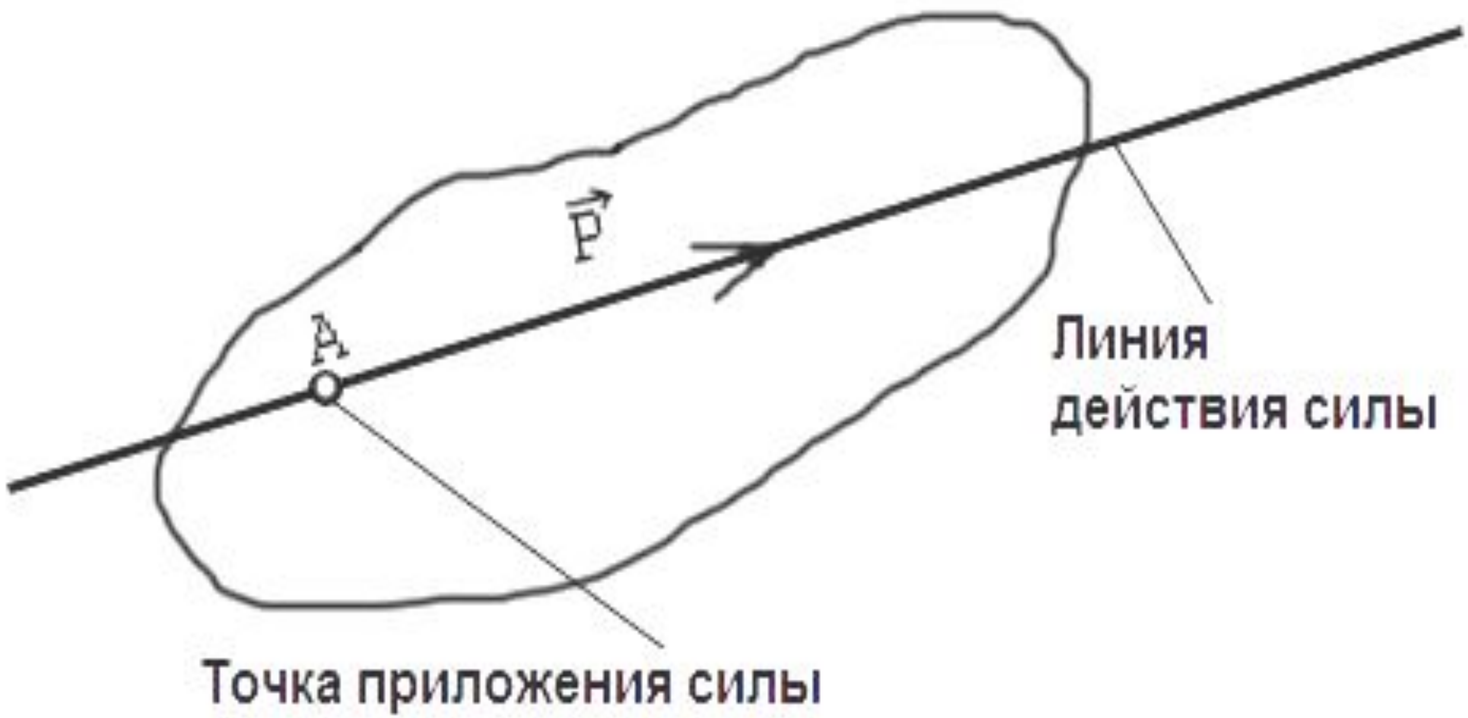
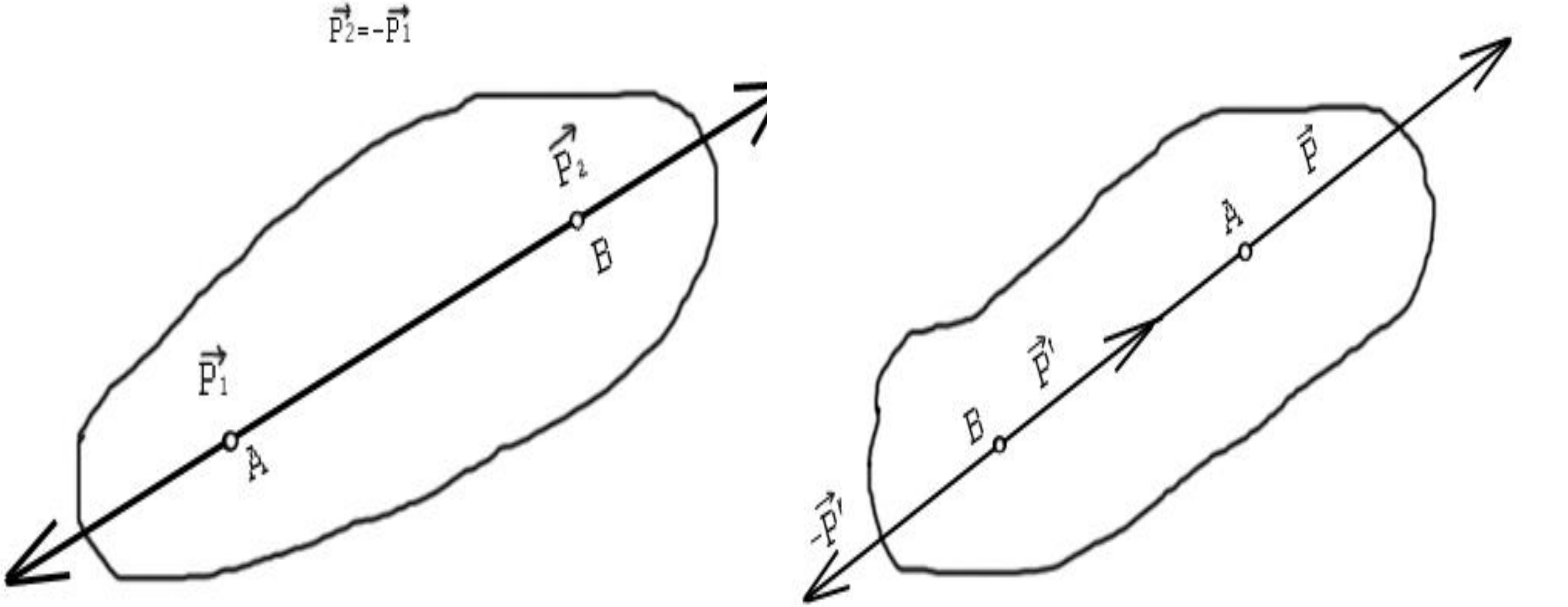
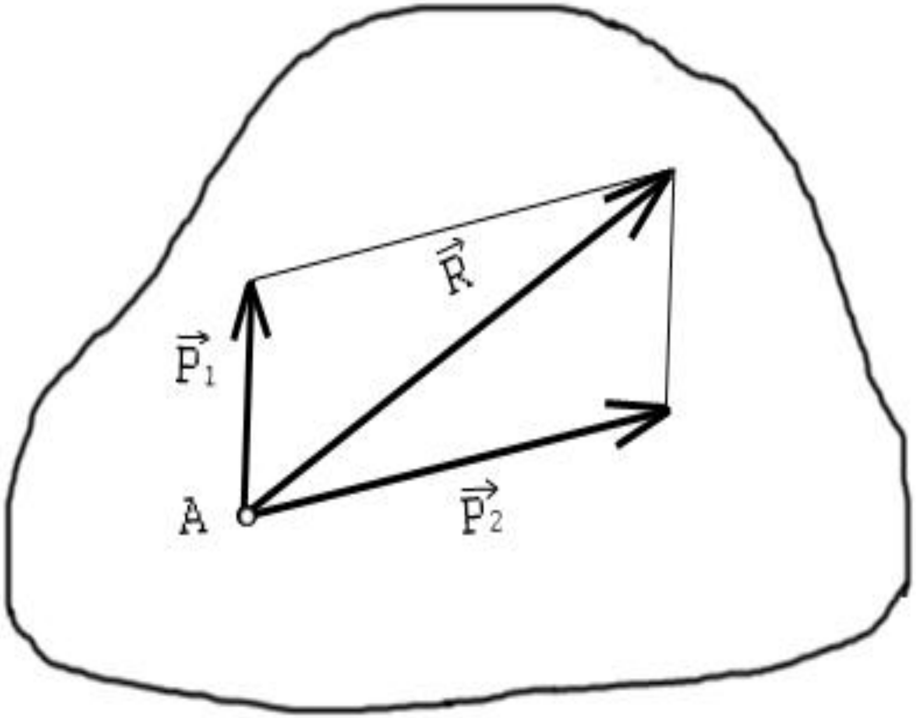
СТАТИКА

Основные понятия



Аксиомы Статики

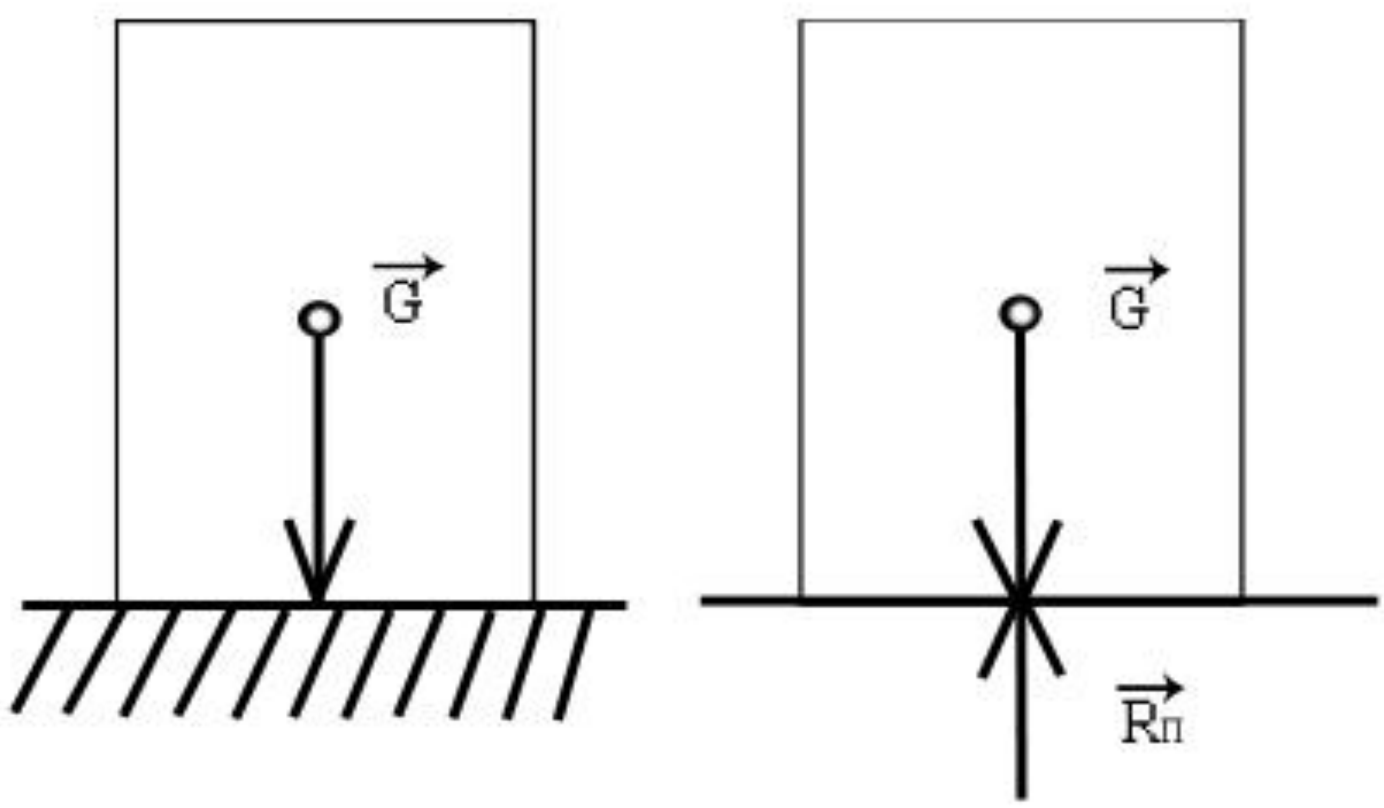




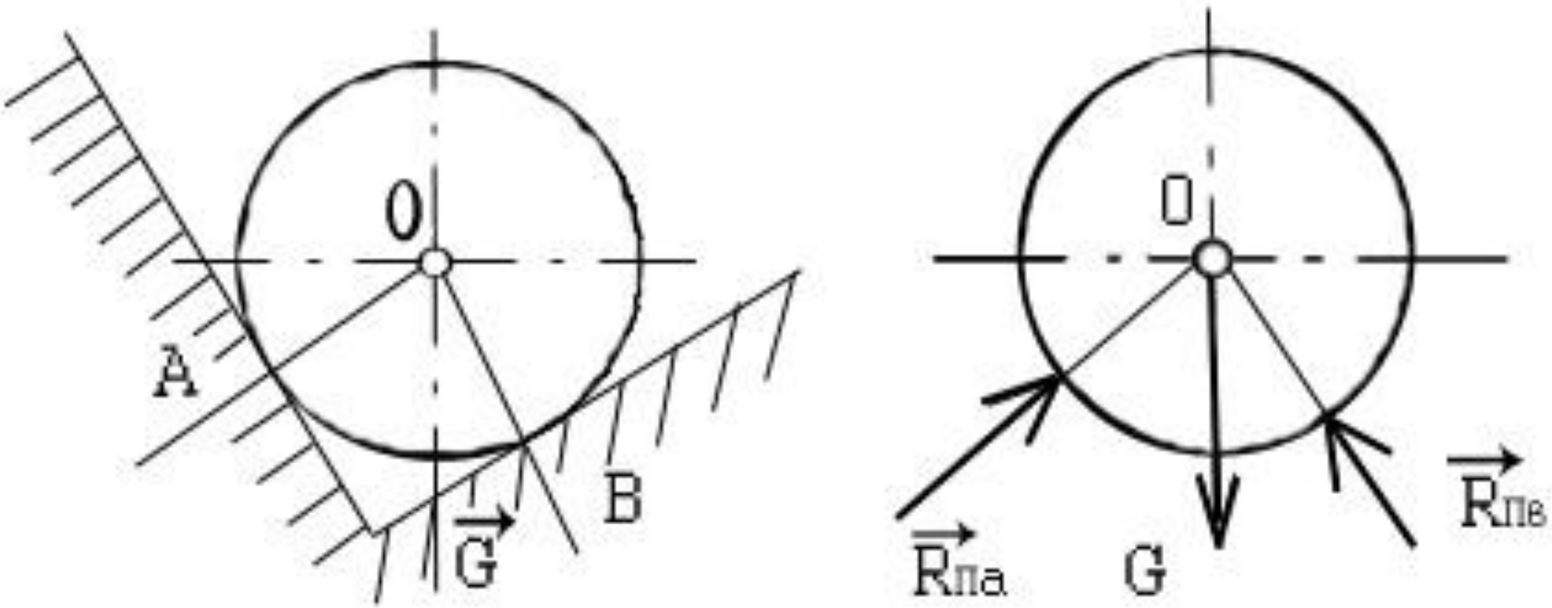
$\vec{R}=\vec{P}_1+\vec{P}_2$

Связи и их реакции

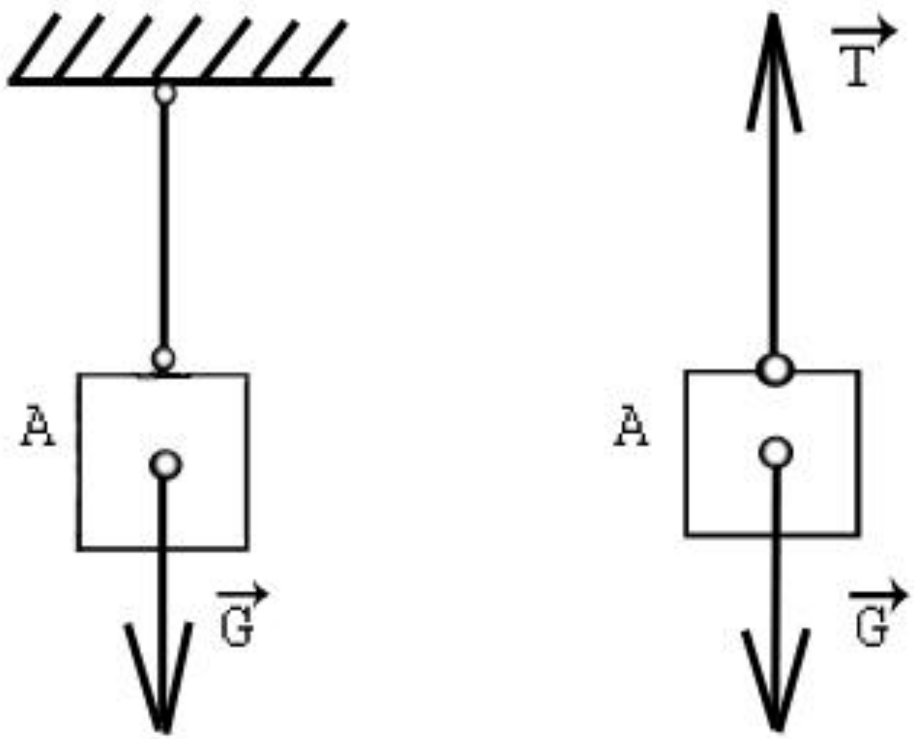
Гладкая поверхность



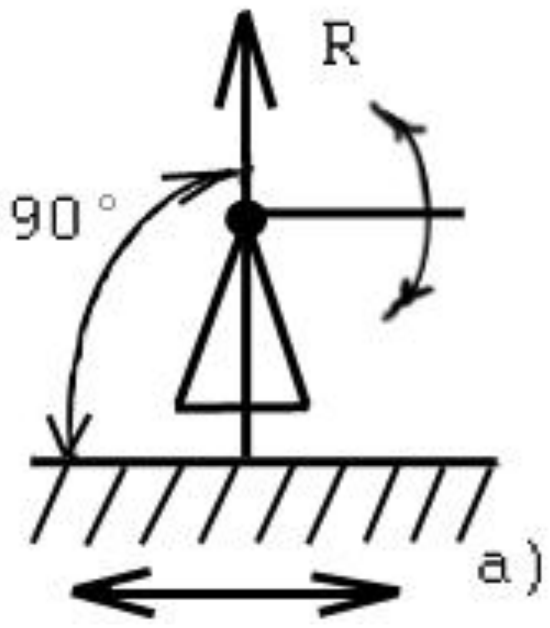
Гладкая поверхность

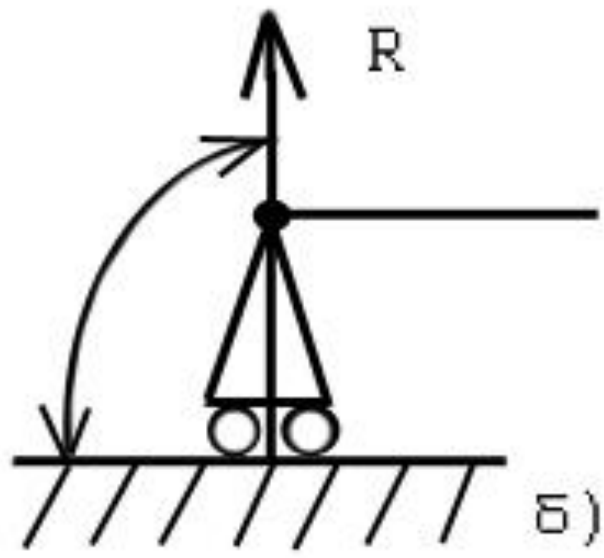


Гибкая связь

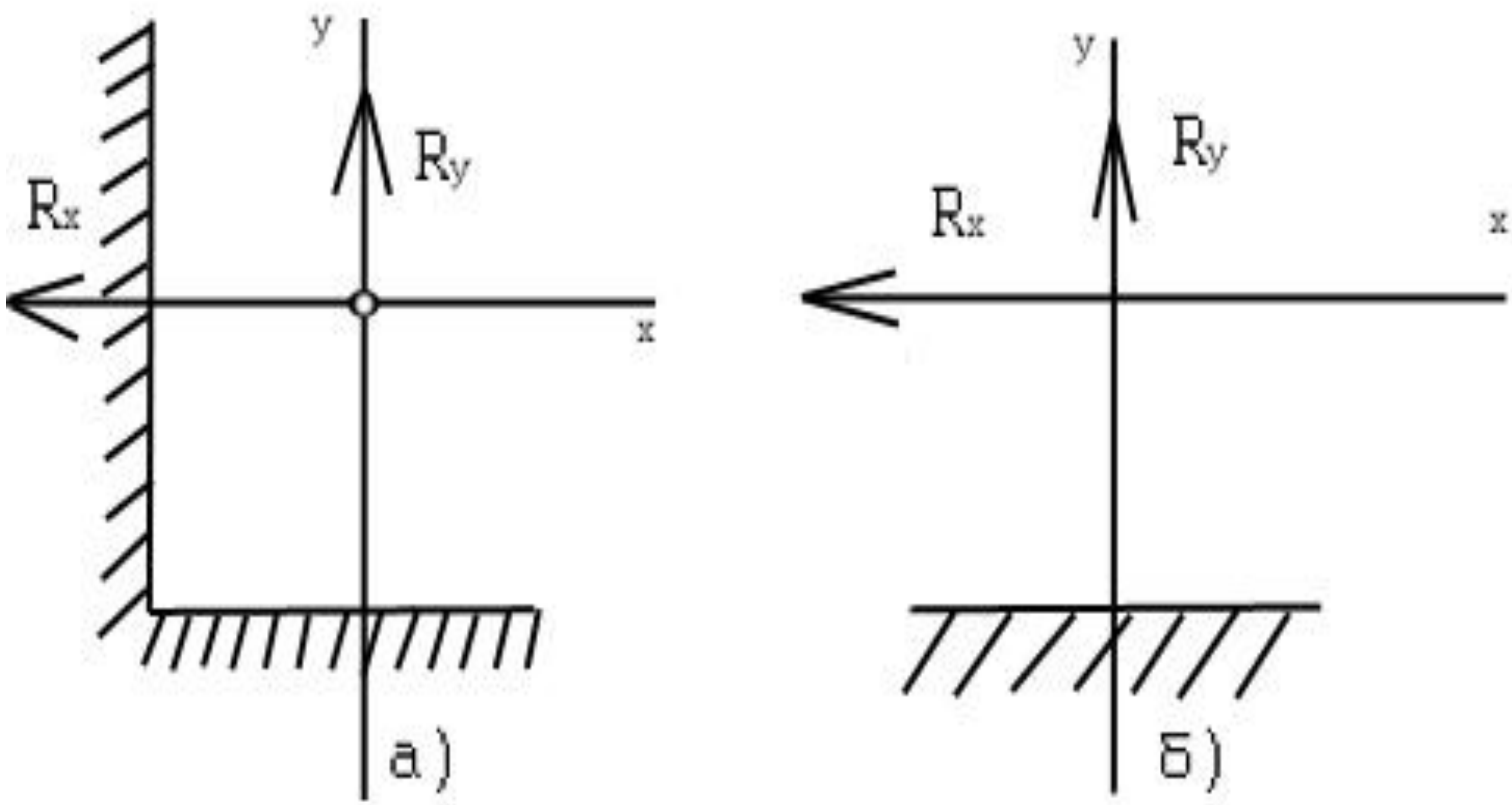


Подвижный шарнир

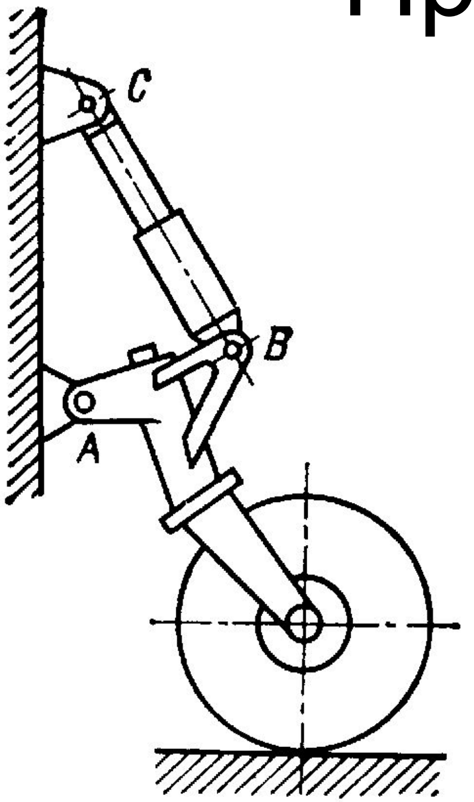


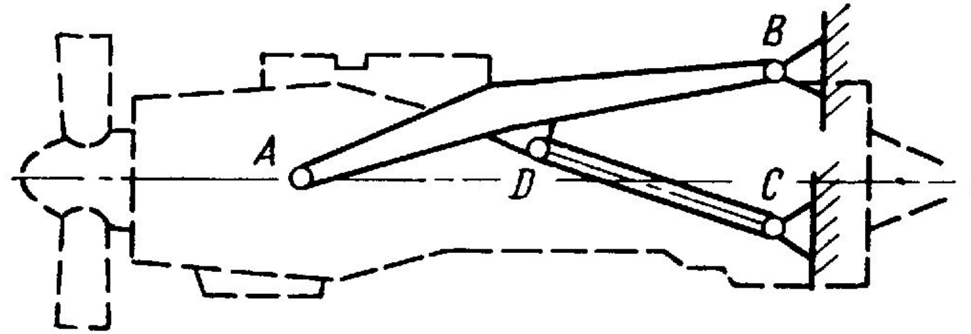


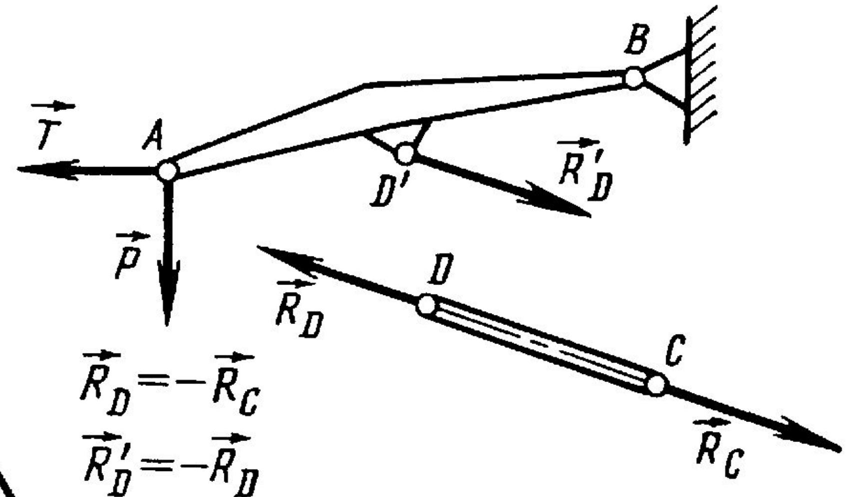
Неподвижный шарнир

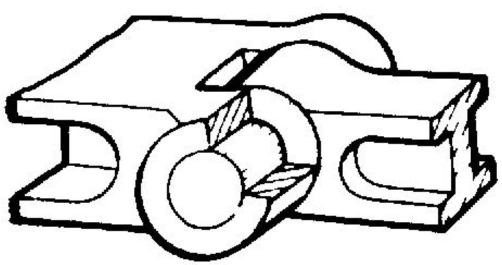


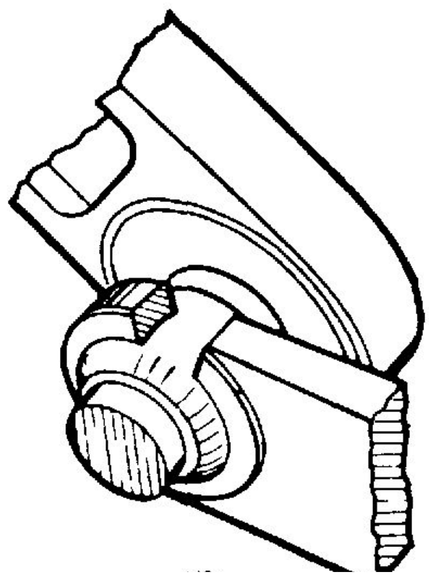
Примеры шарниров



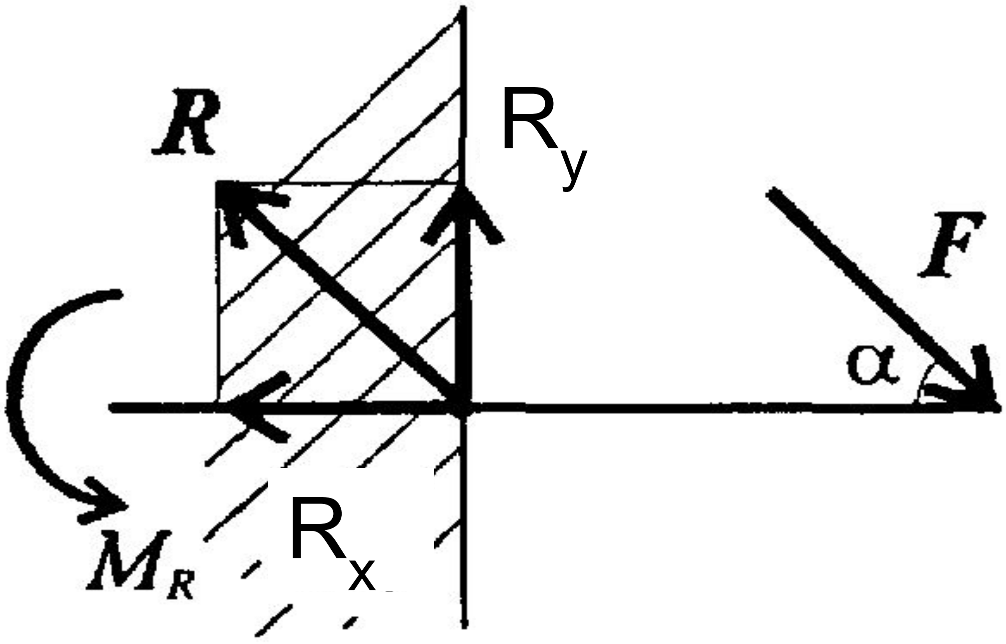




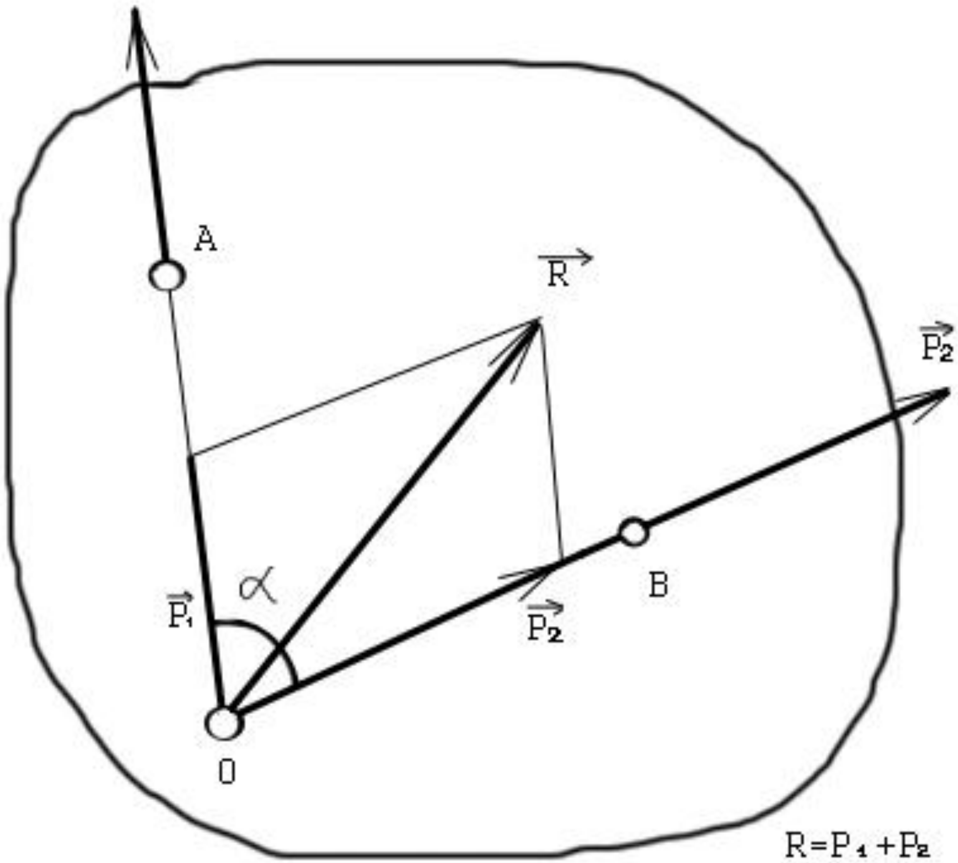


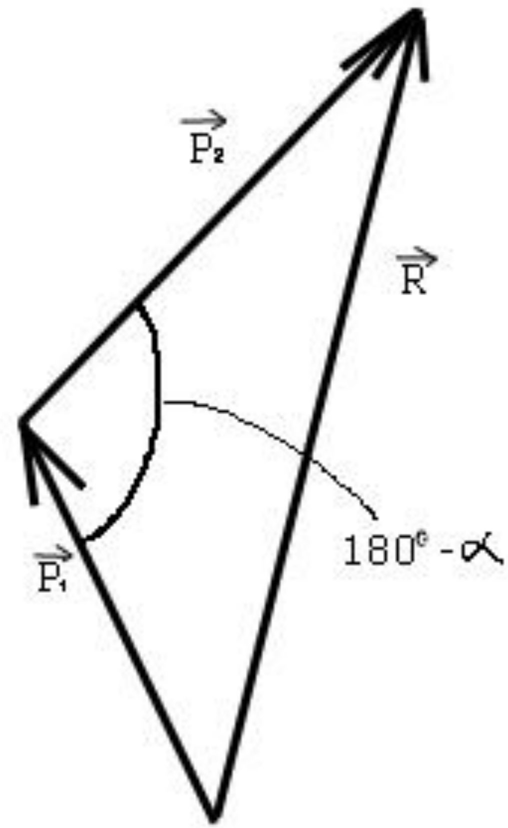


Защемление или «заделка»



Система сходящихся сил



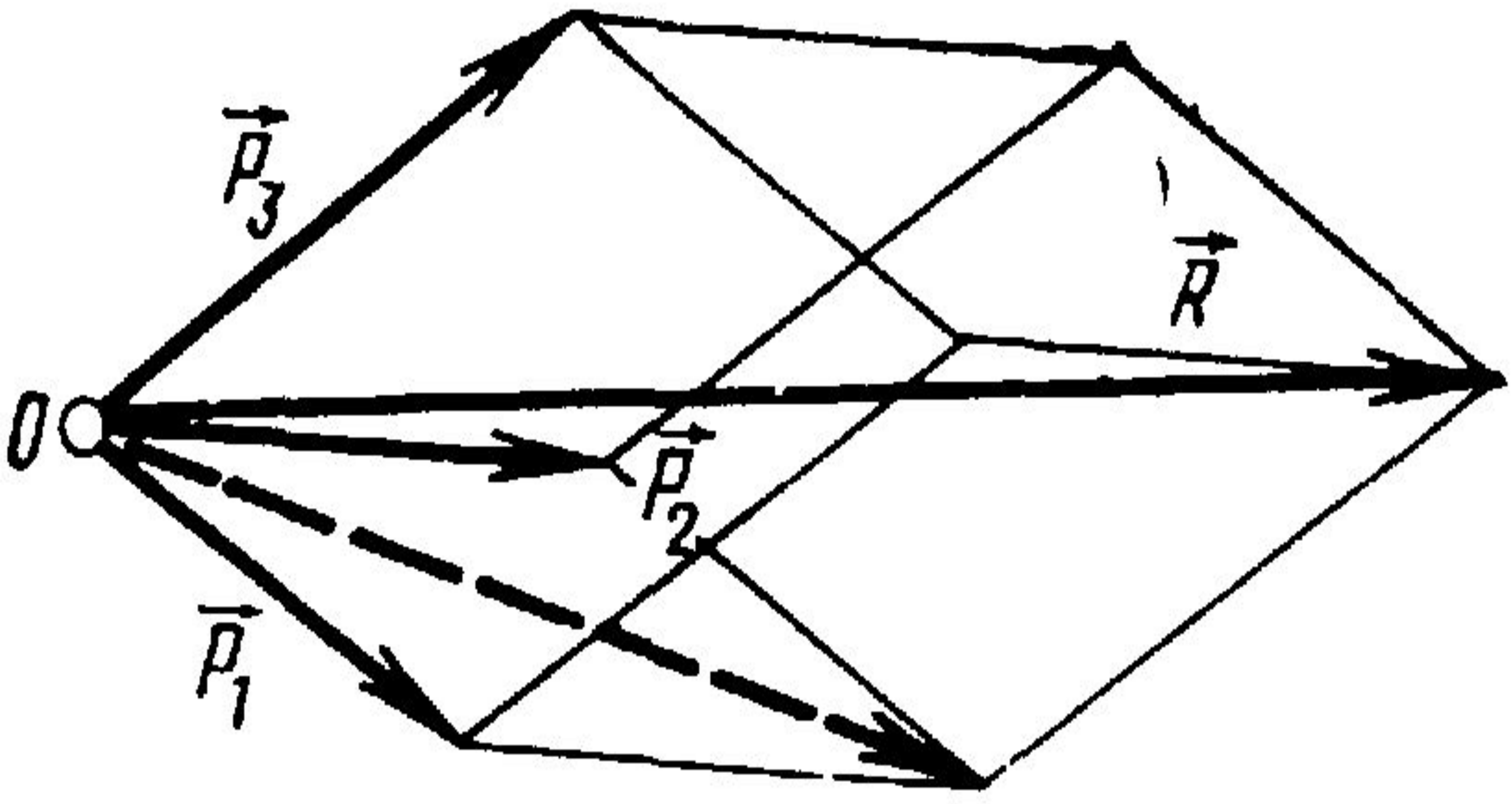


$R = P_1 + P_2$

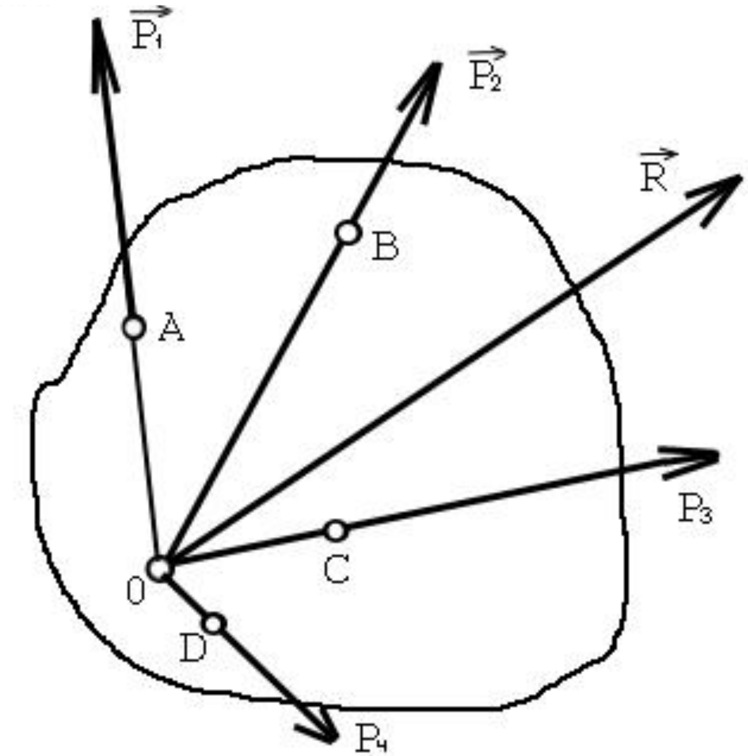
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos(180 - \alpha)}$$

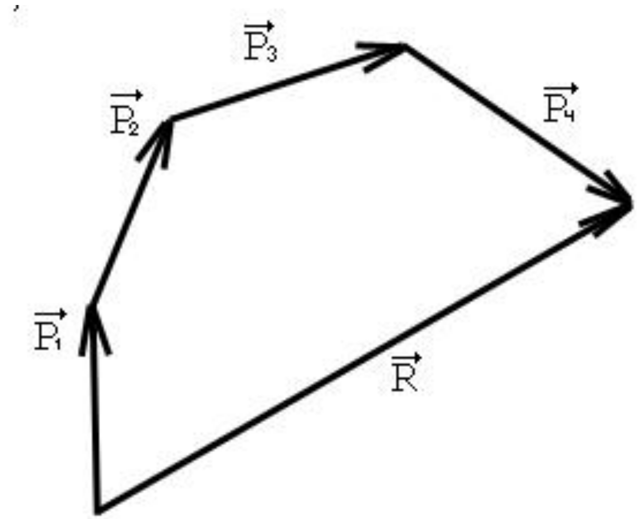
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\left(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P}\right)}$$

Пространственная система из трех сил



$$R = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3} + \overline{P_4} \qquad \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} P_i$$



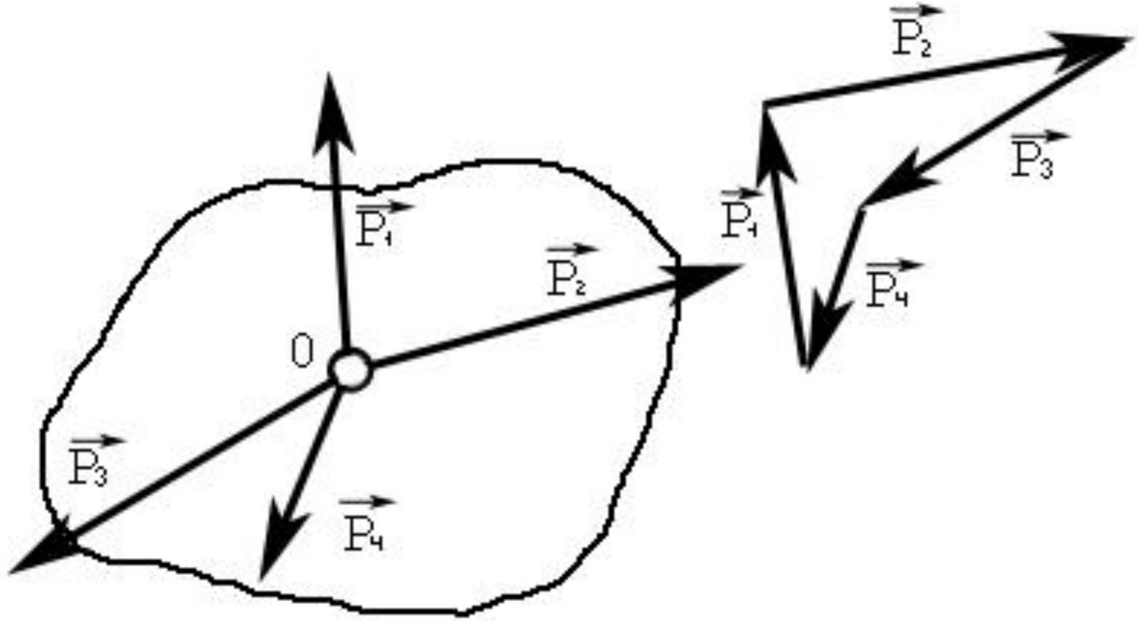


$$\overline{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\overline{k}$$

$$R = \left(\sum_{i=1}^{n} P_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} P_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} P_{iz}\right)^2$$

$$\cos\left(\overline{\vec{R},x}\right) = \frac{R_x}{R}, \cos\left(\overline{\vec{R},y}\right) = \frac{R_y}{R}, \cos\left(\overline{\vec{R},z}\right) = \frac{R_z}{R}$$

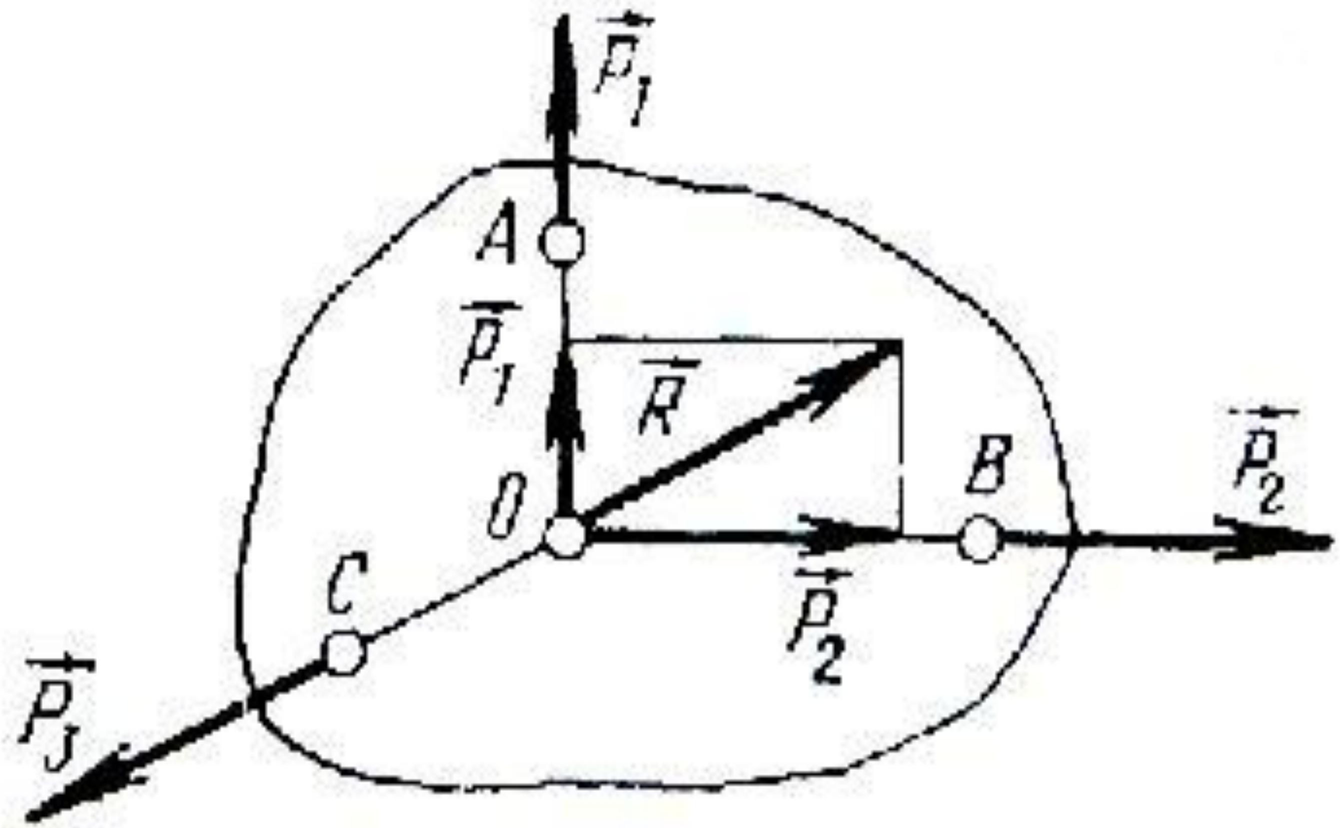
Равновесие системы сходящихся сил



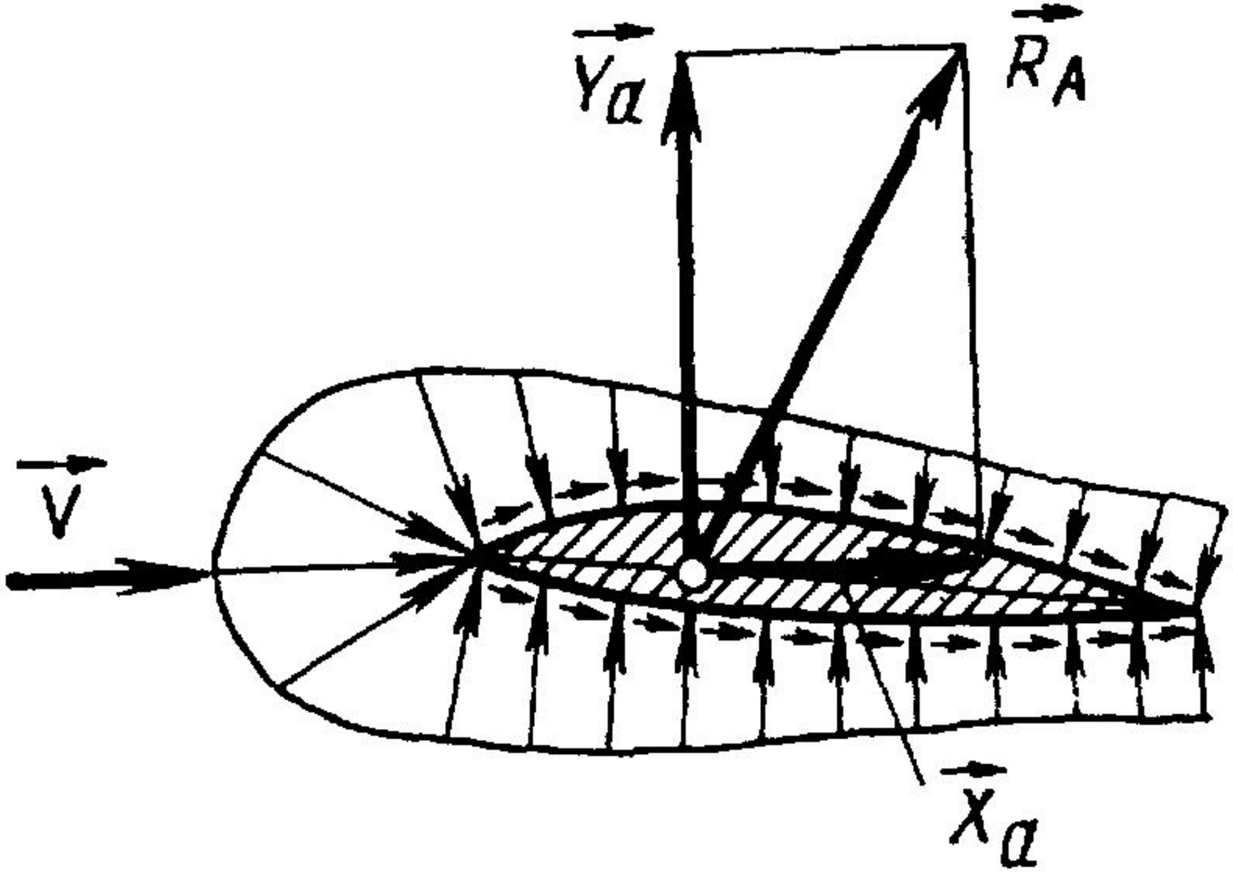
$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} P_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} P_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} P_{iz}\right)^2} = 0$$

$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^{n} P_{iz}$

Теорема о трёх силах



Сходящиеся силы, приложенные к самолёту



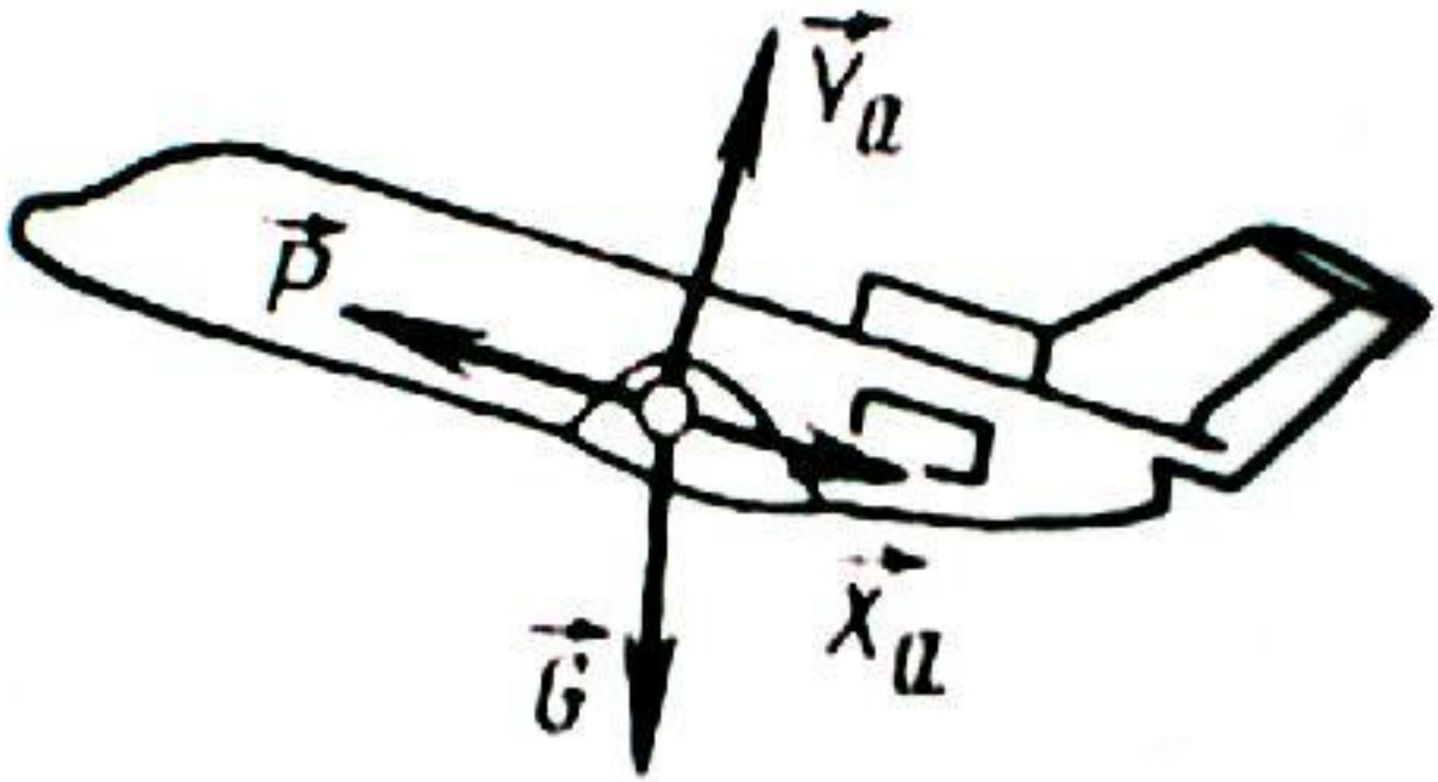
Ra – аэродинамическая сила крыла

G – сила тяжести (вес ВС),

P – тяга винта (или газотурбинного двигателя),

Xa – сила лобового сопротивления ВС

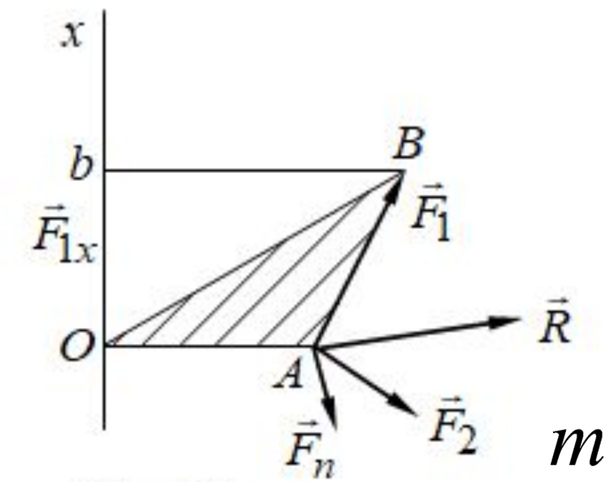
Ya – аэродинамическая подъемная сила



Теорема Вариньона

о моменте равнодействующей
сходящейся системы сил

$$OA \cdot \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} (OA \cdot F_{ix}).$$

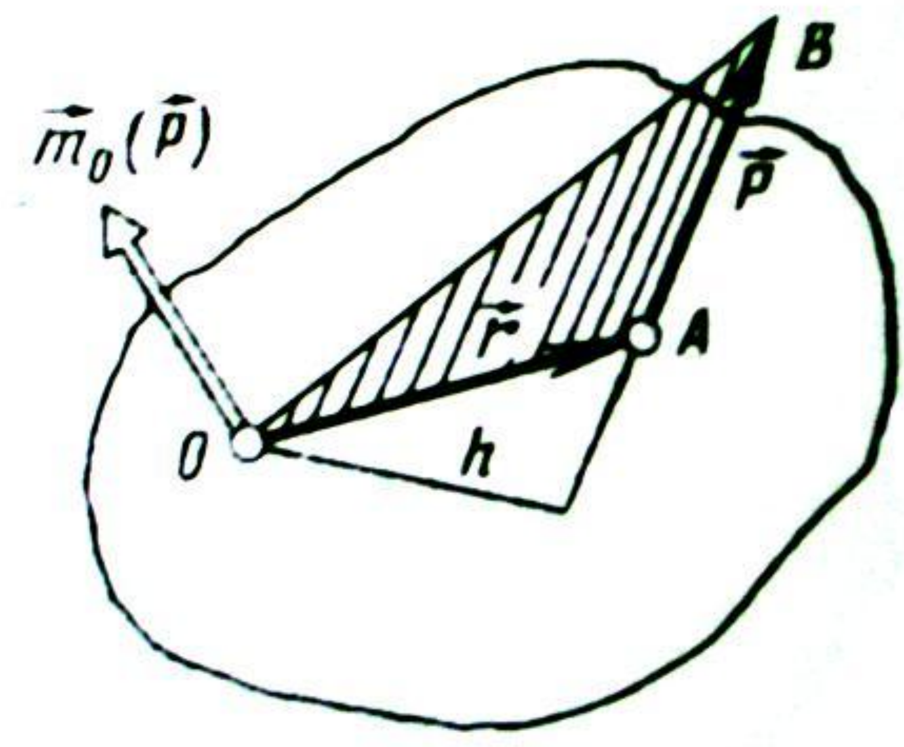


$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$

$$m_0(\vec{F}_1) = 2пл.\Delta OAB = OA \cdot Ob = OA \cdot \vec{F}_{1x}$$

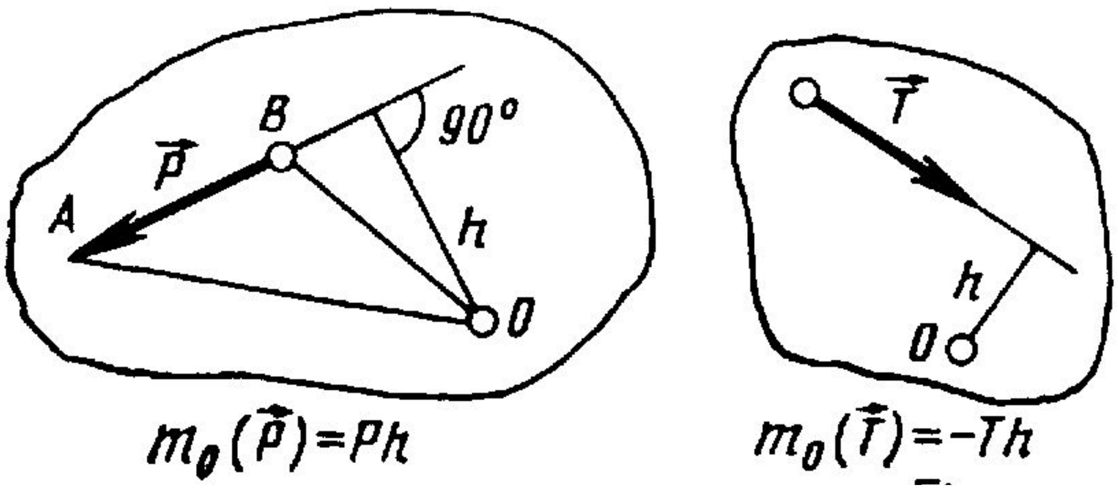
$$m_0(R) = \sum_{i=1}^{n} m_0(\vec{F}_i)$$

Момент силы, относительно центра, представленный в виде вектора



$$\left|\vec{r} \times \vec{P}\right| = 2S\,\Delta AOB$$

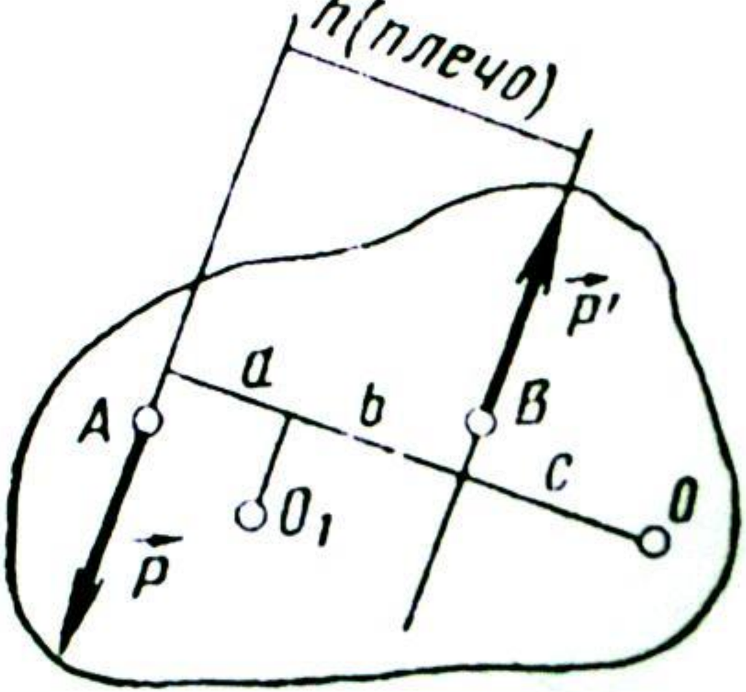
$$\vec{m}_o(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}$$

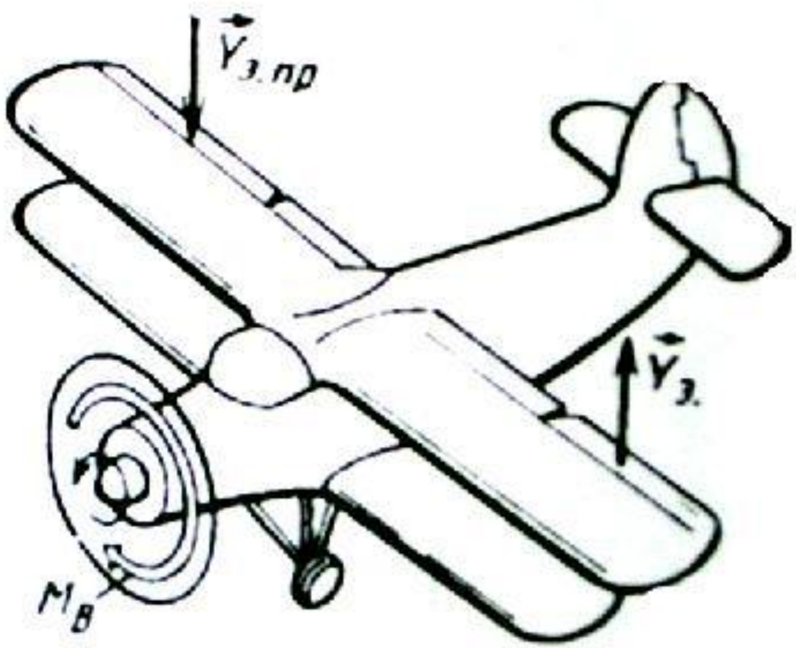


$$m_0(\vec{P}) = 2 \cdot 0{,}5Ph = 2 \cdot S\Delta AOB$$

$$m_0(\vec{P}) = Ph$$

Пара сил. Момент пары

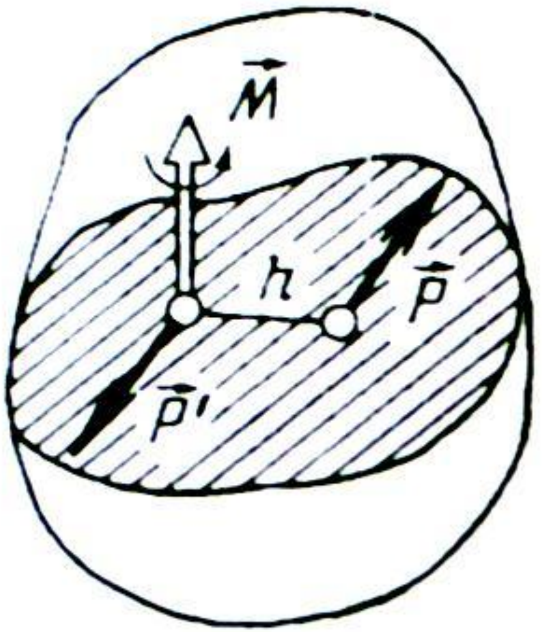




$$\overrightarrow{m_0}(\vec{P}) + \overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{P'}) = P(h + c) - P'c = Ph$$

$$\overrightarrow{m_{0_1}}(\vec{P}) + \overrightarrow{m_{0_1}}(\overrightarrow{P'}) = Pa + Pb = Ph$$

Момент пары, как вектор



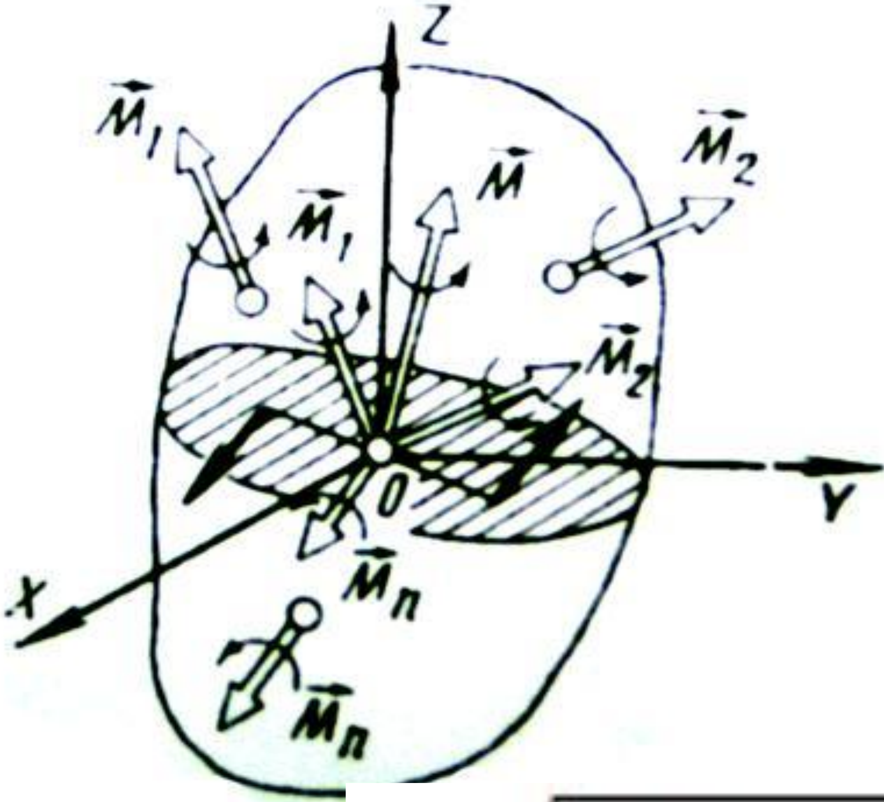
$$\vec{m}_O(\vec{P}) + \vec{m}_O(\vec{P}') = \vec{M}(\vec{P}, \vec{P}')$$

$$\vec{m}_O(\vec{P}') + \vec{m}_O(\vec{P}) = (\vec{r}_A \times \vec{P}') + (\vec{r}_B \times \vec{P}).$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB} \text{ и } \vec{P}' = -\vec{P},$$

$$\vec{m}_O(\vec{P}') + m_O(\vec{P}) = -(\vec{r}_A \times \vec{P}) + (\vec{r}_A \times \vec{P}) + (\vec{r}_{AB} \times P)$$

Сложение пар. Равновесие тела под действием системы пар

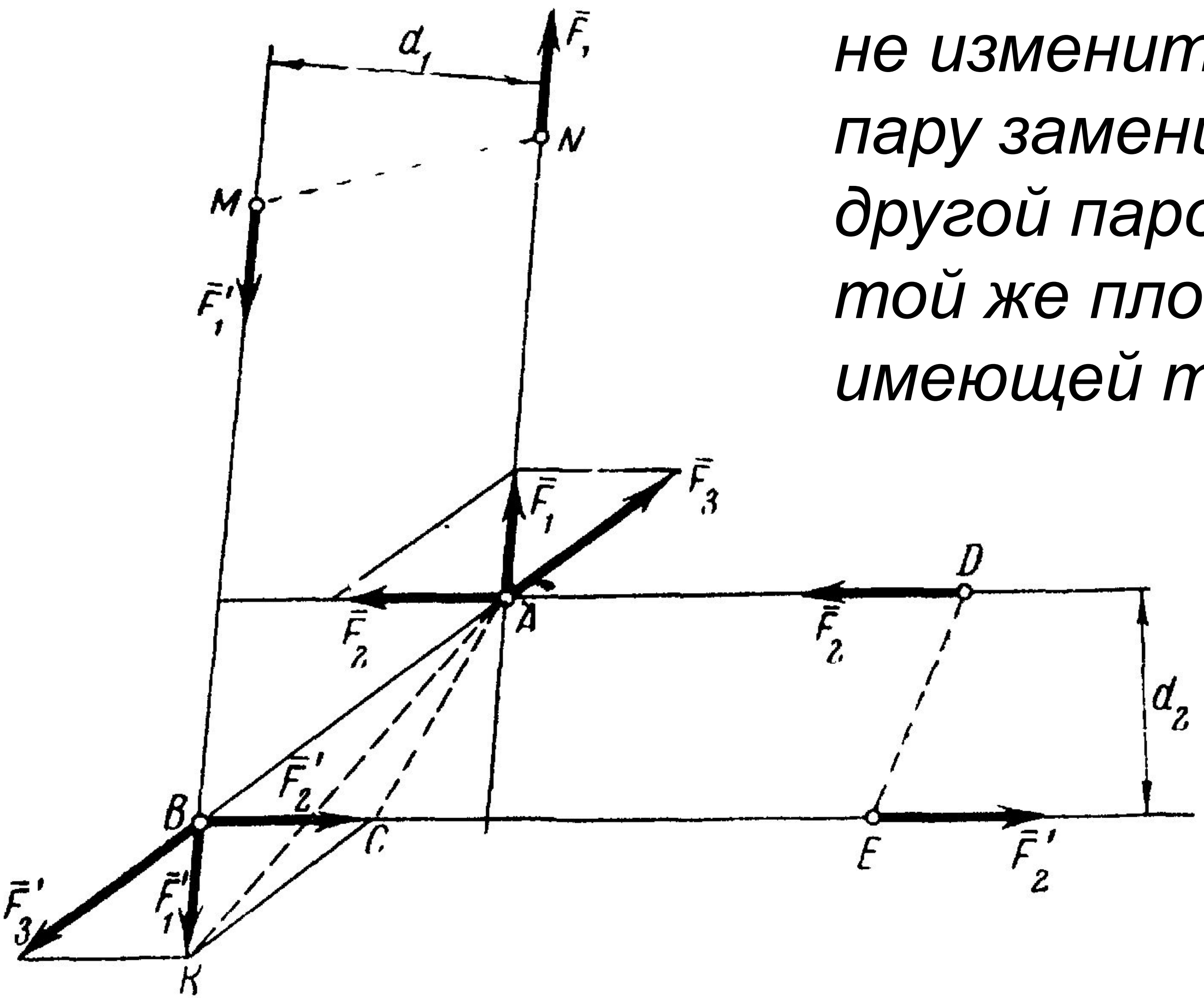


$$m(\overline{P_1, P'_1}) = 2S\Delta ABK$$

$$m(\overline{P_2, P'_2}) = 2S\Delta ABC$$

$$M = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} M_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{iz}\right)^2}$$

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПАР



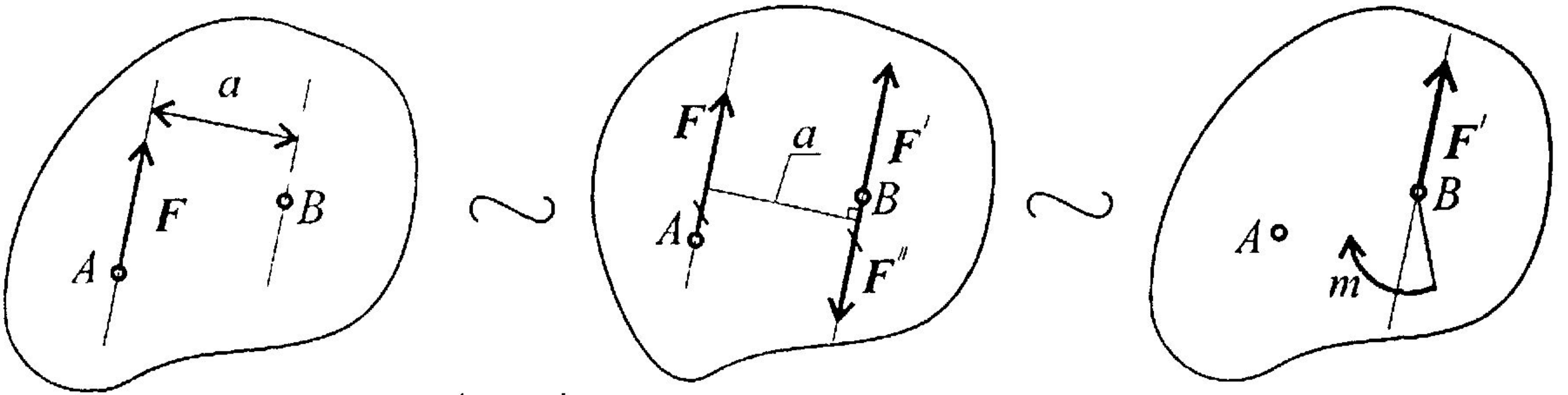
Действие пары на тело не изменится, если эту пару заменить любой другой парой, лежащей в той же плоскости и имеющей то же момент.

Свойства пары сил:

1. *Действие пары на тело не изменится, если переместить пару в другое положение в плоскости ее действия.*

2. *Действие пары на тело не изменится, если одновременно изменить модуль сил пары и величину ее плеча, сохраняя при этом численное значение и знак, момента пары.*

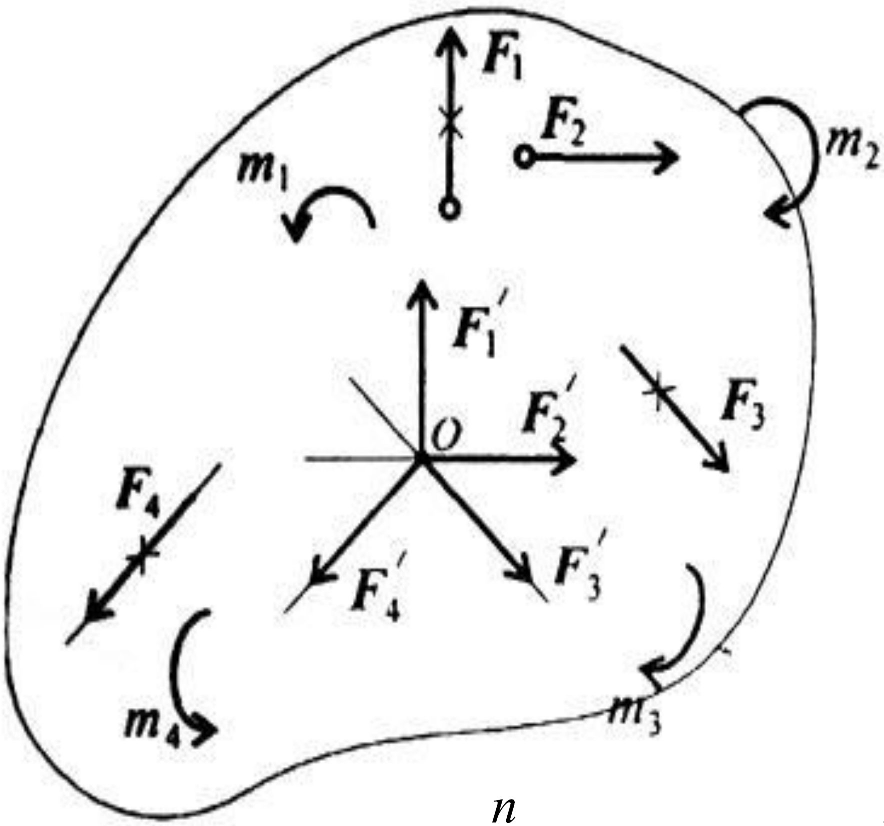
Теорема Пуансо о параллельном переносе сил

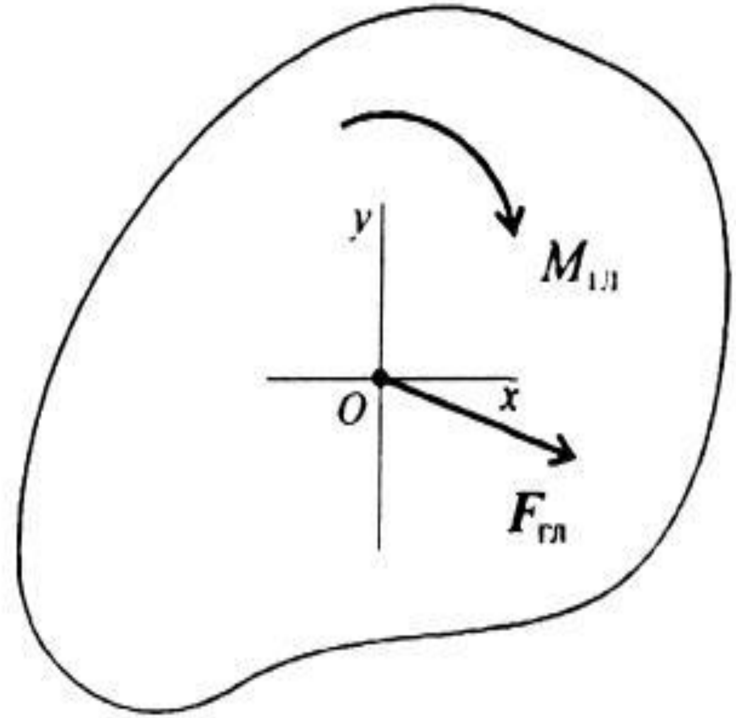


$|\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{F}'| = |\boldsymbol{F}'|$

$m = Fa$

Привидение к точке плоской системы произвольно расположенных сил





$$F_{гл} = \sum_{0}^{n} F_{к} \qquad F_{гл_y} = \sum_{0}^{n} F_{кy} \qquad F_{гл_x} = \sum_{0}^{n} F_{кx} \qquad F = \sqrt{F_{гл_x}^{2} + F_{гл_y}^{2}}$$

$$M_{гл_0} = \sum_{k=0}^{n} m_0(F_k) \qquad M_{гл_0} = m_1 + m_2 + m_3 \ldots + m_n$$

Точку приложения равнодействующей можно определить по формуле

$$d = \frac{M_{гл}}{F_{гл}}$$

где d – расстояние от выбранной точки приведения до точки приложения равнодействующей;

$M_{гл}$ – величина главного момента относительно выбранной точки приведения;

$F_{гл}$ – величина главного вектора системы сил.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}_x}^2 + F_{\text{гл}_y}^2} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0, \end{cases}$$

где F_{kx} и F_{ky} — проекции векторов на оси координат.

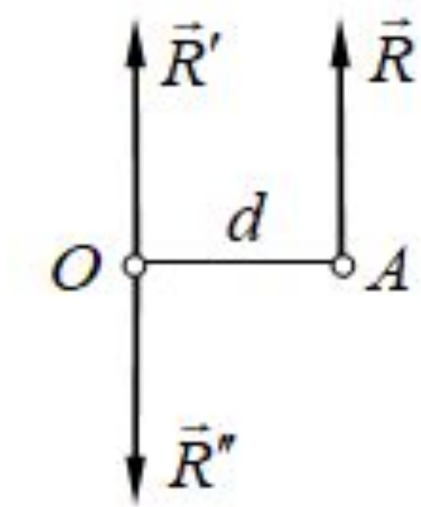
$$M_{\text{гл}_O} = \sum_0^n m_O(\boldsymbol{F}_k) = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \sum\limits_0^n m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum\limits_0^n m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0, \end{matrix}$$

где A и B — разные точки приведения.

Основная форма уравнения равновесия:

$$\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_0^n F_{kx} = 0;\\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0;\\ \left.\begin{array}{l}\sum\limits_0^n m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0;\\ \sum\limits_0^n m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0;\\ \sum\limits_0^n m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0\end{array}\right\} \quad \text{уравнения моментов.}\end{array}\right.$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей произвольной плоской системы сил

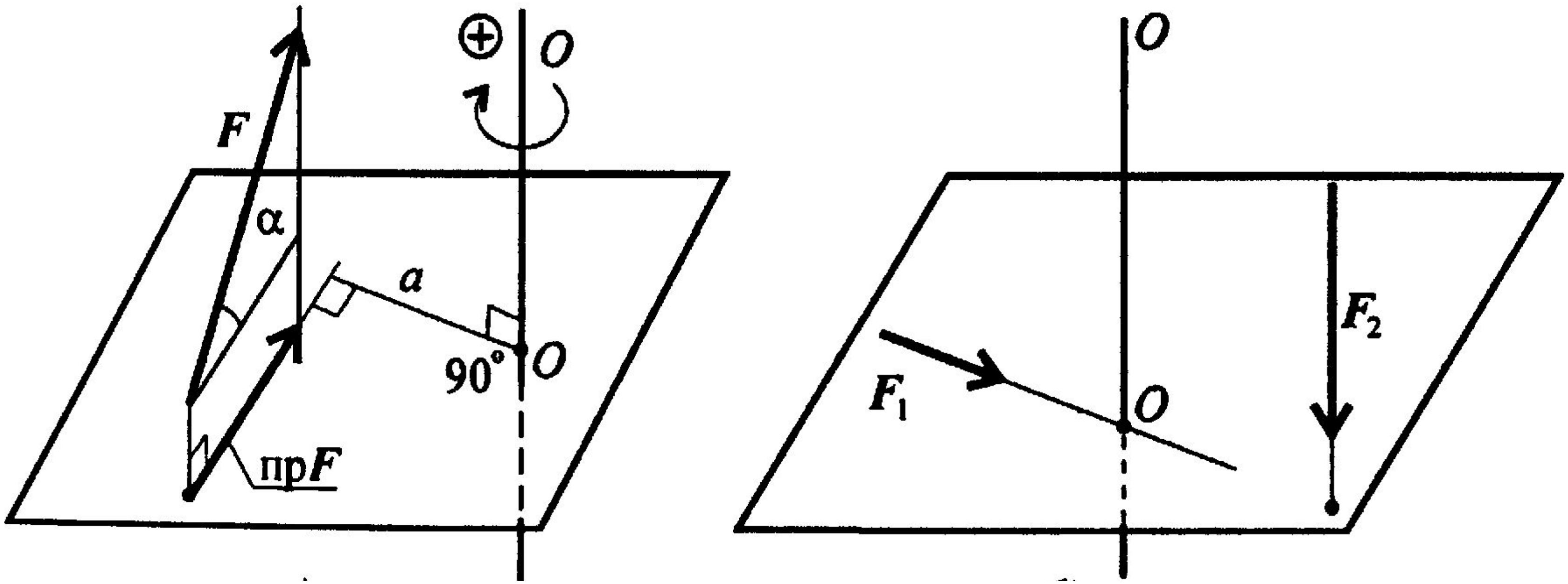


$$OA = d = \frac{|M_o|}{R'}$$

$$|m_o(\vec{R})| = Rd = R\frac{|M_o|}{R'} = |M_o|$$

$$M_o = \sum_{i=1}^{n} m_o(\vec{F}_i) \qquad m_o(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_o(\vec{F}_i)$$

Пространственная система сил



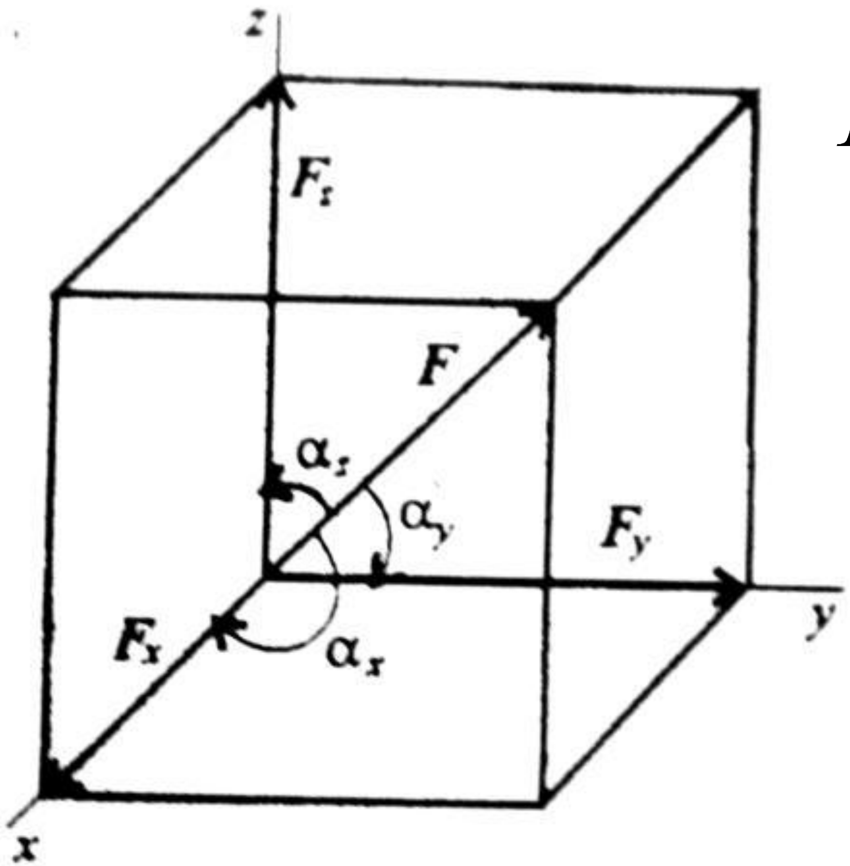
$Moo(F)$ = пр. $F \cdot a$,

a – расстояние от оси до проекции F;

пр. F – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси

пр. F = $F\cos\alpha$; $M_{OO}(F) = F\cos\alpha \cdot a$.

Пространственная сходящаяся системы сил

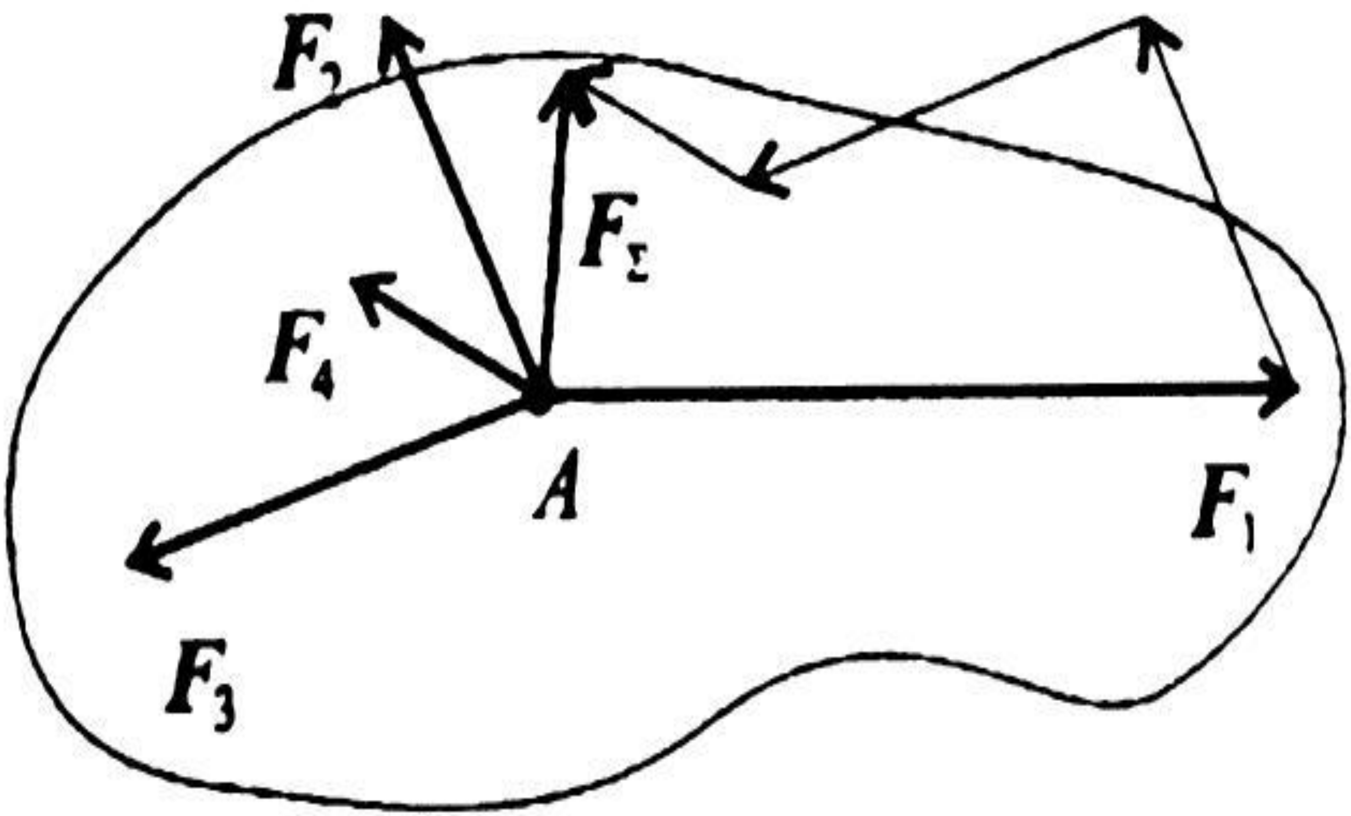


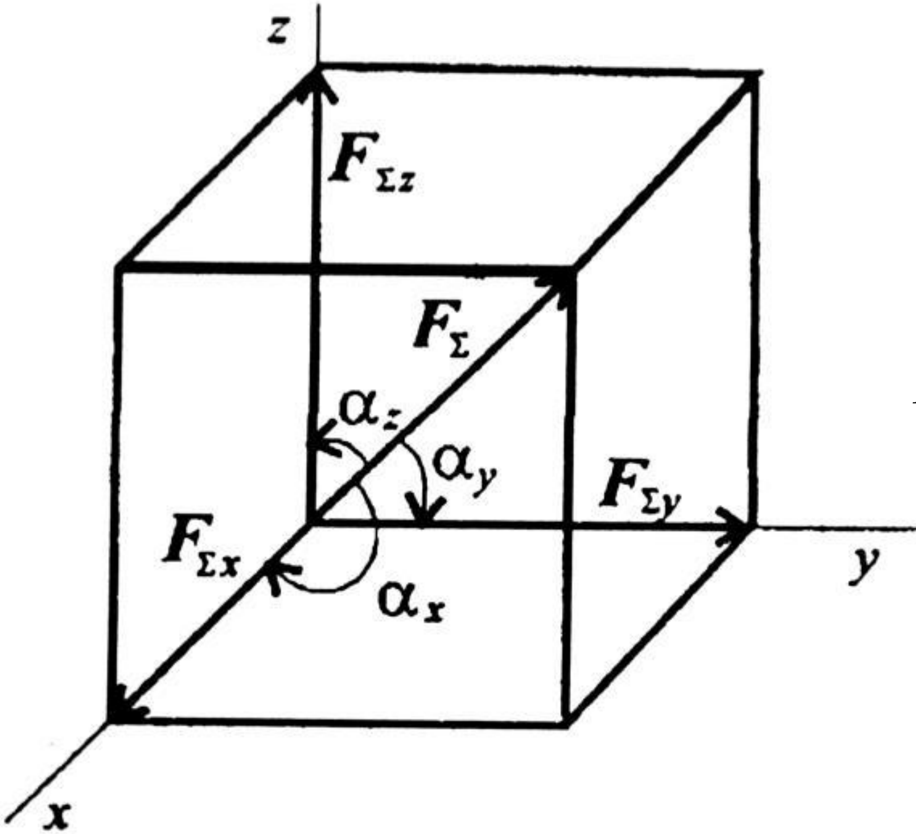
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F_x = F\cos\alpha_x;$$
$$F_y = F\cos\alpha_y;$$
$$F_z = F\cos\alpha_z,$$

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – углы между вектором F и осями координат.

Пространственная сходящихся системы сил





$$F_{\Sigma x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \qquad F_{\Sigma y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$$

$$F_{\Sigma z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$$

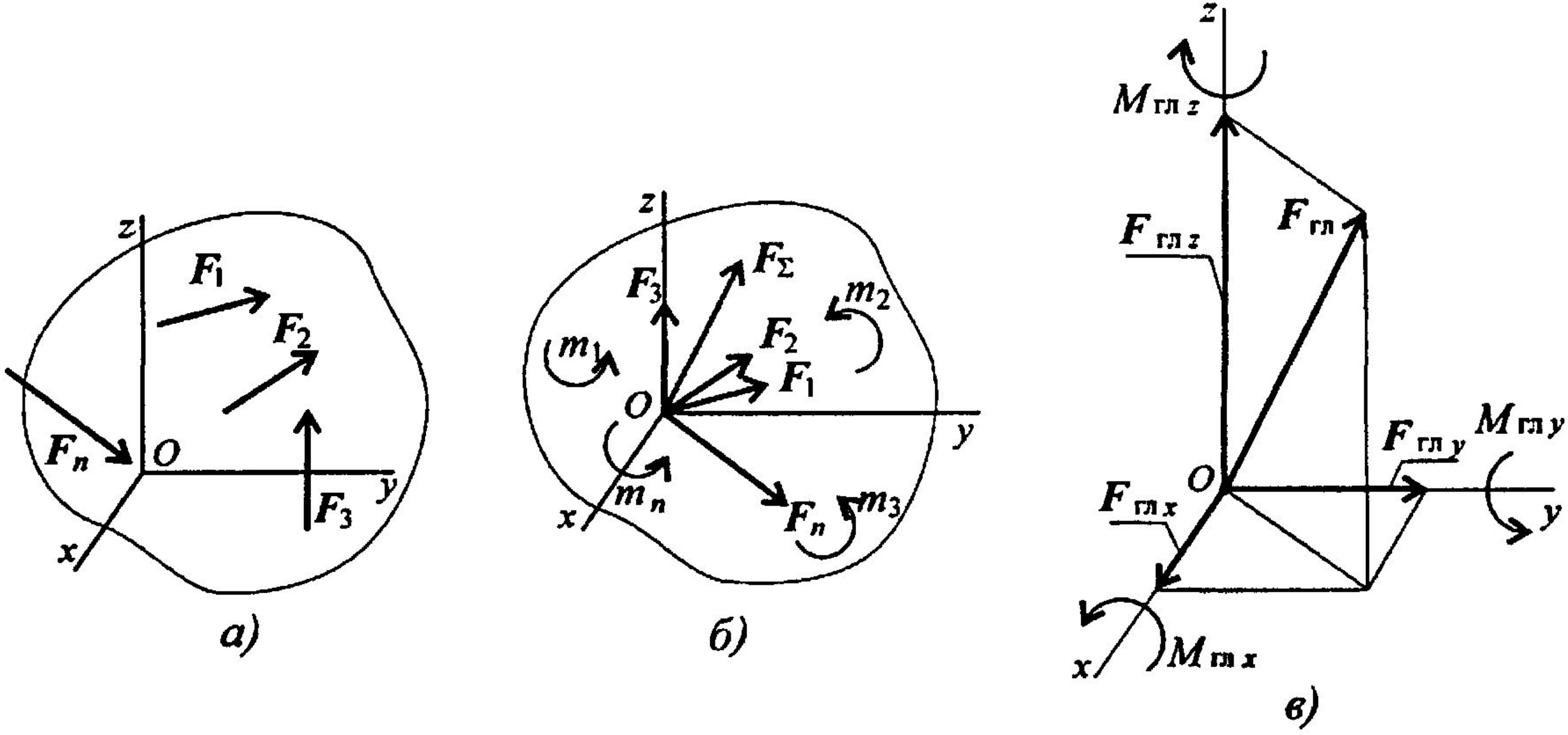
$$F = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2 + F_{\Sigma z}^2}$$

$$\alpha_x = (F_{\Sigma}\ F_{\Sigma x}) \qquad \cos\alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}} \qquad \cos\alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma}} \qquad \cos\alpha_z = \frac{F_{\Sigma z}}{F_{\Sigma}}$$

$$\alpha_y = (F_{\Sigma}\ F_{\Sigma y})$$

$$\alpha_z = (F_{\Sigma}\ F_{\Sigma z})$$

Произвольная пространственная система сил



$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F^2_{\text{гл }x} + F^2_{\text{гл }y} + F^2_{\text{гл }z}}$$

$$F_{\text{гл }x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \qquad F_{\text{гл }y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \qquad F_{\text{гл }z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$$

$$M_{\text{гл}} = \sum_{k=1}^{n} m_k \qquad M_{\text{гл}} = \sqrt{M^2_{\text{гл }x} + M^2_{\text{гл }y} + M^2_{\text{гл }z}}$$

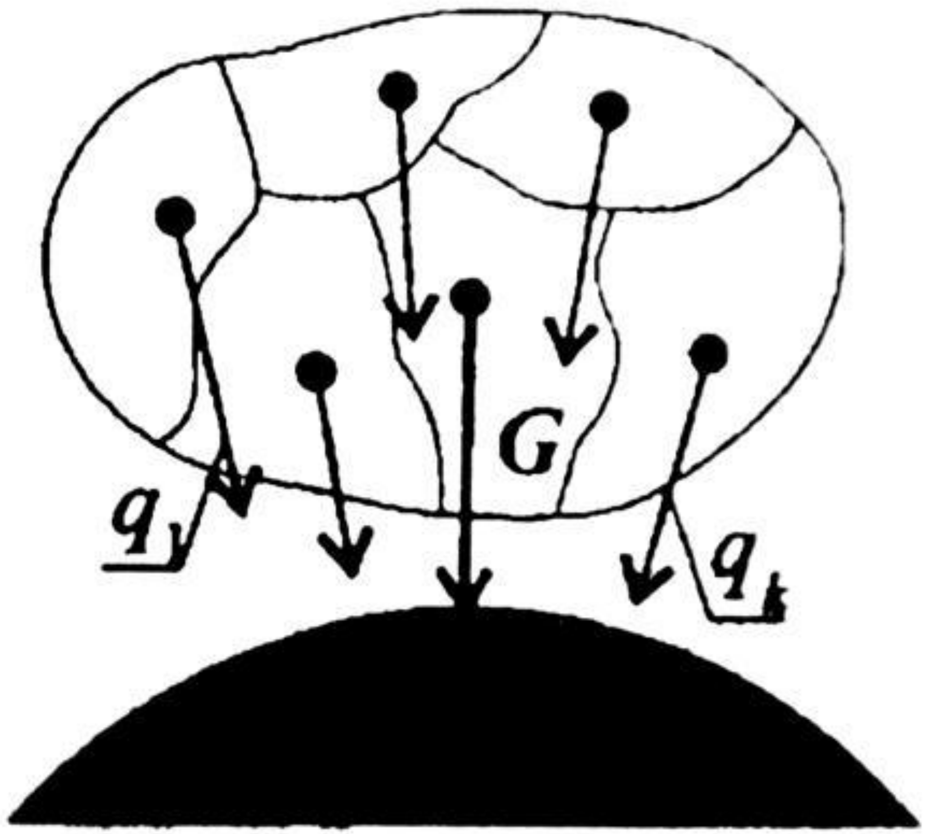
$$M_{\text{гл }y} = \sum_{k=1}^{n} m_{ky} \qquad M_{\text{гл }x} = \sum_{k=1}^{n} m_{kx} \qquad M_{\text{гл }z} = \sum_{k=1}^{n} m_{kz}$$

Уравнения равновесия пространственной системы сил

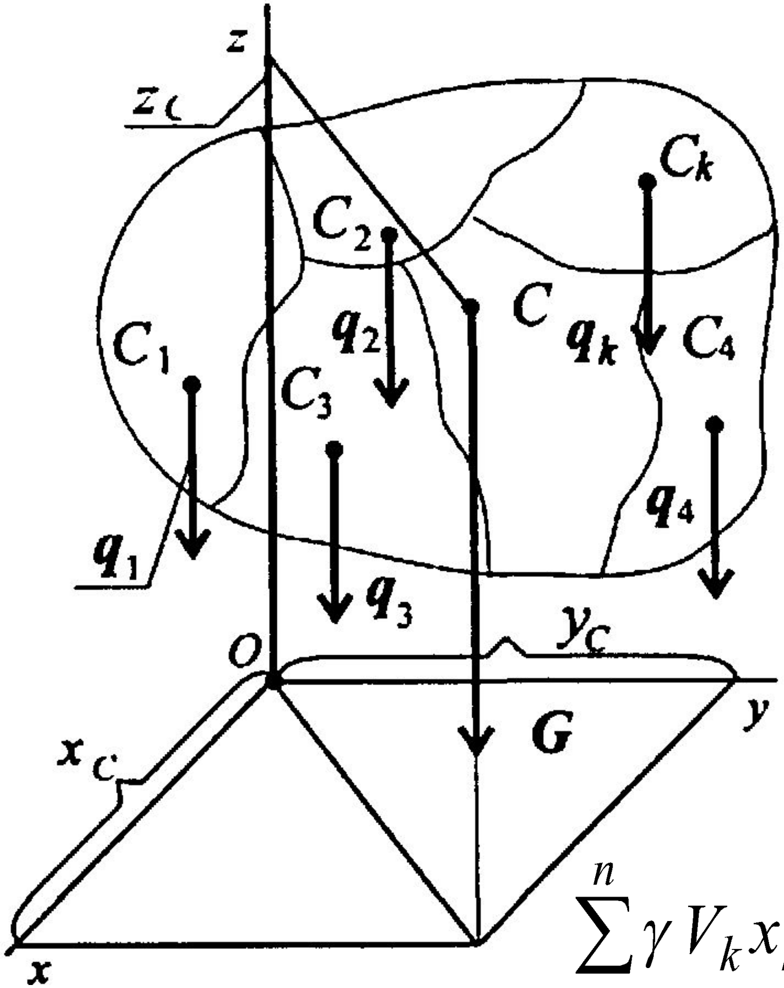
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_{kx}(F_k) = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} m_{ky}(F_k) = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} m_{kz}(F_k) = 0$$

- Сила тяжести



Точка приложения силы тяжести



$$M_x(F_\Sigma) = G \cdot y_C = \sum_0^n q_k y_k; \quad y_C = \frac{\sum_0^n q_k y_k}{G}$$

$$M_y(F_\Sigma) = G \cdot x_C = \sum_0^n q_k x_k; \quad x_C = \frac{\sum_0^n q_k x_k}{G}$$

$$M_z(F_\Sigma) = G \cdot z_C = \sum_0^n q_k z_k; \quad z_C = \frac{\sum_0^n q_k z_k}{G}$$

$$x_C = \frac{\sum_0^n \gamma V_k x_k}{\gamma V} = \frac{\sum_0^n V_k x_k}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_0^n V_k y_k}{V}; \quad z_C = \frac{\sum_0^n V_k z_k}{V}$$

Определение координат центра тяжести плоских фигур

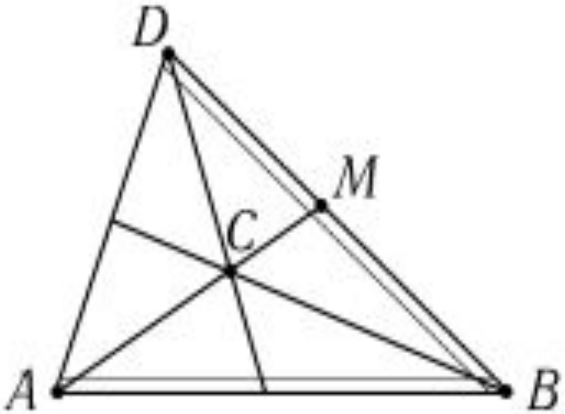
Для плоских тел: $V = Ah$,
где A – площадь фигуры, h – ее высота

$$x_C = \frac{\sum_0^n A_k h x_k}{Ah} = \frac{\sum_0^n A_k x_k}{A}; \qquad y_C = \frac{\sum_0^n A_k y_k}{A}; \qquad z_C = \frac{h}{2}.$$

Координаты центра тяжести сечения можно выразить через статический момент:

$$\sum_0^n A_k y_k = S_x \qquad x_C = \frac{S_y}{A} \qquad \sum_0^n A_k x_k = S_y \qquad y_C = \frac{S_x}{A}$$

Центры тяжести простейших фигур:

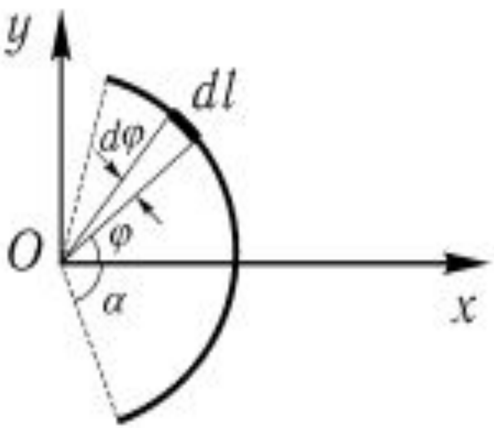


1. Треугольник.

Центр тяжести площади треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан.

$$DM = MB,\ CM = \frac{1}{3}AM.$$

2. Дуга окружности.



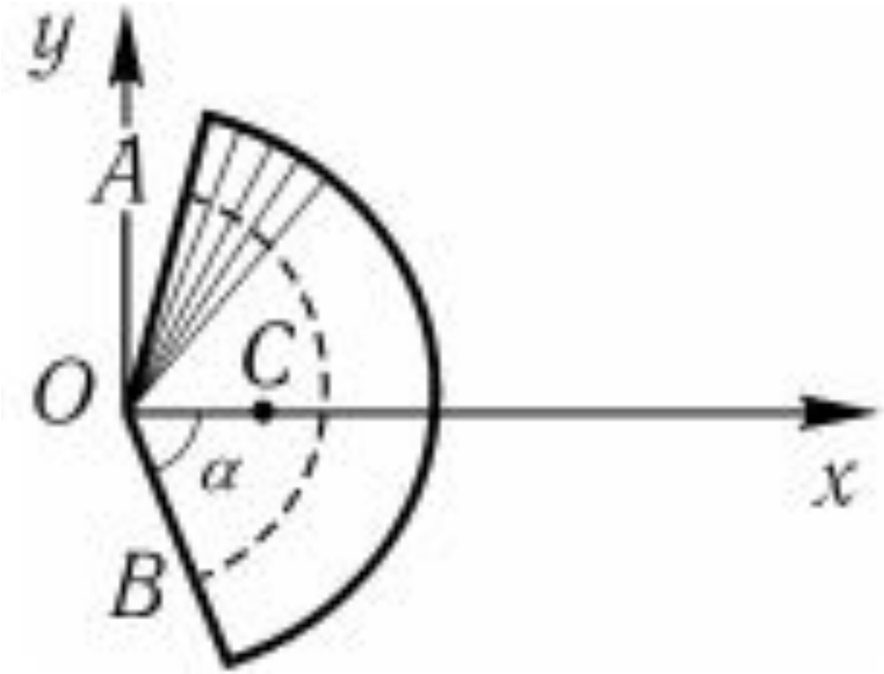
Дуга имеет ось симметрии. Центр тяжести лежит на этой оси, т. е. $y_C = 0$. $x_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x\,dl$, dl — элемент дуги, $dl = R\,d\varphi$, R — радиус окружности, $x = R\cos\varphi$, $L = 2\alpha R$,

$$x_C = \frac{1}{2\alpha R}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi R\,d\varphi = \frac{R^2}{2\alpha R}\sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

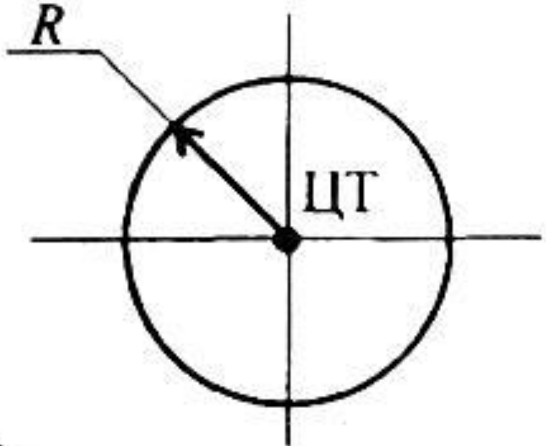
Следовательно:

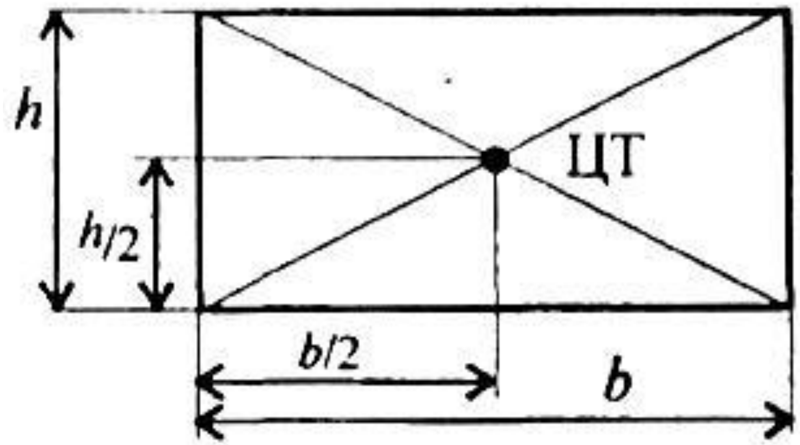
$$\boxed{x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.}$$

3. Круговой сектор.

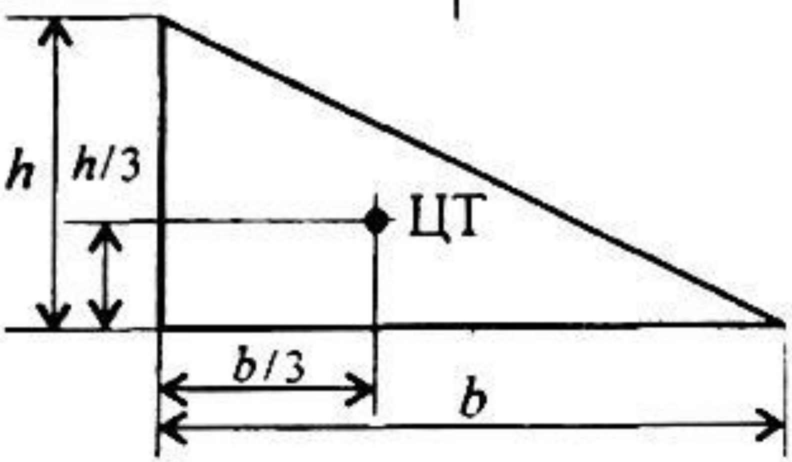


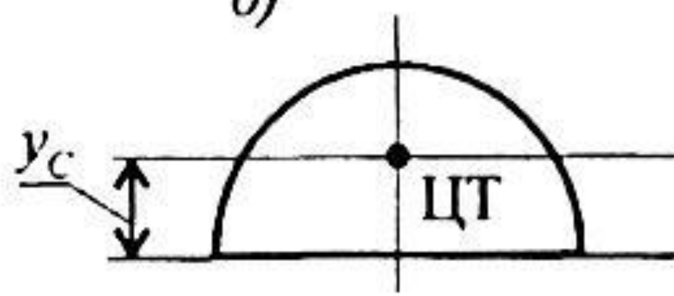
$$\boxed{x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}.}$$





б)





$$y_C = \frac{4R}{3\pi}$$

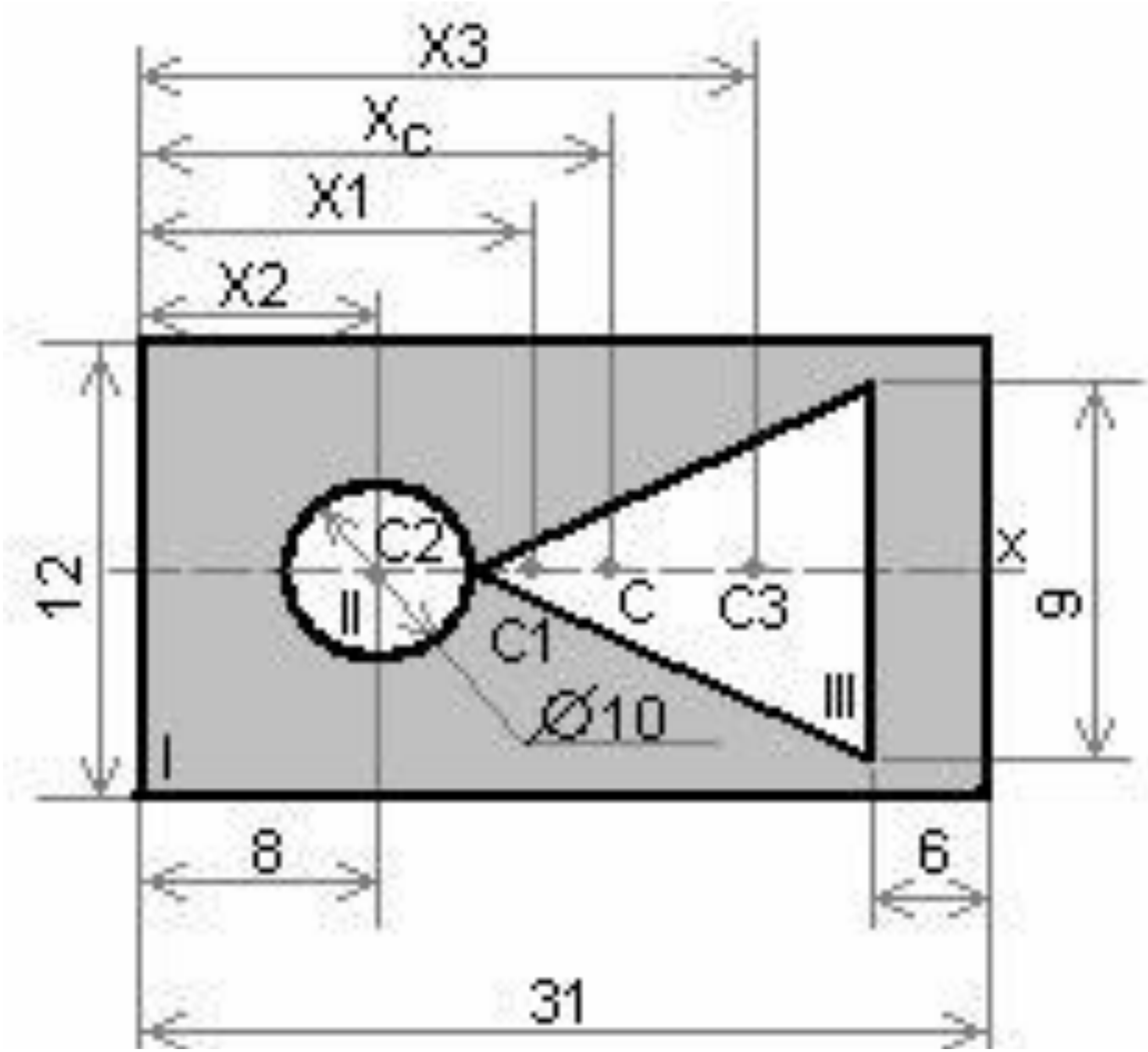
При решении задач используются следующие методы:

1) Аналитический (интегрированием)

2. Метод симметрии
   - Если тело имеет плоскость или ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой плоскости или оси.
   - Если тело имеет две оси симметрии, то центр тяжести лежит в точке пересечения этих осей.
3. Экспериментальный (метод подвешивания тела).
4. Метод разбиения на части.

Разновидность метода разбиения на части – метод отрицательных площадей и объемов (для тел с полостями).

Пример. Определить положение центра тяжести для тонкой однородной пластины, форма и размеры которой, в сантиметрах



Решение.

Данную фигуру представляем состоящей из трех простых фигур: **1 – прямоугольник, 2 – круга, 3 – треугольника**.

Площади кругового и треугольного отверстий вводим в расчет со знаком минус, а площадь прямоугольника – без учета имеющихся в нем отверстий.

Площади простых фигур:

$$A_1 = 12 \cdot 31 = 372 см^2$$

$$A_2 = -\pi d^2 / 4 = -3.14 \cdot 100 / 4 = -78.5 см^2$$

$$A_3 = -12 \cdot 9 / 2 = -54 см^2$$

Высота треугольника $h = 31 - (8 + 10/2 + 6 1) = 12 см$

Координаты центра тяжести простых фигур:

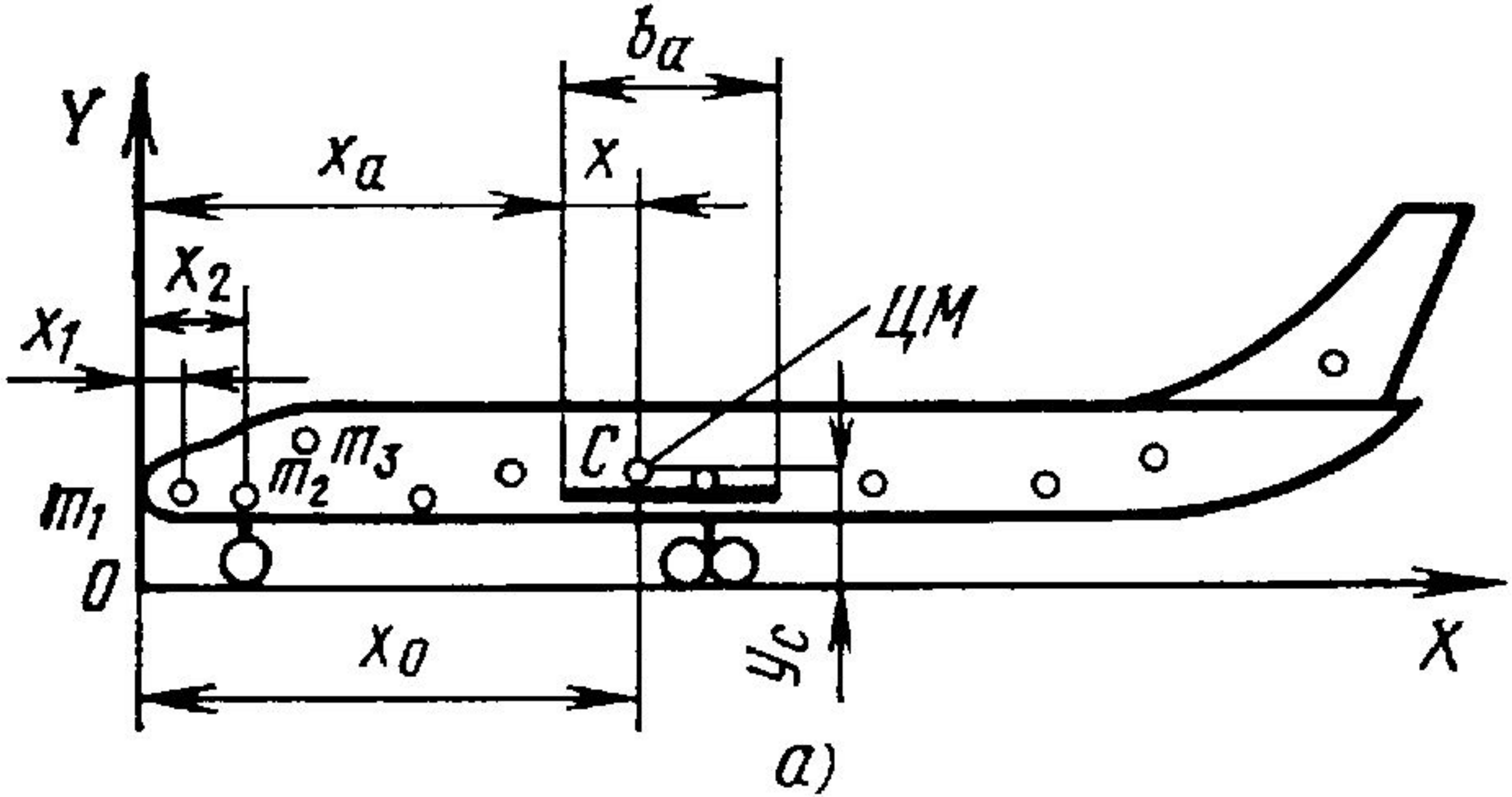
x_1=31/2=15,5 см,
x_2=8см,
x_3=31-6-12/3=21см,
где 12/3 – расстояние от центра тяжести треугольника до его основания, равное 1/3 высоты.

Координата центра тяжести заданной фигуры

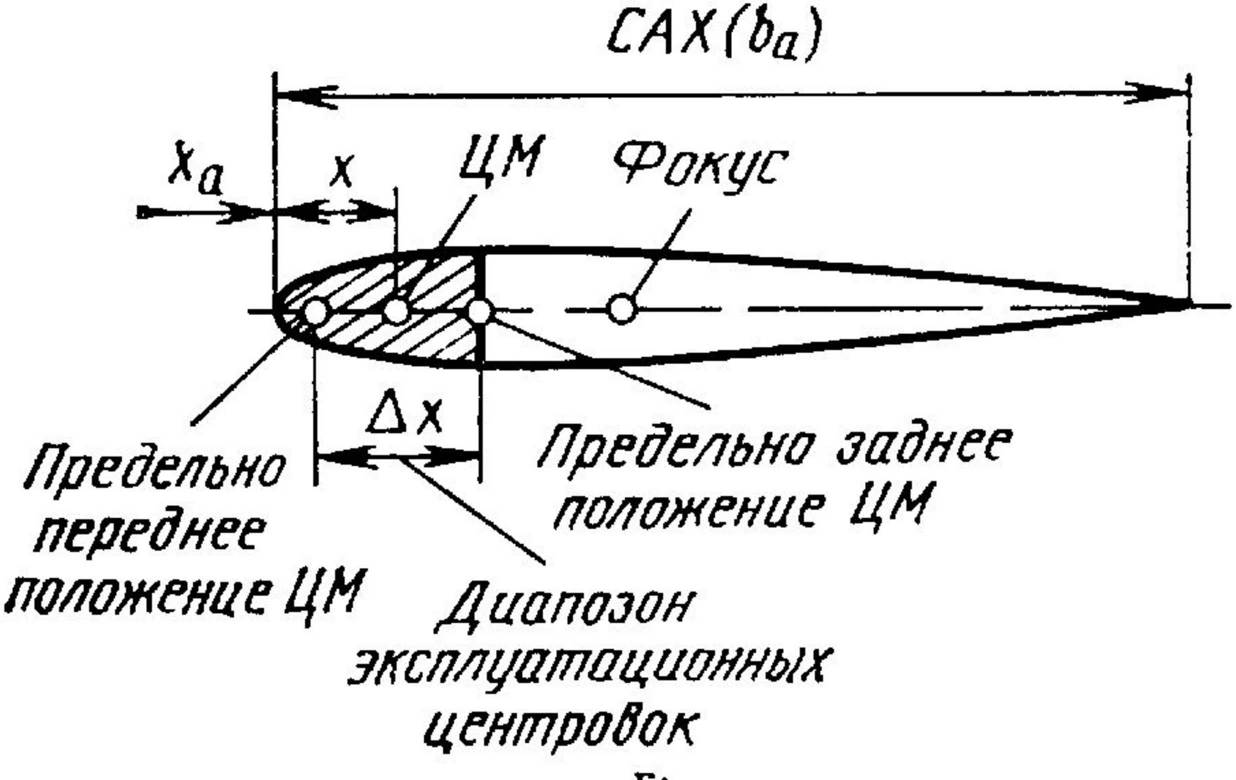
$$X_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$= \frac{372 \cdot 15.5 - 78.5 \cdot 8 - 54 \cdot 21}{372 - 78.5 - 54} = 16,7 см$$

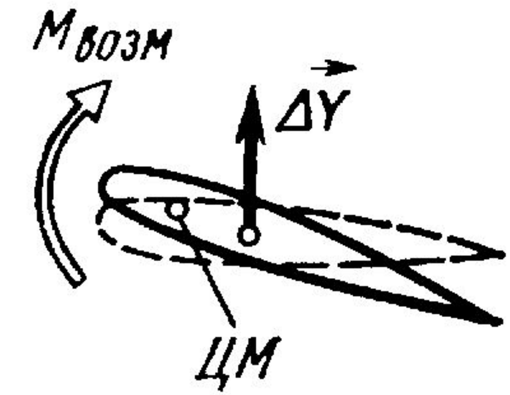
Центровка самолёта



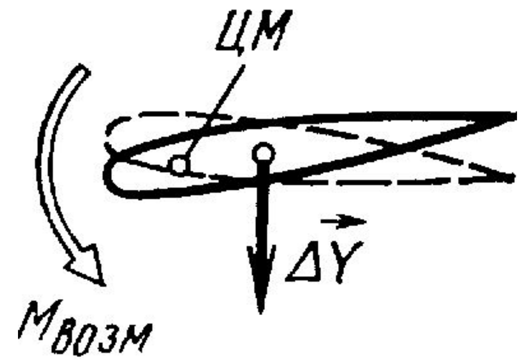
$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m} \qquad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m}$$



б)



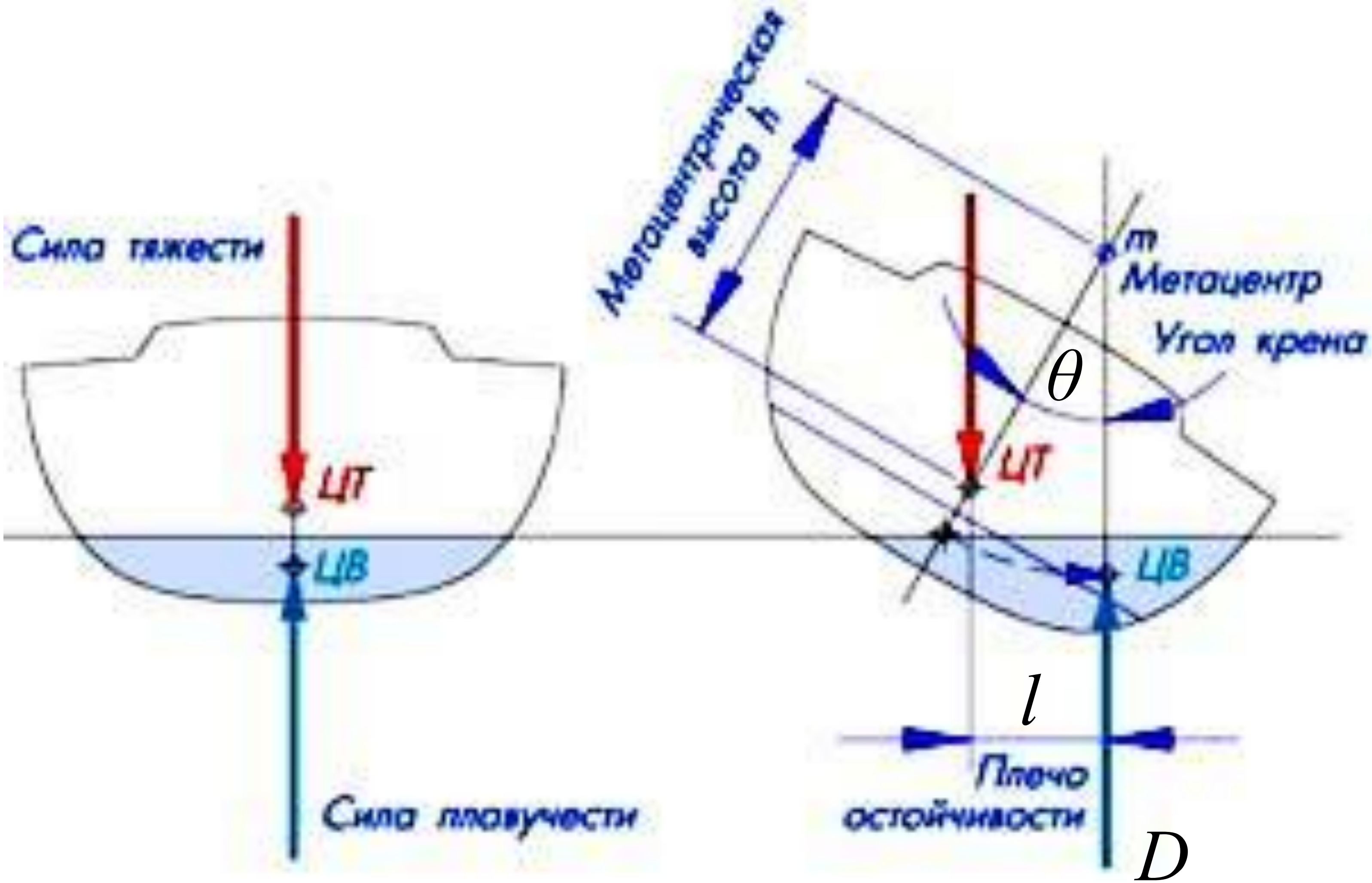
в)



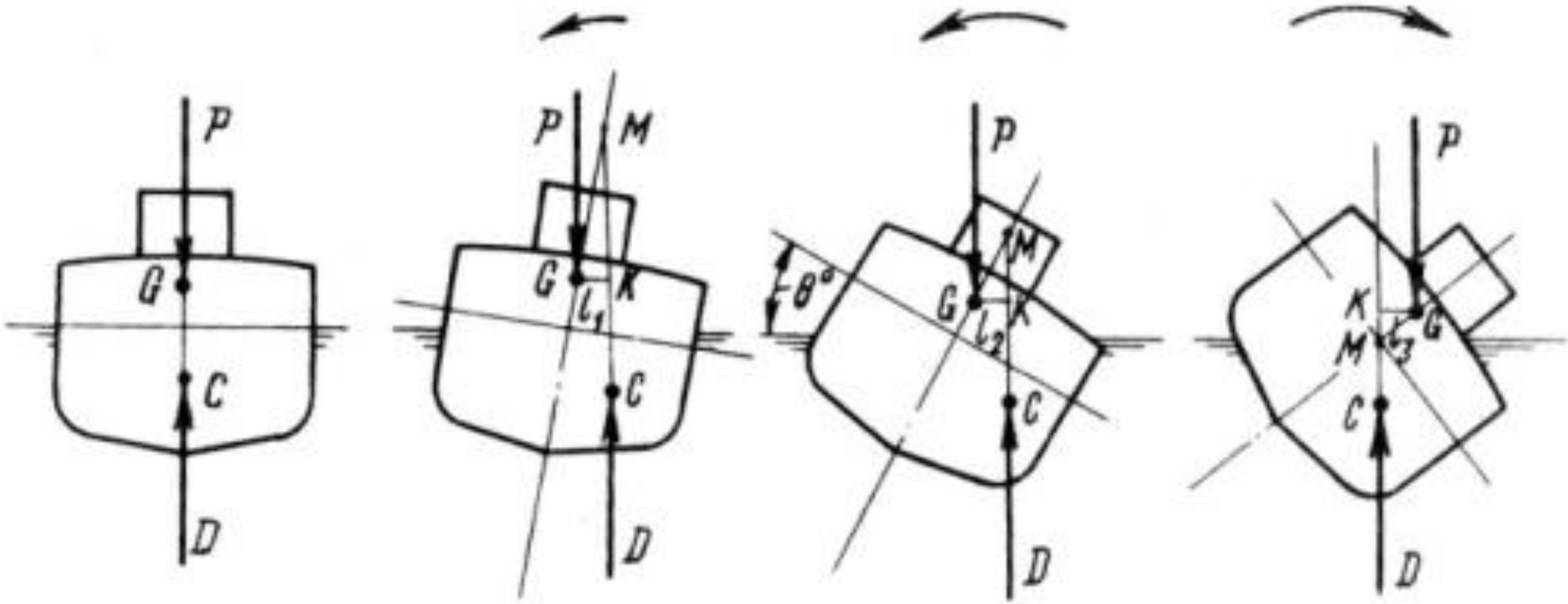
г)

$$\bar{x} = \frac{x_C - x_a}{b_a} \cdot 100\% \qquad \bar{x} = \frac{x}{b_a} \cdot 100\%$$

МОРЕХОДНЫЕ КАЧЕСТВАМИ СУДНА

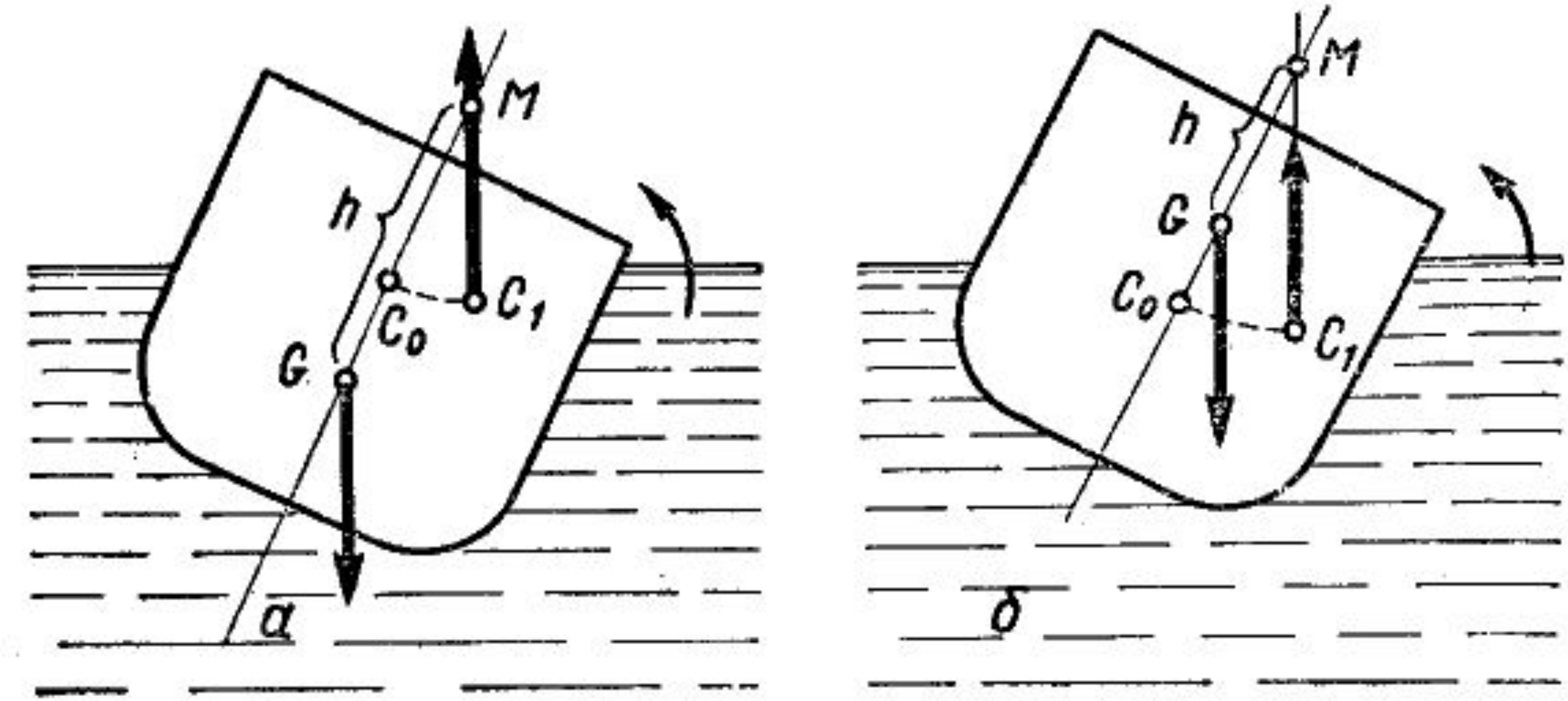


$l = h \sin\theta \qquad M_в = Dl = D\, h \sin\theta$

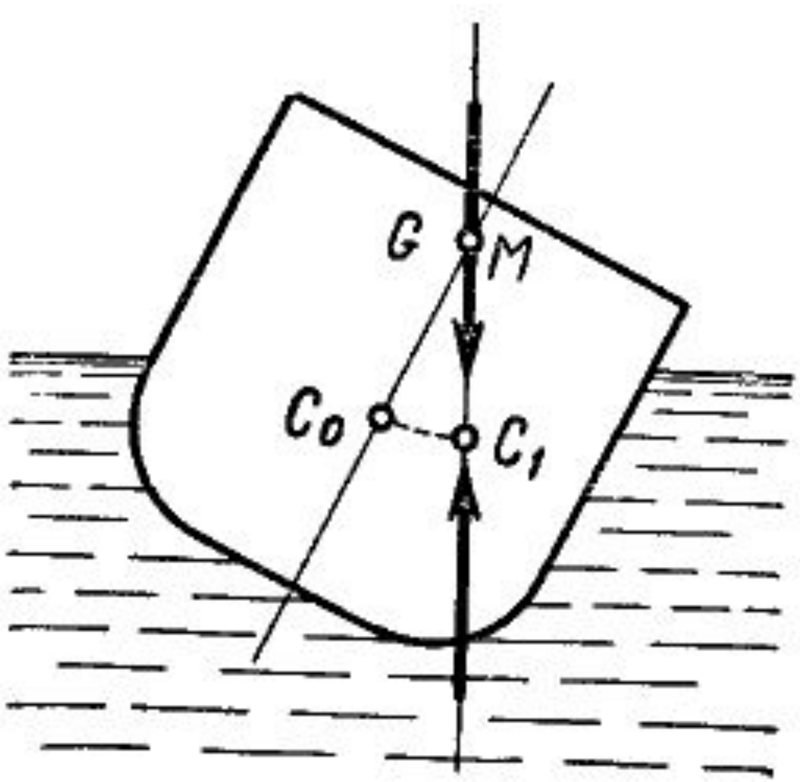


Остойчивость на малых и больших углах крена. Потря остойчивости.

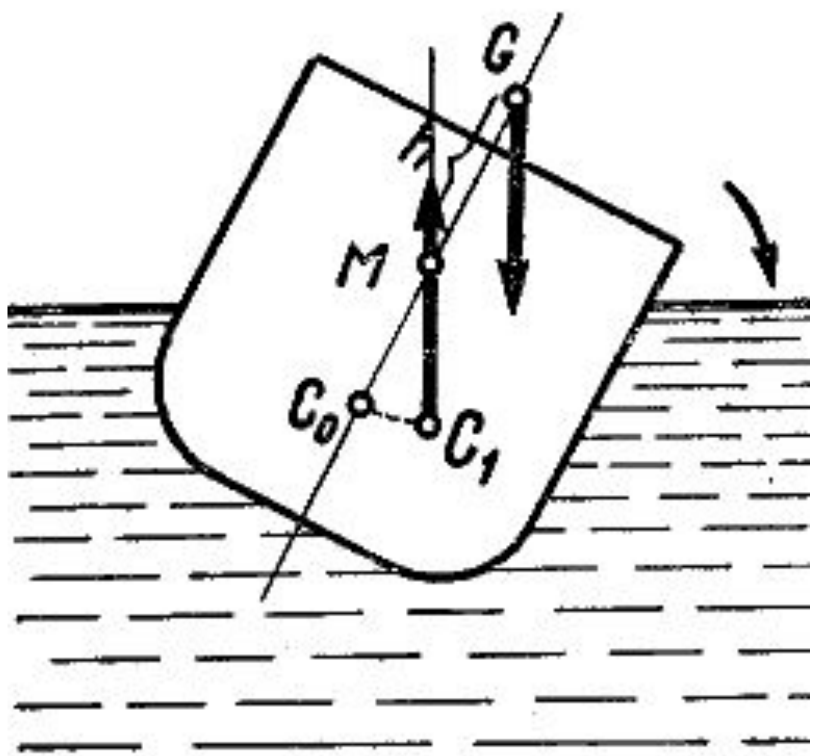
Случай остойчивого судна



Случай неостойчивого судна при безразличном равновесии

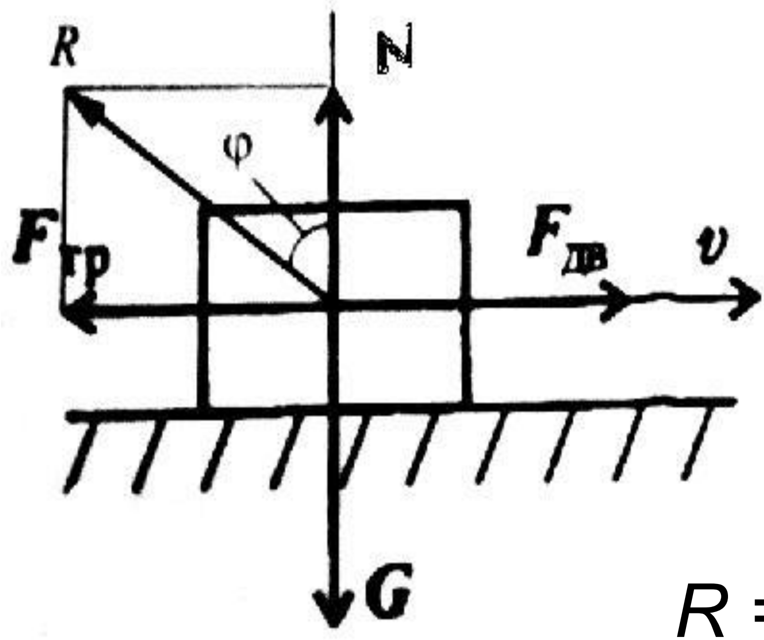


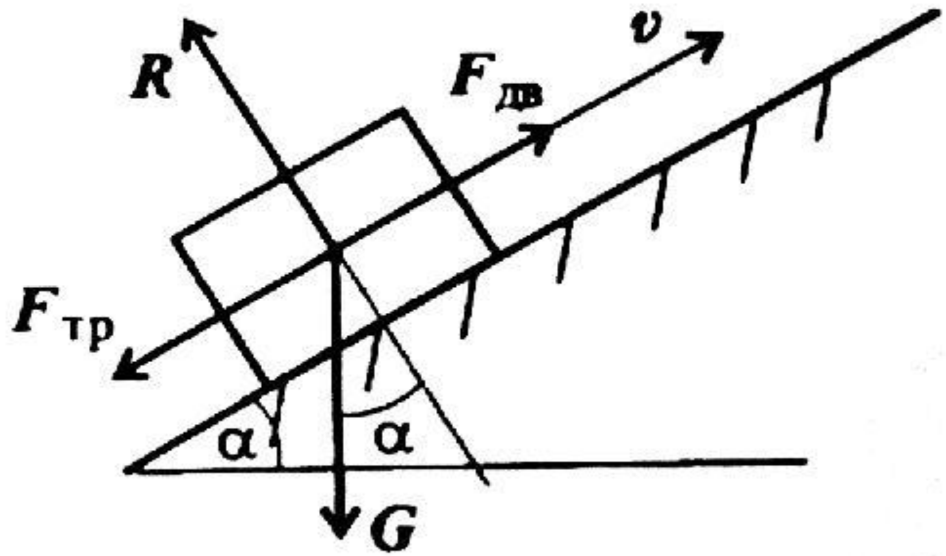
Случай неостойчивого судна при неустойчивом равновесии



Для классической яхты “Contessa 32” потеря остойчивости наступает только при крене 155°

Понятие о трении. Виды трения





R = *G*·cos α, где *а* – угол наклона плоскости к горизонту.

$F_{тр} = F_f = f\,N$

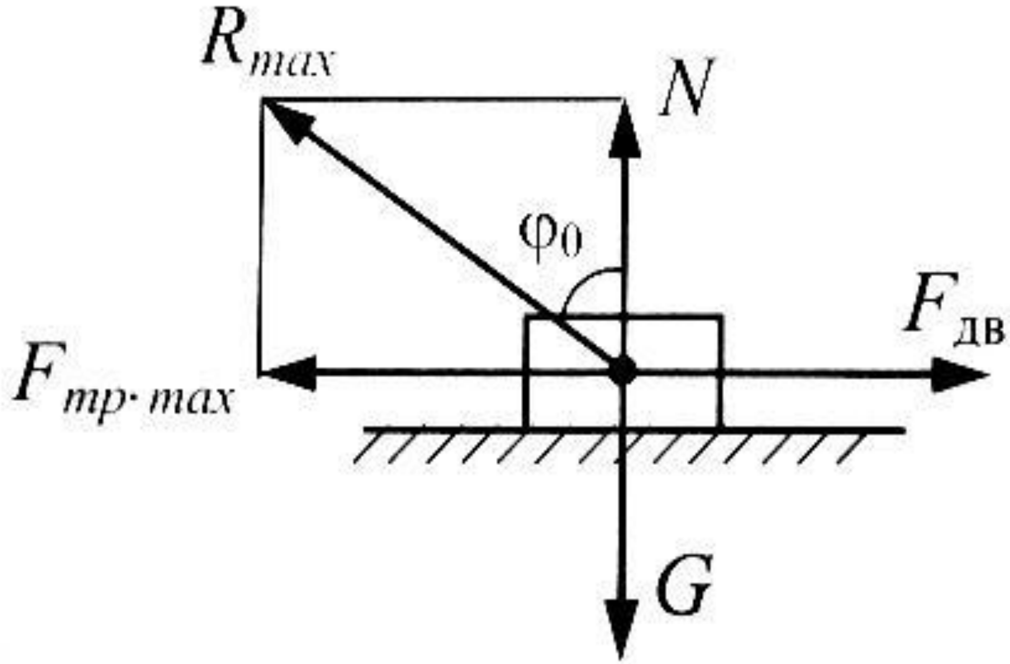
f – коэффициент трения скольжения.

$$0 < F_f < F_{f0}$$

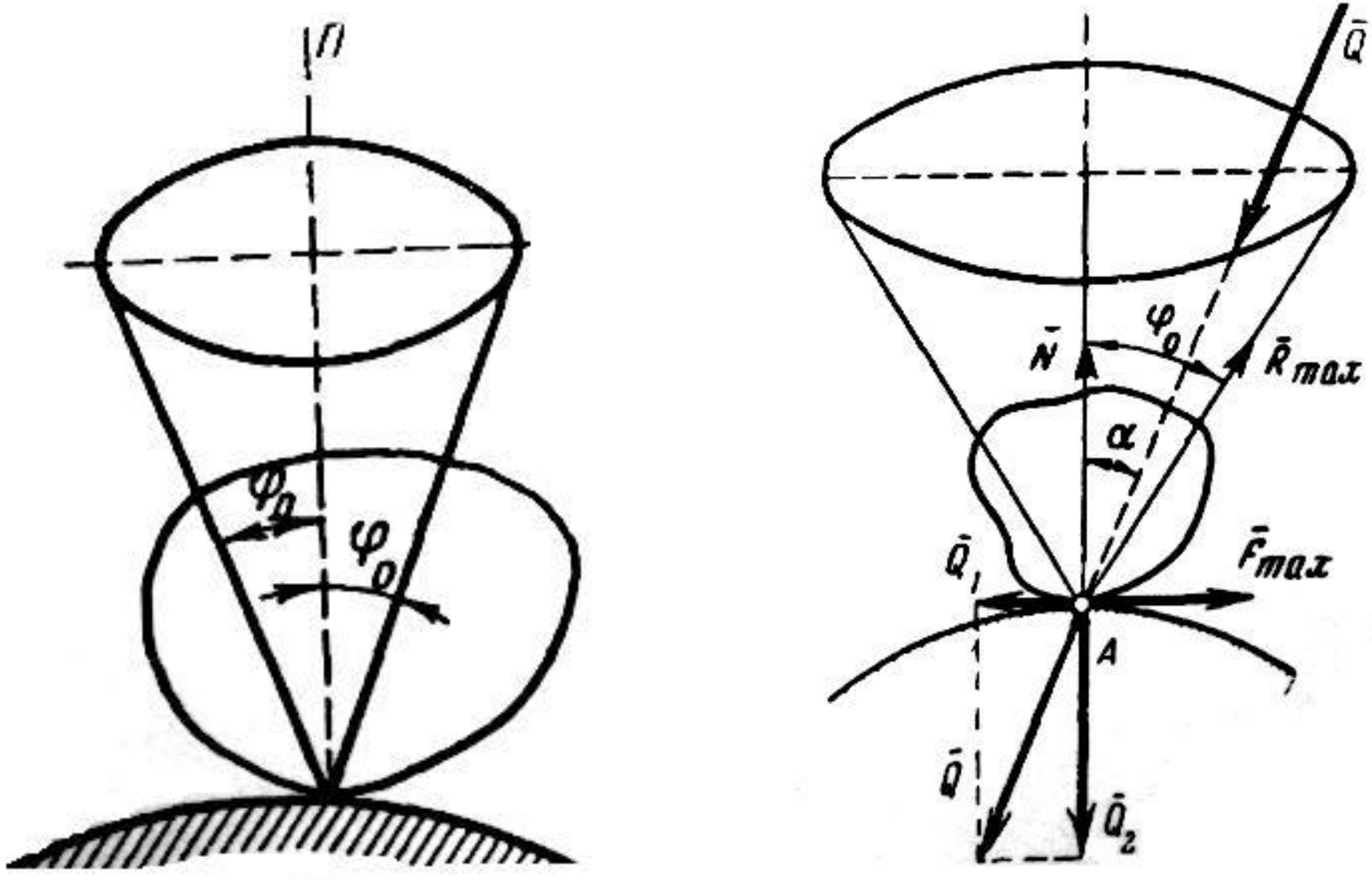
F_{f0} – *статическая* сила трения (сила трения покоя);

F_f – *динамическая* сила трения

Угол трения



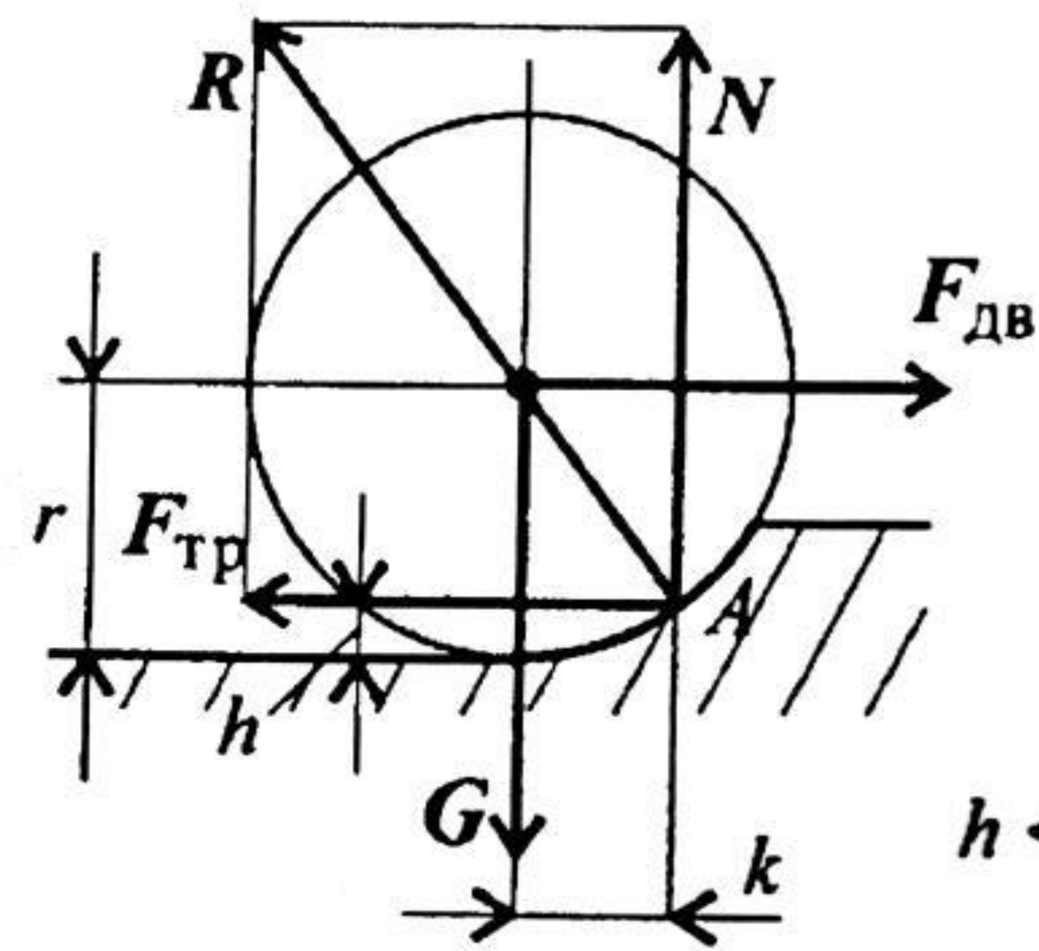
$$tg\varphi_0 = \frac{F_{тр.\max}}{N} = \frac{f_0 N}{N} = f_0$$



До тех пор пока линия действия равнодействующей всех сил, приложенных к телу, проходит внутри конуса трения, скольжение тела по связи не возникает

$$\alpha \le \phi_0$$

Трения качения



$F_{дв} r \geq Nk; \quad N = G;$

$$F_{дв} \geq k \frac{G}{r}$$

где k – максимальное значение плеча (половина колеи) принимается за коэффициент трения качения.

$h \ll k$

Сталь по стали – k = 0,005 см; резиновая шина по шоссе – k = 0,24 см.