

Косова Г.Н., доцент кафедры физики ПГТУ

Курс «Физика»

Раздел «Механика»

Тема «Волны в упругой среде»

Волны в упругой среде.

Резонанс.

Волновой процесс.

Если возбудить колебания в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной) то, вследствие взаимодействия между частицами среды, эти колебания будут передаваться от одной точки среды к другой со скоростью, зависящей от свойств среды.

При рассмотрении колебаний не учитывается детальное строение среды; среда рассматривается как **сплошная**, непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Среда называется **линейной**, если ее свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых колебаниями.

Волновым процессом или **волной** — называется процесс распространения колебаний в сплошной среде.

При распространении волны частицы колеблются около своих положений равновесия, а не перемещаются вслед за волной.

Вместе с волной от частицы к частице передается только состояние колебательного движения и его энергия.

Основным свойством всех волн **является перенос энергии без переноса вещества.**

Упругие волны.

Упругими (или механическими) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

Продольная волна — волна, в которой частицы среды колеблются в направлении распространения волны.

Поперечная волна — волна, в которой частицы среды колеблются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут распространяться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации сжатия и растяжения (в твердых, жидких и газообразных телах).

Поперечные волны могут распространяться только в среде, в которой возникают упругие силы при деформации сдвига (только в твердых телах).

$$\nu = 16 \text{ Гц} \div 20 \text{ кГц}$$

$$\nu < 16 \text{ Гц}$$

$$\nu > 20 \text{ кГц}$$

$$\nu > 1 \text{ ГГц}$$

Упругая гармоническая волна.

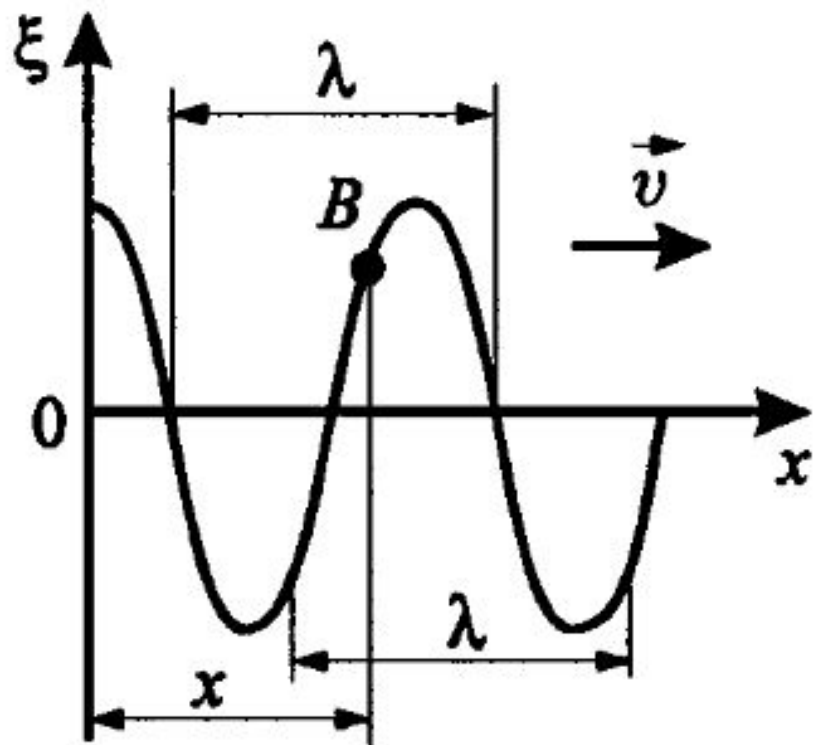
Упругая волна называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Пусть гармоническая волна распространяется со скоростью v вдоль оси OX . Обозначим смещения частиц среды через $\xi = \xi(x, t)$.

Для данного момента времени t зависимость между смещением частиц среды и расстоянием x этих частиц от источника колебаний O можно представить в виде **графика волны**.

Отличие *графика волны* от *графика гармонического колебания*:

Упругая гармоническая волна.



1) график волны представляет зависимость смещения всех частиц среды от **расстояния** до источника колебаний в данный момент времени $\xi = \xi(x, t = const)$;

2) график гармонического колебания это зависимость смещения данной частицы от **времени** $\xi = \xi(x = const, t)$.

Длиной волны λ называется расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе.

Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется гармоническая волна за время, равное периоду колебаний T :

$$\lambda = vT \quad \text{или} \quad v = \lambda n$$

где n — частота колебаний, v — скорость распространения волны.

Фронт волны.

Волновым фронтом называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к определенному моменту времени t .

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени — один.

Волна называется **плоской**, если ее волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу.

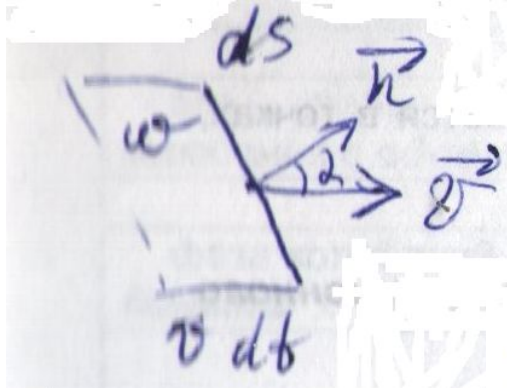
Волна называется **сферической**, если ее волновые поверхности имеют вид концентрических сфер. Центры этих сфер называются **центром волны**.

Бегущие волны.

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию.

Перенос энергии количественно характеризуется **вектором плотности потока энергии** (вектор Умова). Направление этого вектора совпадает с направлением распространения энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно волне.

$$W = W_k + W_m$$
$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$



$$dW = w \cdot dS \cdot v \cdot dt \cos \alpha =$$

$$= w dS \cdot v dt$$

$$d\Phi_w = w dS \cdot v$$

$$d\Phi_w = \frac{dW}{dt}$$

$$\frac{d\Phi_w}{dS} = w \cdot v = u$$

$$u = w \cdot v$$

Уравнение плоской волны.

Пусть точки, которые расположены в плоскости $x=0$, колеблются по закону $\xi(0,t) = A \cos \omega t$. И пусть v — скорость распространения колебаний в данной среде.

Колебания частицы B среды (см. рисунок), расположенной на расстоянии x от источника колебаний O , будут происходить по тому же закону. Но, поскольку для прохождения волной расстояния x требуется время $\tau = x/v$, то ее колебания будут отставать по времени от колебания источника на τ .

Уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x , имеет вид

$$\xi(x,t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

Уравнение плоской волны.

Следовательно, **функция** $\xi(x,t)$ является не только периодической функцией времени, но и периодической функцией координаты x .

В общем случае **уравнение плоской волны**, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергию, имеет вид

$$\xi(x,t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right]$$

здесь: $A = const$ — **амплитуда волны**,

ω — циклическая частота,

φ_0 — **начальная фаза волны**,

$\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0$ — **фаза плоской волны**.

Уравнение плоской волны.

Если определить **волновое число**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$$

то уравнение плоской бегущей волны можно записать в виде

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

или в экспоненциальной форме

$$\xi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

где физический смысл имеет только вещественная часть.

В общем виде уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении \vec{s} имеет вид:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \exp[i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \varphi_0)]$$

Фазовая скорость волны.

Скорость $v = \frac{dx}{dt}$ в этих уравнениях есть скорость распространения фазы

волны и ее называют **фазовой скоростью**.

Действительно, пусть в волновом процессе фаза постоянна:

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}.$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho \cdot s}}$$

$$v = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}$$

Уравнение сферической волны.

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

где r — расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.
Амплитуда колебаний в сферической волне убывает с расстоянием по
закону $\frac{1}{r}$.

Волновое уравнение.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается **волновым уравнением** — дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

где v — фазовая скорость,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{— оператор Лапласа.}$$

Решением волнового уравнения является уравнение любой волны (в том числе и плоская и сферическая волны).

Волновое уравнение для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Принцип суперпозиции.

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, *линейна*, то к этим волнам применим **принцип суперпозиций (наложения) волн**:

при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвующие в каждом из слагающих волновых процессов.

Любое сложное колебание может быть представлено в виде суммы одновременно совершающихся гармонических колебаний (разложение Фурье).

Поэтому любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, то есть в виде волнового пакета или группы волн.

Волновой пакет.

Волновым пакетом называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

За скорость распространения волнового пакета принимают скорость перемещения максимума его амплитуды (центра волнового пакета).

Групповой скоростью u называется скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет (или скорость движения центра волнового пакета).

Ее величина

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

Связь групповой и фазовой скоростей:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

Интерференция волн. Стоячие волны

Когерентностью называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

Две волны называются **когерентными**, если разность их фаз не зависит от времени.

Гармонические волны, имеющие одинаковую частоту, когерентны всегда.

Интерференцией волн называется явление наложения волн, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усиление в одних точках пространства и ослабление в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.

Особым случаем интерференции являются стоячие волны.

Стоячие волны.

Стоячие волны — это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Пусть две плоские бегущие волны с одинаковыми амплитудами и частотами распространяются навстречу друг другу вдоль оси x :

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

Сложив эти уравнения, с учетом $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ и $k = 2\pi/\lambda$, получим **уравнение стоячей волны**:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$$

Стоячие волны.

$$\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$$

В точках среды, где

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$$

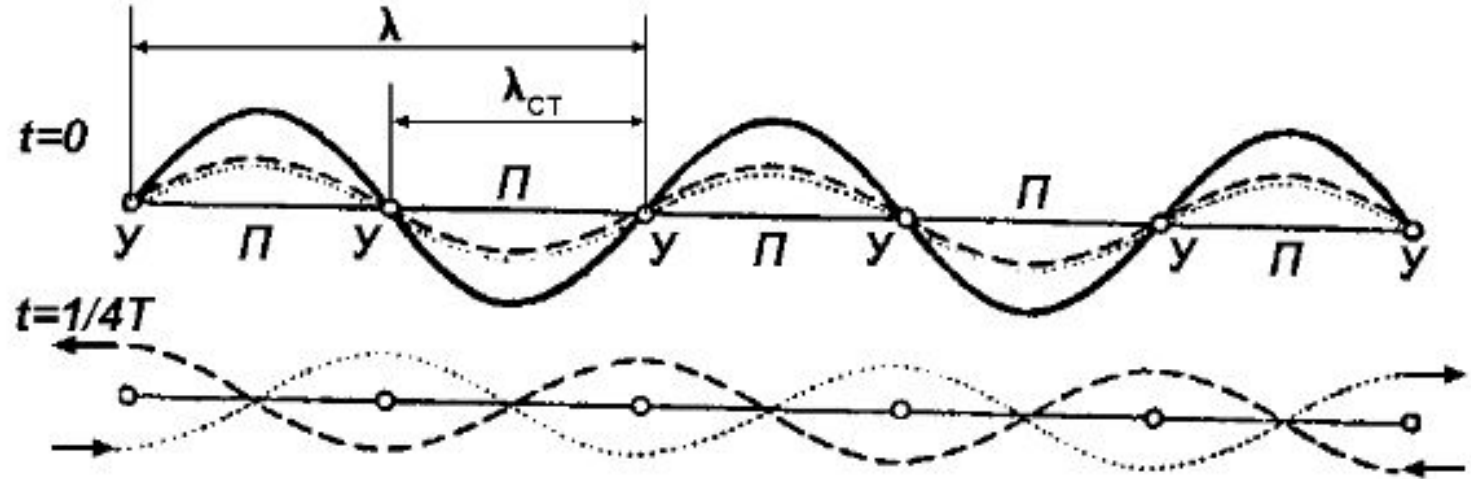
$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

амплитуда стоячей волны достигает максимального значения $A_{СТ} = 2A$.

Такие точки называются **пучностями стоячей волны**.

Координаты пучностей:

$$x_{\Pi} = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, \dots)$$



В точках среды, где

$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$, амплитуда стоячей обращается в нуль $A_{СТ} = 0$. Такие точки называются **узлами стоячей волны**.

Координаты узлов:
$$x_{\Upsilon} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

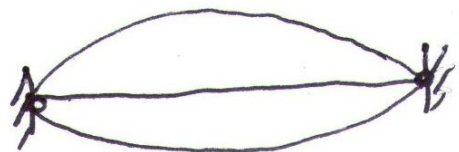
Расстояния между двумя соседними узлами и между двумя соседними пучностями одинаковы и равны половине длины волны λ бегущих волн. Эту величину называют **длиной стоячей волны**: $\lambda_{СТ} = \frac{\lambda}{2}$.

Стоячие волны.

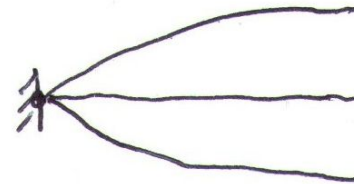
Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн.

Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то на границе сред образуется **пучность**.

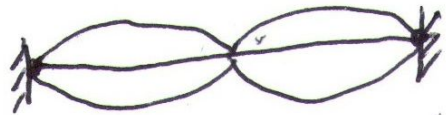
Если среда, от которой происходит отражение, более плотная, то на границе сред образуется **узел** стоячей волны.



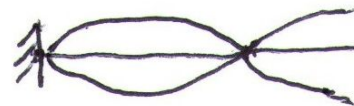
$$\lambda_{ст}$$



$$\frac{1}{2} \lambda_{ст}$$



$$2 \lambda_{ст}$$



$$\frac{3}{2} \lambda_{ст}$$



$$3 \lambda_{ст}$$



$$\frac{5}{2} \lambda_{ст}$$

Сравнительная таблица.

В бегущей волне	В стоячей волне
Амплитуда колебаний	
все точки волны совершают колебания с одинаковой амплитудой	все точки между двумя узлами колеблются с разными амплитудами
Фаза колебаний	
фаза колебаний зависит от координаты x рассматриваемой точки	все точки между двумя узлами колеблются с одинаковыми фазами
	при переходе через узел фаза колебаний изменяется на π ; точки лежащие по разные стороны от узла колеблются в противофазе
Перенос энергии	
энергия колебательного движения переносится в направлении распространения бегущей волны	переноса энергии нет , лишь в пределах $\lambda/2$ происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно

Эффект Доплера.

Эффектом Доплера называется изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника этих колебаний и приемника друг относительно друга. В акустике эффект Доплера проявляется как повышение тона при приближении источника звука к приемнику и понижения тона звука при удалении источника от приемника.

Пусть источник и приемник звука движутся вдоль соединяющей их прямой; v_i и v_p — скорости источника и приемника (положительны при сближении и отрицательны при удалении источника и приемника); n_0 — частота колебаний источника; v — скорость распространения звука в данной среде.

1) Источник и приемник покоятся относительно среды: $v_i = v_p = 0$.

Длина волны $\lambda = vT = v/n_0$. Распространяясь в среде, волна достигнет

приемника и вызовет его колебания с частотой: $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{vT} = n_0$

Эффект Доплера.

2) Приемник приближается к источнику, а источник покоится:

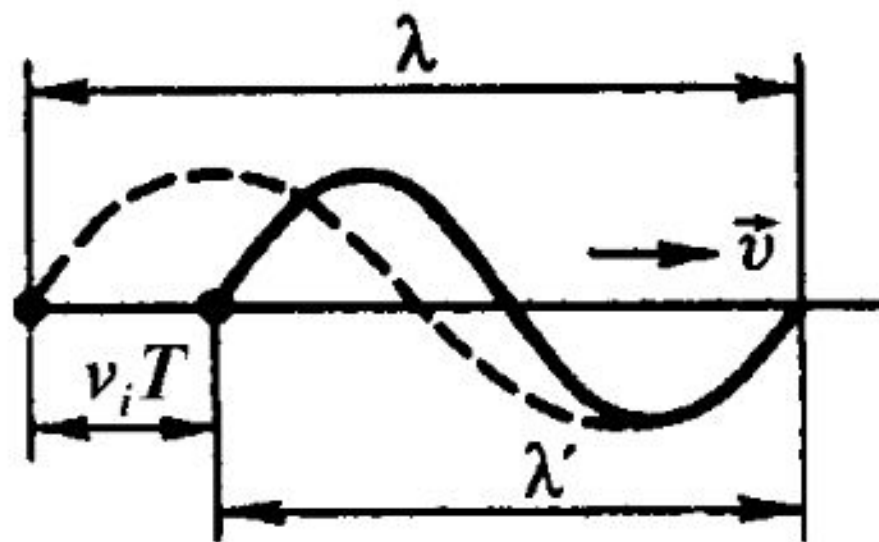
$v_p > 0, v_i = 0$. Скорость распространения волны относительно приемника станет равной $v + v_p$, при этом длина волны не меняется, следовательно

$$n = \frac{v + v_p}{\lambda} = \frac{v + v_p}{vT} = \frac{v + v_p}{v} n_0$$

Частота колебаний, воспринимаемых приемником увеличится.

Эффект Доплера.

3) Источник приближается к приемнику, а приемник покоится:



$v_p = 0, v_i > 0$. Скорость распространения колебаний v зависит только от свойств среды, поэтому за время, равное периоду колебаний источника, излученная им волна пройдет в направлении к приемнику расстояние $vT = \lambda$. Источник же пройдет расстояние $v_i T$. Поэтому к моменту окончания излучения волны длина волны в направлении движения

сократится и станет $\lambda' = \lambda - v_i T$. Частота колебаний которые воспринимает

приемник, увеличится:
$$n = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_i)T} = \frac{v}{v - v_i} n_0$$

Эффект Доплера.

4) Источник и приемник движутся друг относительно друга.

Этот случай обобщает два предыдущих. Частота колебаний,

воспринимаемых приемником:
$$n = \frac{v \pm v_p}{v \mp v_i} n_0.$$

Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак — в случае их взаимного удаления.

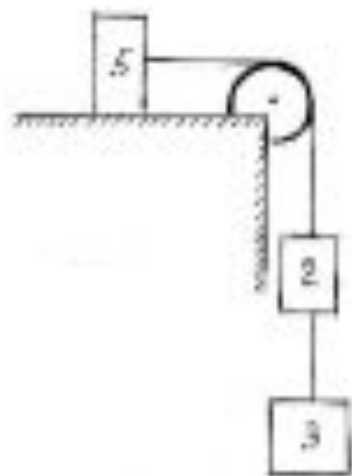
Если направления скоростей не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то вместо этих скоростей в формуле надо брать их проекцию на направление этой прямой.

Контрольная 1. Задача 1.

1. Найдите величину нормального ускорения материальной точки в момент времени $t = 2$ с, если вектор скорости изменяется с течением времени согласно уравнению $\vec{v} = 4t^2\vec{i} - t^3\vec{j}$ (м/с), а радиус кривизны траектории в этот момент времени равен $R = 10$ м.

Контрольная 1. Задача 2.

2. Найдите ускорение системы грузов и силы натяжения нитей, которыми соединены эти грузы. Нити невесомы и нерастяжимы, блок невесом, трение отсутствует. Массы грузов заданы в кг.



Контрольная 1. Задача 3.

3. Снаряд, летящий по параболе, в верхней точке траектории взорвался. В результате образовалось два осколка, один из которых полетел под углом 90° с импульсом $250 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, а импульс другого осколка был равен $500 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$. Сделайте рисунок, найдите импульс снаряда до разрыва и угол под которым полетит второй осколок.

Контрольная 1. Задача 4.

4. Тело массой $m = 5$ кг двигалось со скоростью $\vec{v} = 3t^2\vec{i} - t^4\vec{j} + 5t\vec{k}$ (м).
Найдите мощность, затрачиваемую на движение тела, в момент времени $t = 1$ с.

Контрольная 1. Задача 5.

5. Потенциальная энергия частицы имеет вид $W_{\text{п}} = xuz + x^2y^2z^2$. Найдите величину силы, действующую на частицу в точке с координатами (2,1,3).

Контрольная 1. Задача 6.

6. Брусок массой $M = 2$ кг лежит на вершине наклонной плоскости высотой $h = 1$ м. Пуля массой $m = 10$ г летящая со скоростью $v = 1000$ м/с (вектор скорости направлен параллельно наклонной плоскости) попадает в брусок и застревает в нем. Какую скорость будет иметь брусок с пулей у основания наклонной плоскости, если работа силы трения бруска о плоскость равна $A_{\text{тр}} = 15$ Дж?



Спасибо за внимание!

Желаю удачи!