Косова Г.Н., доцент кафедры физики ПГТУ

Курс **«Физика»**

Раздел **«Механика»**

Тема «Волны в упругой среде»

Волны в упругой среде.

Резонанс.

Волновой процесс.

Если возбудить колебания в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной) то, вследствие взаимодействия между частицами среды, эти колебания будут передаваться от одной точки среды к другой со скоростью, зависящей от свойств среды.

При рассмотрении колебаний <u>не учитывается</u> детальное строение среды; среда рассматривается как ***сплошная***, непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Среда называется ***линейной,*** если ее свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых колебаниями.

Волновым процессом или ***волной*** — называется процесс распространения колебаний в сплошной среде.

При распространении волны частицы колеблются около своих положений равновесия, а не перемещаются вслед за волной.

Вместе с волной от частицы к частице передается только состояние колебательного движения и его энергия.

Основным свойством всех волн ***является перенос энергии без переноса вещества***.

Упругие волны.

Упругими (или механическими) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

Продольная волна — волна, в которой частицы среды колеблются в направлении распространения волны.

Поперечная волна — волна, в которой частицы среды колеблются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут распространяться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации сжатия и растяжения (в твердых, жидких и газообразных телах).

Поперечные волны могут распространяться только в среде, в которой возникают упругие силы при деформации сдвига (только в твердых телах).

$\nu = 16$ Гц $\div$ 20 кГц

$\nu < 16$ Гц

$\nu > 20$ кГц

$\nu > 1$ ГГц

Упругая гармоническая волна.

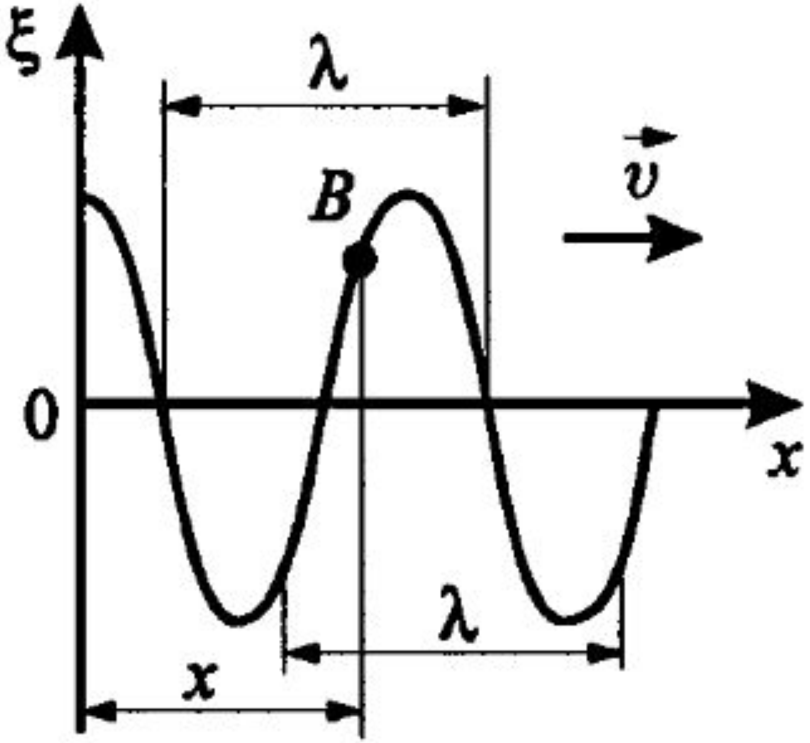
Упругая волна называется ***гармонической***, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Пусть гармоническая волна распространяется со скоростью υ вдоль оси OX. Обозначим смещения частиц среды через $\xi = \xi(x,t)$.

Для данного момента времени t зависимость между смещением частиц среды и расстоянием x этих частиц от источника колебаний O можно представить в виде ***графика волны***.

Отличие *графика волны* от *графика гармонического колебания*:

Упругая гармоническая волна.



1) график волны представляет зависимость смещения всех частиц среды от ***расстояния*** до источника колебаний <u>в данный момент времени</u> $\xi = \xi(x, t = const)$;

2) график гармонического колебания это зависимость смещения <u>данной частицы</u> от ***времени*** $\xi = \xi(x = const, t)$.

Длиной волны λ называется расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе.

Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется гармоническая волна за время, равное периоду колебаний T:

$$\lambda = \upsilon T \qquad \text{или} \qquad \upsilon = \lambda n$$

где n — частота колебаний, υ — скорость распространения волны.

Фронт волны.

Волновым фронтом называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к определенному моменту времени t.

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени — один.

Волна называется ***плоской***, если ее волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу.

Волна называется ***сферической***, если ее волновые поверхности имеют вид концентрических сфер. Центры этих сфер называются ***центром волны***.

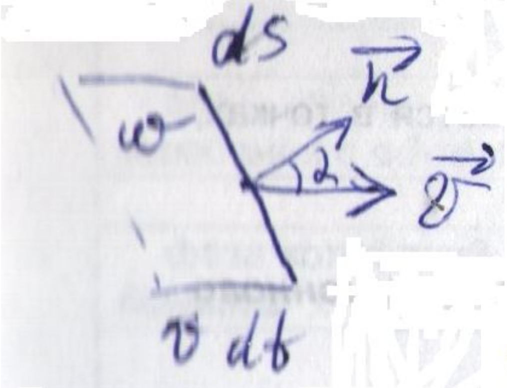
Бегущие волны.

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию.

Перенос энергии количественно характеризуется ***вектором плотности потока энергии*** (вектор Умова). Направление этого вектора совпадает с направлением распространения энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно волне.

$$w = w_к + w_п$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$



$$dW = w \cdot dS \cdot v \cdot dt \cos\alpha =$$

$$= w\, d\vec{S} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$d\Phi_w = \frac{dW}{dt}$$

$$d\Phi_w = w\, d\vec{S} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d\Phi_w}{dS} = w \cdot v = U$$

$$\vec{U} = w \vec{v}.$$

Уравнение плоской волны.

Пусть точки, которые расположены в плоскости $x = 0$, колеблются по закону $\xi(0,t) = A\cos\omega t$. И пусть υ — скорость распространения колебаний в данной среде.

Колебания частицы B среды (см. рисунок), расположенной на расстоянии x от источника колебаний O, будут происходить по тому же закону. Но, поскольку для прохождения волной расстояния x требуется время $\tau = x/\upsilon$, то ее колебания будут отставать по времени от колебания источника на τ.

Уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x, имеет вид

$$\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$$

Уравнение плоской волны.

Следовательно, ***функция*** $\xi(x,t)$ является не только периодической функцией времени, но и периодической функцией координаты x.

В общем случае ***уравнение плоской волны***, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергию, имеет вид

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right]$$

здесь: $A = const$ — ***амплитуда волны***,

ω — циклическая частота,

φ_0 — ***начальная фаза волны***,

$\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0$ — ***фаза плоской волны***.

Уравнение плоской волны.

Если определить ***волновое число***:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}$$

то уравнение плоской бегущей волны можно записать в виде

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

или в экспоненциальной форме

$$\xi(x,t) = A\mathrm{e}^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

где физический смысл имеет только вещественная часть.

В общем виде уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении $\vec{s}$ имеет вид:

$$\xi(\vec{r},t) = A\exp[i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \varphi_0)]$$

Фазовая скорость волны.

Скорость $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$ в этих уравнениях есть <u>скорость распространения фазы волны</u> и ее называют ***фазовой скоростью***.

Действительно, пусть в волновом процессе фаза постоянна:

$$\omega t - kx + \varphi_0 = const\,.$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

$$\upsilon = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}}$$

Уравнение сферической волны.

$$\xi(r,t)=\frac{A}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0)$$

где r — расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

Амплитуда колебаний в сферической волне убывает с расстоянием по закону $\frac{1}{r}$.

Волновое уравнение.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается ***волновым уравнением*** — дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta\xi=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

где υ — фазовая скорость,

$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — ***оператор Лапласа***.

Решением волнового уравнения является уравнение любой волны (в том числе и плоская и сферическая волны).

Волновое уравнение для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Принцип суперпозиции.

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, ***линейна***, то к этим волнам применим ***принцип суперпозиций (наложения) волн:***

при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвующие в каждом из слагающих волновых процессов.

Любое сложное колебание может быть представлено в виде суммы одновременно совершающихся гармонических колебаний (разложение Фурье).

Поэтому любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, то есть в виде волнового пакета или группы волн.

Волновой пакет.

Волновым пакетом называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

За скорость распространения волнового пакета принимают скорость перемещения максимума его амплитуды (центра волнового пакета).

Групповой скоростью u называется скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет (или скорость движения центра волнового пакета).

Ее величина

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

Связь групповой и фазовой скоростей:

$$u = \upsilon - \lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda}$$

Интерференция волн. Стоячие волны

Когерентностью называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

Две волны называются ***когерентными***, если разность их фаз не зависит от времени.

Гармонические волны, имеющие одинаковую частоту, когерентны всегда.

Интерференцией волн называется явление наложения волн, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усиление в одних точках пространства и ослабление в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.

Особым случаем интерференции являются стоячие волны.

Стоячие волны.

Стоячие волны — это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Пусть две плоские бегущие волны с одинаковыми амплитудами и частотами распространяются навстречу друг другу вдоль оси x:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx), \qquad \xi_2 = A\cos(\omega t + kx)$$

Сложив эти уравнения, с учетом $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ и $k = 2\pi/\lambda$, получим ***уравнение стоячей волны***:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos kx\cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

Стоячие волны.

$$\xi = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

<u>В точках среды, где</u>

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$$

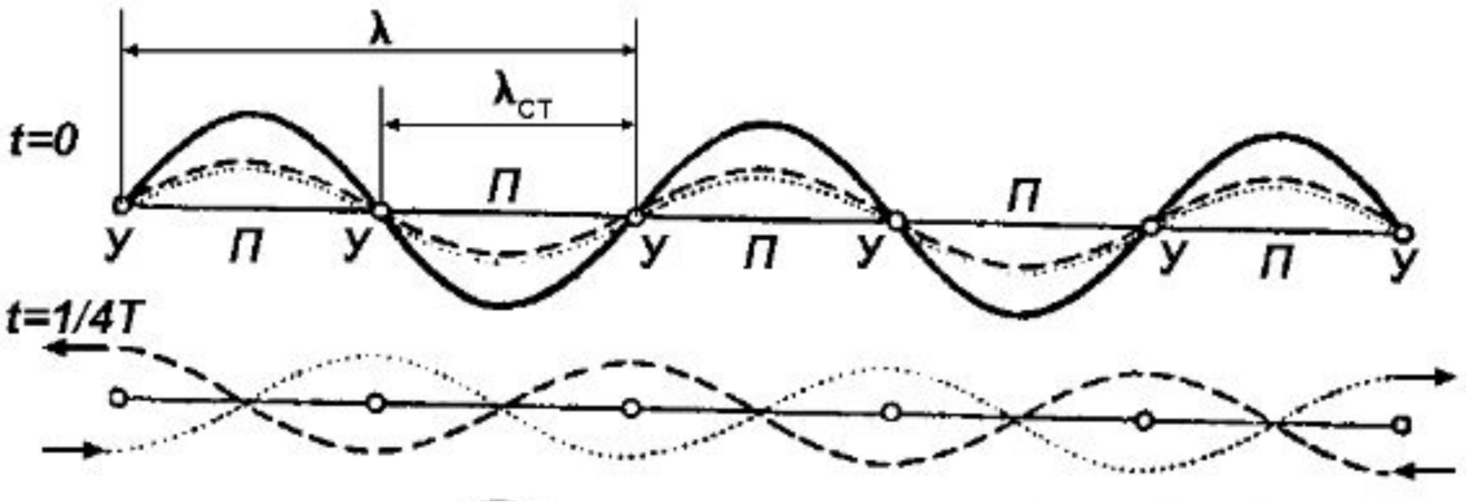
$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

амплитуда стоячей волны достигает максимального значения $A_{CT} = 2A$.

Такие точки называются ***пучностями стоячей волны***.

<u>Координаты пучностей:</u>

$$x_{П} = \pm m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, \ldots)$$



<u>В точках среды, где</u> $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$, амплитуда стоячей обращается в нуль $A_{CT} = 0$. Такие точки называются ***узлами стоячей волны***.

<u>Координаты узлов:</u> $x_{У} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$.

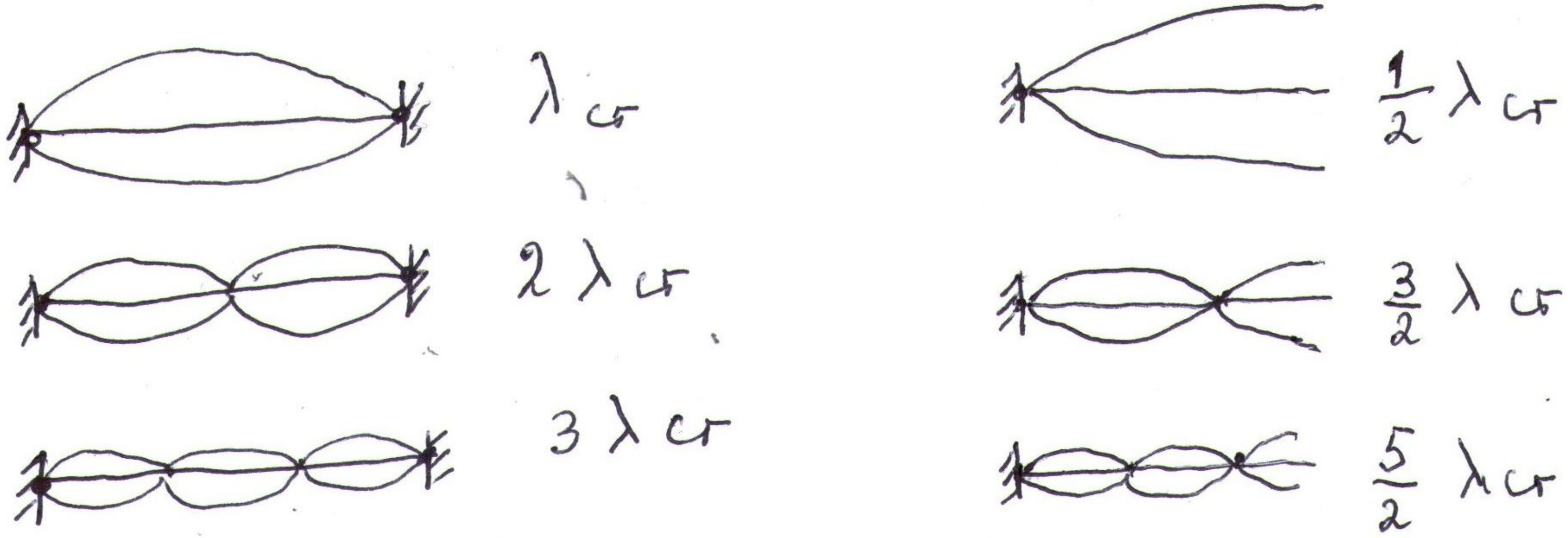
Расстояния между двумя соседними узлами и между двумя соседними пучностями одинаковы и равны половине длины волны λ бегущих волн. Эту величину называют ***длиной стоячей волны***: $\lambda_{CT} = \frac{\lambda}{2}$.

Стоячие волны.

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн.

Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то на границе сред образуется ***пучность***.

Если среда, от которой происходит отражение, более плотная, то на границе сред образуется ***узел*** стоячей волны.



Сравнительная таблица.

В ***бегущей волне***	В ***стоячей волне***
Амплитуда колебаний	
все точки волны совершают колебания с ***одинаковой*** амплитудой	все точки между двумя узлами колеблются с ***разными*** амплитудами
Фаза колебаний	
фаза колебаний ***зависит от координаты*** x рассматриваемой точки	все точки между двумя узлами колеблются с ***одинаковыми*** фазами
	при переходе через узел фаза колебаний изменяется на π; точки лежащие по разные стороны от узла колеблются в ***противофазе***
Перенос энергии	
энергия колебательного движения переносится в направлении распространения бегущей волны	***переноса энергии нет***, лишь в пределах $\lambda/2$ происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно

Эффект Доплера.

Эффектом Доплера называется изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника этих колебаний и приемника друг относительно друга. В акустике эффект Доплера проявляется как повышение тона при приближении источника звука к приемнику и понижения тона звука при удалении источника от приемника.

Пусть источник и приемник звука движутся вдоль соединяющей их прямой; υ_i и υ_p — скорости источника и приемника (положительны при сближении и отрицательны при удалении источника и приемника); n_0 — частота колебаний источника; υ — скорость распространения звука в данной среде.

1) **Источник и приемник покоятся относительно среды:** $\upsilon_i = \upsilon_p = 0$.

Длина волны $\lambda = \upsilon T = \upsilon / n_0$. Распространяясь в среде, волна достигнет приемника и вызовет его колебания с частотой: $n = \dfrac{\upsilon}{\lambda} = \dfrac{\upsilon}{\upsilon T} = n_0$

Эффект Доплера.

2) Приемник приближается к источнику, а источник покоится:

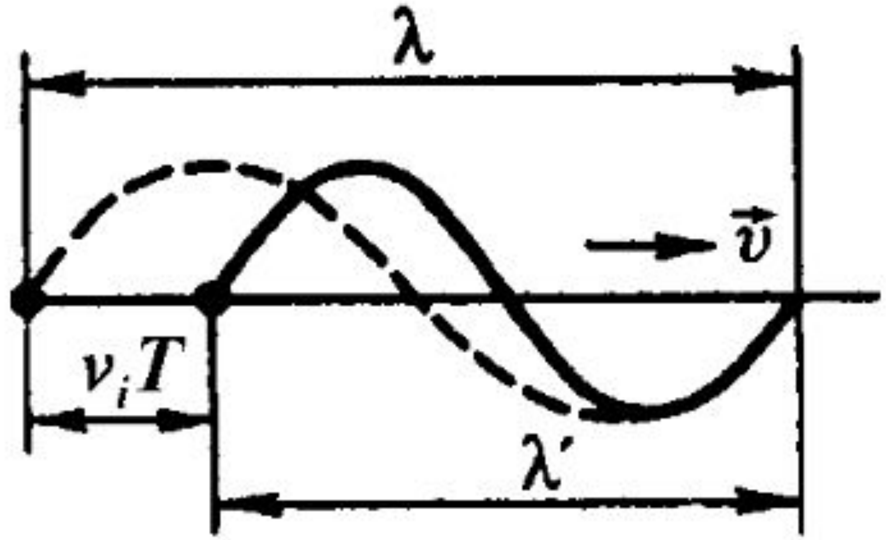
$\upsilon_p > 0, \upsilon_i = 0$. Скорость распространения волны относительно приемника станет равной $\upsilon + \upsilon_p$, при этом длина волны не меняется, следовательно

$$n = \frac{\upsilon + \upsilon_p}{\lambda} = \frac{\upsilon + \upsilon_p}{\upsilon T} = \frac{\upsilon + \upsilon_p}{\upsilon} n_0$$

Частота колебаний, воспринимаемых приемником увеличится.

Эффект Доплера.

3) Источник приближается к приемнику, а приемник покоится:



$\upsilon_p = 0, \upsilon_i > 0$. Скорость распространения колебаний v зависит только от свойств среды, поэтому за время, равное периоду колебаний источника, излученная им волна пройдет в направлении к приемнику расстояние $\upsilon T = \lambda$. Источник же пройдет расстояние $\upsilon_i T$. Поэтому к моменту окончания излучения волны длина волны в направлении движения сократится и станет $\lambda' = \lambda - \upsilon_i T$. Частота колебаний которые воспринимает приемник, увеличится: $n = \dfrac{\upsilon}{\lambda'} = \dfrac{\upsilon}{(\upsilon - \upsilon_i)T} = \dfrac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_i} n_0$

Эффект Доплера.

4) Источник и приемник движутся друг относительно друга.

Этот случай обобщает два предыдущих. Частота колебаний, воспринимаемых приемником: $n = \dfrac{\upsilon \pm \upsilon_p}{\upsilon \mp \upsilon_i} n_0$.

Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак — в случае их взаимного удаления.

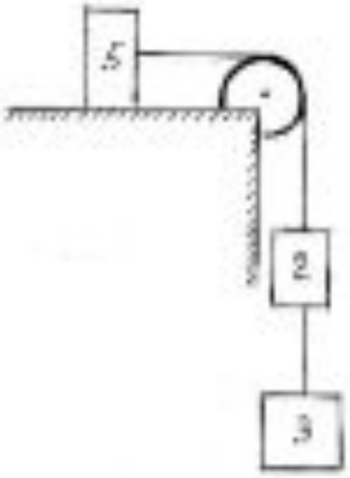
Если направления скоростей не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то вместо этих скоростей в формуле надо брать их проекцию на направление этой прямой.

Контрольная 1. Задача 1.

1.Найдите величину нормального ускорения материальной точки в момент времени t = 2 с, если вектор скорости изменяется с течением времени согласно уравнению $\vec{v} = 4t^2\vec{i} - t^3\vec{j}$ (м/с), а радиус кривизны траектории в этот момент времени равен R = 10 м.

Контрольная 1. Задача 2.

2.Найдите ускорение системы грузов и силы натяжения нитей, которыми соединены эти грузы. Нити невесомы и нерастяжимы, блок невесом, трение отсутствует. Массы грузов заданы в кг.



Контрольная 1. Задача 3.

3.Снаряд, летящий по параболе, в верхней точке траектории взорвался. В результате образовалось два осколка, один из которых полетел под углом 90^o с импульсом 250 кг·м/с, а импульс другого осколка был равен 500 кг·м/с. Сделайте рисунок, найдите импульс снаряда до разрыва и угол под которым полетит второй осколок.

Контрольная 1. Задача 4.

4.Тело массой m = 5 кг двигалось со скоростью $\vec{v} = 3t^2\vec{i} - t^4\vec{j} + 5t\vec{k}$(м). Найдите мощность, затрачиваемую на движение тела, в момент времени t = 1 с.

Контрольная 1. Задача 5.

5.Потенциальная энергия частицы имеет вид $W_{\text{п}} = xyz + x^2y^2z^2$. Найдите величину силы, действуюшую на частицу в точке с координатами (2,1,3).

Контрольная 1. Задача 6.

6.Брусок массой $M = 2$ кг лежит на вершине наклонной плоскости высотой $h = 1$ м. Пуля массой $m = 10$ г летящая со скоростью $v = 1000$ м/с (вектор скорости направлен параллельно наклонной плоскости) попадает в брусок и застревает в нем. Какую скорость будет иметь брусок с пулей у основания наклонной плоскости, если работа силы трения бруска о плоскость равна $A_{тр} = 15$ Дж?

Спасибо за внимание!

Желаю удачи!