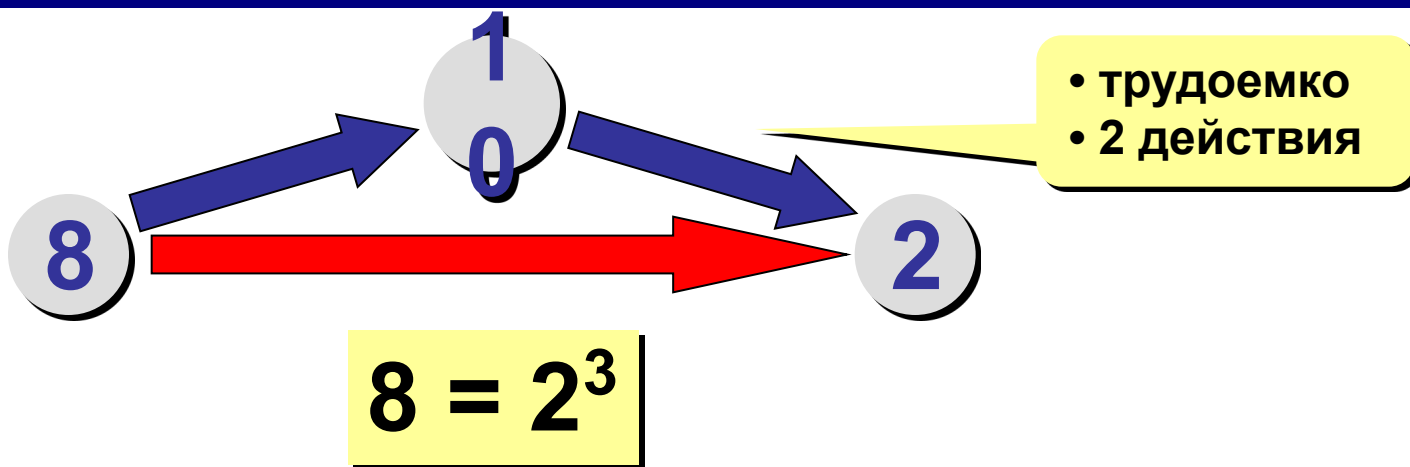
# Таблица восьмеричных чисел

---

$X_{10}$	$X_8$	$X_2$
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

$X_{10}$	$X_8$	$X_2$
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

# Перевод в двоичную и обратно



**!** Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_1 \underbrace{111}_7 \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5_2$$



# Примеры:

---

$$3467_8 =$$

$$\del{2148}_8 =$$

$$7352_8 =$$

$$1231_8 =$$

# Перевод из двоичной системы

---

$1001011101111_2$

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$   
 $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{7}$

Ответ:  $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

---

$$101101010010_2 =$$

$$11111101011_2 =$$

$$1101011010_2 =$$

# Арифметические операции

сложение

1 1 1

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

$$6 + 2 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

$$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$$

1 в перенос

$$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

# Пример

---

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

# Арифметические операции

## ВЫЧИТАНИЕ

$$\begin{array}{r} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 4 \ 5 \ 6_8 \\ - 2 \ 7 \ 7_8 \\ \hline 1 \ 5 \ 7_8 \end{array}$$

заем

$$(6 + 8) - 7 = 7$$

заем

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

# Примеры

---

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

# Системы счисления

## Тема 4. Шестнадцатеричная система счисления



# Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): 16

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**  
10 11 12 13 14 15

10 → 16

$$\begin{array}{r|l} 107 & 16 \\ \hline 96 & 6 \\ \hline & 0 \\ \hline & 0 \end{array}$$

11

B

6

$$107 = 6B_{16}$$

система  
счисления

16 → 10

2 1 0 разряды

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

# Примеры:

---

$$171 =$$

$$1BC_{16} =$$

$$206 =$$

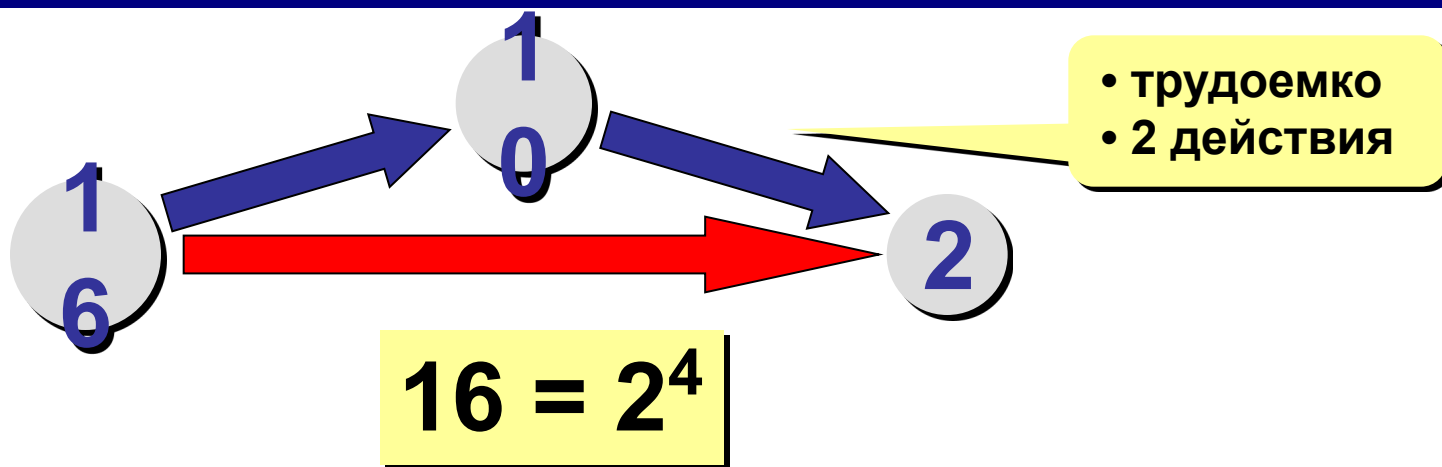
$$22B_{16} =$$

# Таблица шестнадцатеричных чисел

$X_{10}$	$X_{16}$	$X_2$
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

$X_{10}$	$X_{16}$	$X_2$
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

# Перевод в двоичную систему



**!** Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \quad \underbrace{1111}_F \quad \underbrace{0001}_1 \quad \underbrace{1010}_A_2$$

# Примеры:

---

$$C73B_{16} =$$

$$2FE1_{16} =$$

# Перевод из двоичной системы

---

$1001011101111_2$

**Шаг 1.** Разбить на тетрады, начиная справа:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$

**Шаг 2.** Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$   
 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{E}\ \boxed{F}$

**Ответ:**  $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

Примеры:

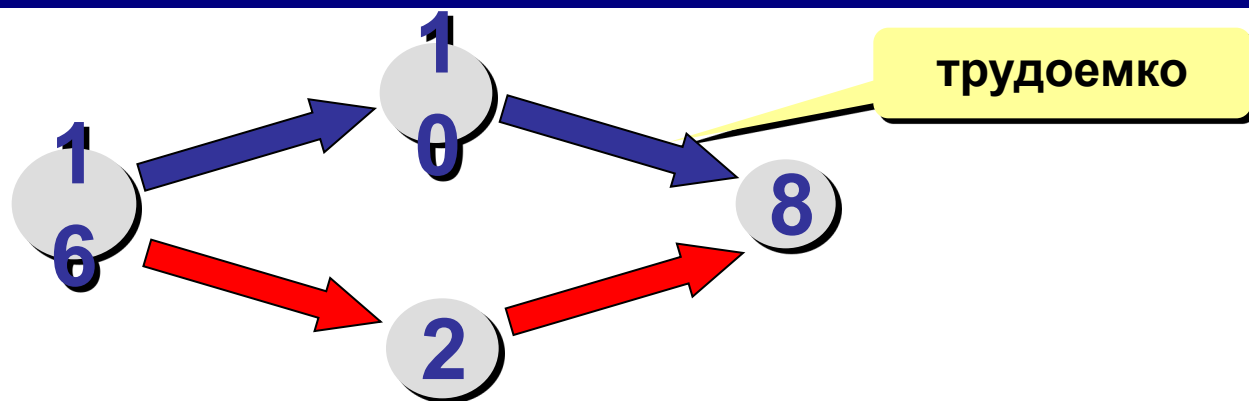
---

$$1010101101010110_2 =$$

$$111100110111110101_2 =$$

$$110110110101111110_2 =$$

# Перевод в восьмеричную и обратно



**Шаг 1.** Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

**Шаг 2.** Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

**Шаг 3.** Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$



Примеры:

---

$$A35_{16} =$$

$$765_8 =$$

# Арифметические операции

## сложение

$$\begin{array}{r} \text{A } 5 \text{ B}_{16} \\ + \text{C } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{D } 9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ \text{10 } 5 \text{ 11} \\ + \text{12 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{13 } 9 \end{array}$$

1 в перенос

$$11 + 14 = 25 = 16 + 9$$

$$5 + 7 + 1 = 13 = \text{D}_{16}$$

1 в перенос

$$10 + 12 = 22 = 16 + 6$$

# Пример:

---

$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

# Арифметические операции

## ВЫЧИТАНИЕ

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D } \text{D}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{12 } 5 \text{ 11} \\ - \text{10 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 13 } \text{13} \end{array}$$

заем

заем

$$(11 + 16) - 14 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(5 - 1) + 16 - 7 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(12 - 1) - 10 = 1$$

# Пример:

---

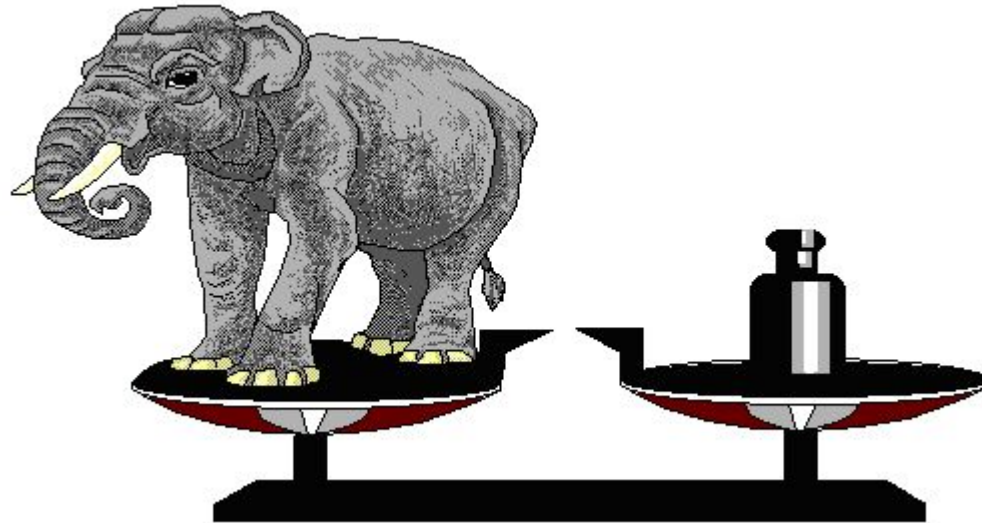
$$\begin{array}{r} 1 \text{ B A}_{16} \\ - \text{ A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

# Системы счисления

## Тема 5. Другие системы счисления

# Троичная уравновешенная система

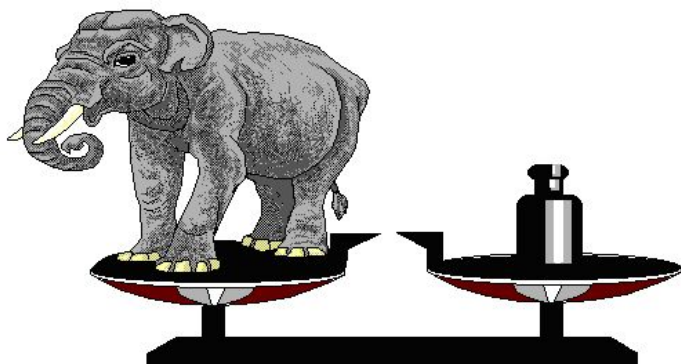
---



## Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гирь можно располагать на любой чашке весов.

# Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа  
0 гиря снята  
- 1 гиря слева

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

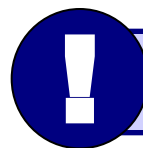
$27 \text{ кг} + 9 \text{ кг} + 3 \text{ кг} + 1 \text{ кг} = 40 \text{ кг}$

1 1 1 1<sub>Зур</sub> = 40

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов



Троичная система!



# Конец фильма

---