

## Лекция 23.

Квантовые свойства микрочастиц.  
Волны де Бройля. Волновая  
функция.

# Гипотеза де Бройля

де Бройль (1924):

**материя так же, как и электромагнитное излучение, может одновременно проявлять свойства частицы и волны.**

Корпускулярные характеристики — энергия  $E$  и импульс  $p$ ,  
волновые характеристики — частота  $\omega$  и длина волны  $\lambda$ .  
Соотношения между ними такие же, как для фотонов

$$E = h\nu = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

Любой частице с импульсом  $p$  ставится в соответствие волновой процесс

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

длина волны  
де Бройля

Вывод:

**Корпускулярно-волновой дуализм** — универсальное свойство материи. Корпускулярные свойства усиливаются с ростом частоты  $\omega$ .

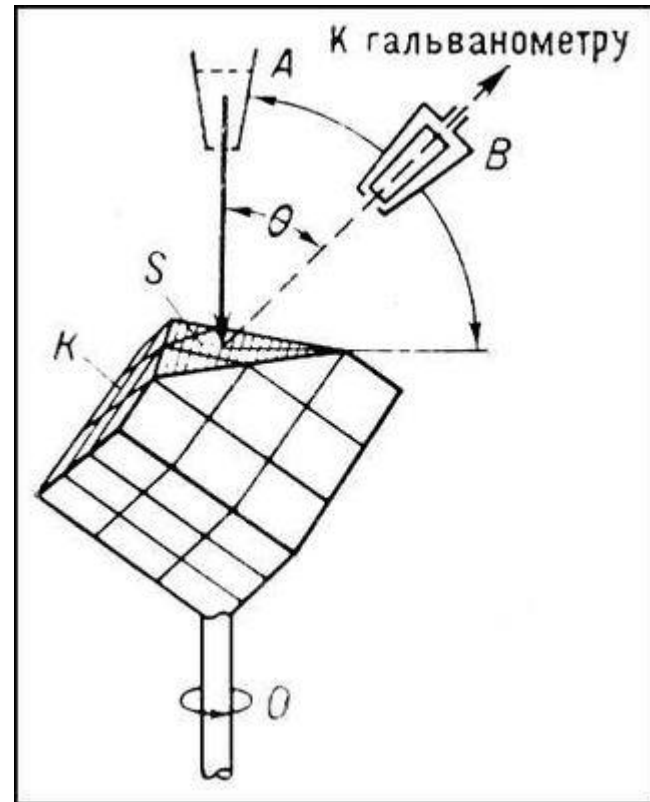
*Пример:* жесткое  $\gamma$  – излучение ведет себя практически как поток фотонов, а радиоволны корпускулярных свойств почти не проявляют.

## Опыты Девиссона и Джермера

Рассеяние быстрых электронов на полированной поверхности кристалла никеля.

Схема опыта (см. рис.): К — кристалл; А и В — источник и приёмник электронов. Пучок электронов падает перпендикулярно отшлифованной плоскости кристалла S.

Опыты показали ярко выраженную селективность рассеяния электронов. При различных значениях углов и скоростей, в отражённых лучах наблюдаются максимумы и минимумы интенсивности. Таким образом наблюдалась дифракция электронов на кристаллической решётке монокристалла.



## Свойства волн де Бройля

1) Фазовая скорость волн де Бройля больше скорости света в вакууме.

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}$$

2) Групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы.

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}$$
$$= \frac{pc^2}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v$$

Таким образом, волна де Бройля перемещается вместе с частицей.

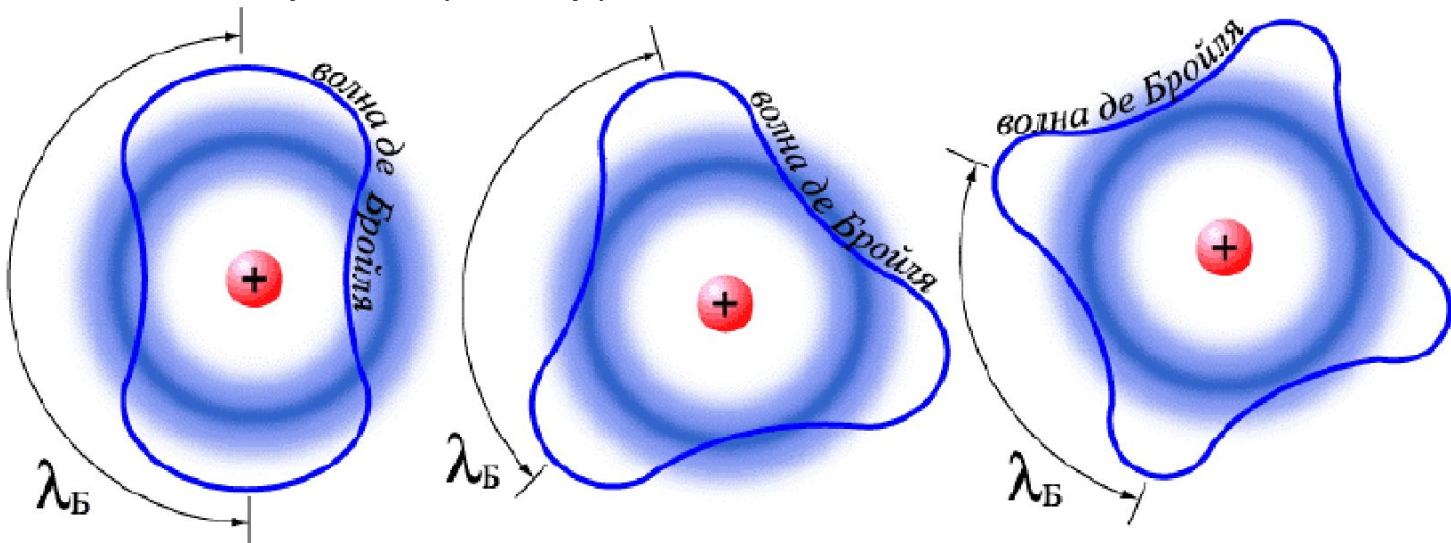
3) Групповая и фазовая скорости волны де Бройля для фотона равны скорости света  $c$ .

$$u = \frac{pc^2}{E} = \frac{mcc^2}{mc^2} = c \qquad v_{\text{фаз}} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mc} = c$$

4) Групповая и фазовая скорости связаны соотношением

$$uv = c^2$$

5) Радиус стационарной орбиты водородоподобного атома задан целым числом волн де Бройля (Н. Бор).



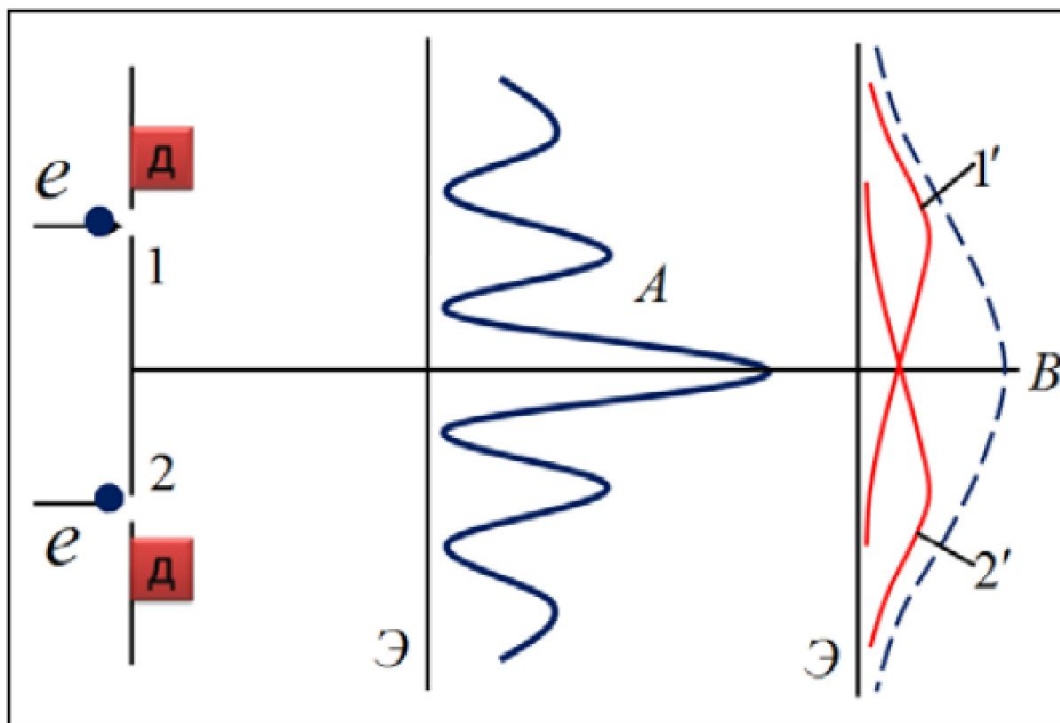
# Эксперимент Фейнмана

Пучок электронов от источника падает на экран с отверстиями 1 и 2. Прошедшие через отверстия электроны регистрируются с помощью фотопластины, расположенной позади экрана.

При одновременном открытии обоих отверстий наблюдалась интерференционная картина (см. рис.).

Электрон «чувствует», открыто ли только одно отверстие или оба сразу.

Сказать, через какое из отверстий прошла частица, **невозможно**.

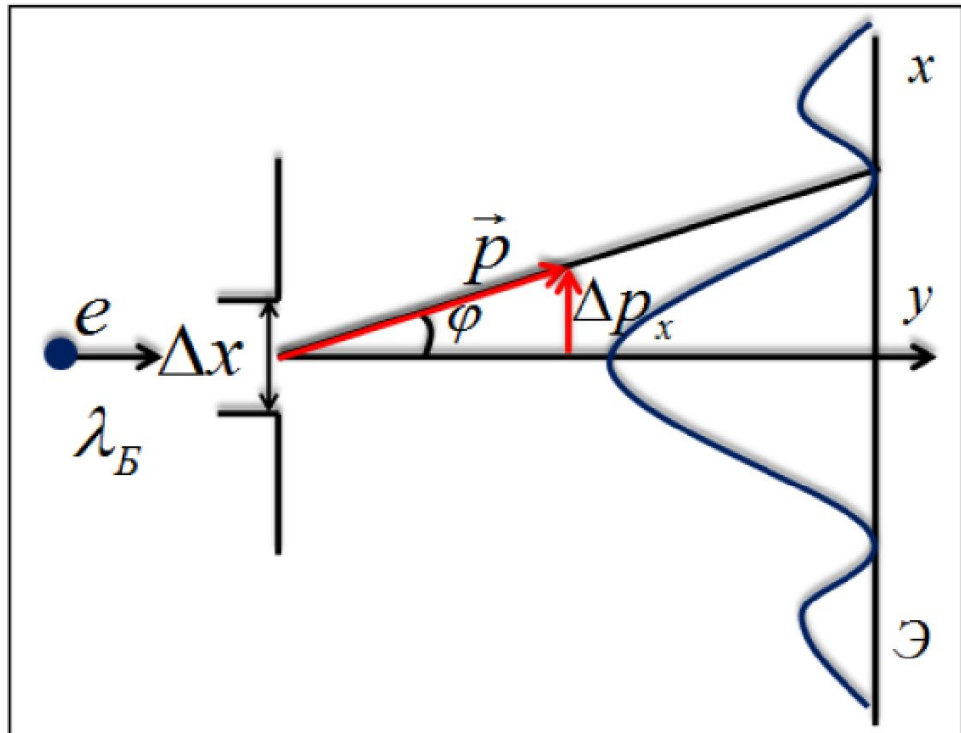


# Принцип неопределенностей

Наличие у микрочастицы волновых свойств означает отказ от понятия траектории частицы. Как следствие:

- 1) Квантовая микрочастица может быть обнаружена в один и тот же момент времени в разных точках пространства.
- 2) Невозможно одновременно точно определить координату и импульс частицы.

Дифракция  
электрона на щели





## Соотношение неопределенностей.

1) Неопределенности координаты и импульса до прохождения щели

$$\Delta x = a \quad \Delta p_x = 0$$

2) ... после прохождения щели

$$\Delta p_x = p \sin \varphi = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin \varphi$$

3) Условие первого дифракционного максимума

$$\Delta x \sin \varphi = \lambda$$

$$\Delta x \Delta p_x = 2\pi\hbar$$

4) Более точное соотношение

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

соотношение  
неопределенностей  
Гейзенберга

Таким образом, чем точнее мы определяем координату частицы, тем менее определенной становится проекция импульса частицы на эту координатную ось, и наоборот.

Физические переменные, которые нельзя определить или измерить одновременно называют **сопряженными**.

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2},$$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Принцип дополнительности (Н. Бор, 1927 г):

Получение информации об одних свойствах микрочастицы (об одних ее величинах) приводит к потере информации о других ее свойствах (о других величинах).

# Волновая функция

Состояние частицы в квантовой механике описывается волновой функцией  $\Psi(x,y,z,t)$

Вероятностная интерпретация ВФ (М. Борн):

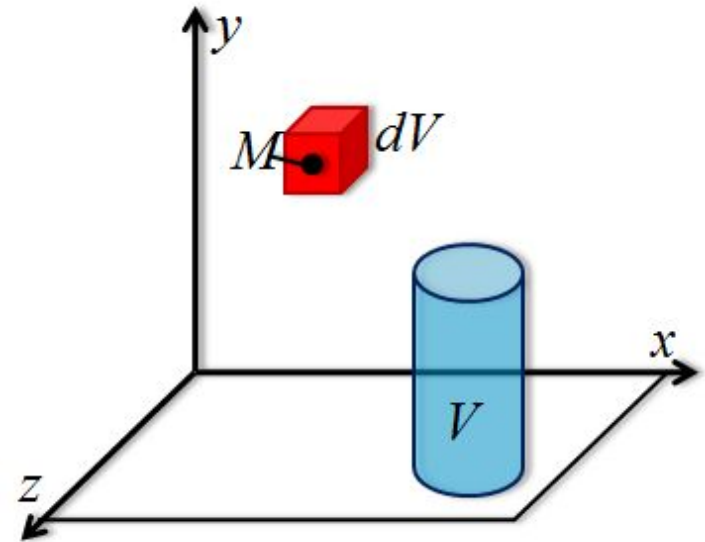
Квадрат модуля волновой функции определяет плотность вероятности того, что в момент времени  $t$  частица может быть обнаружена в точке пространства с координатами  $(x,y,z)$ .

Вероятность найти частицу в области  $dV$  в момент времени  $t$  равна

$$dw = |\psi^2| dV$$

а вероятность найти частицу в области  $V$

$$w = \int_V |\psi^2| dV$$



# Свойства волновой функции

1) Волновая функция должна удовлетворять условию нормировки.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1$$

2) Волновая функция должна быть:

- а) конечной (вероятность не может быть больше 1),
- б) однозначной (вероятность не может быть неоднозначной)
- в) непрерывной (вероятность не может изменяться скачком).

3) Волновая функция позволяет вычислять средние значения любых физических величин, характеризующих данный микрообъект. Именно эти значения фиксируются в экспериментах.

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r |\psi|^2 dV$$

## Волновая функция свободной частицы

Для свободной микрочастицы, движущейся вдоль оси  $x$

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{-i\left(\omega_B t - \frac{2\pi x}{\lambda_B}\right)} = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

В реальности микрочастица представляет собой волновой пакет конечного размера

$$\psi(x, t) = \int_{p_0 - \frac{\Delta p}{2}}^{p_0 + \frac{\Delta p}{2}} A(p) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} dp$$