Доказательство неравенств.

Пупкова Т.В., учитель математики МАОУ
«Многопрофильный лицей №1» г. Магнитогорск

Решение задач на доказательство неравенств.

- *При решении задач на доказательство неравенств или равенств часто применяются следующие способы:*

Использование формул о среднем арифметическом и среднем геометрическом неотрицательных чисел.

- Среднее арифметическое неотрицательных чисел.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a*b}$$

- Среднее геометрическое неотрицательных чисел.

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{a*b*c}$$

Пример использования формул.

- Доказать справедливость неравенства
- $$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$$
- Для всех **положительных x, y, z**.

- **Доказательство:**
- 1) Применим формулу

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a*b}$$

Истинную для всех положительных значений a, b.

- $$\frac{\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}}\ ; \quad \sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}} = y\ ;$$

$$\frac{\frac{xy}{z}+\frac{zy}{x}}{2} \geq y\ ;$$

- Аналогично:

$$\frac{\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}}{2} \geq x \ ;$$

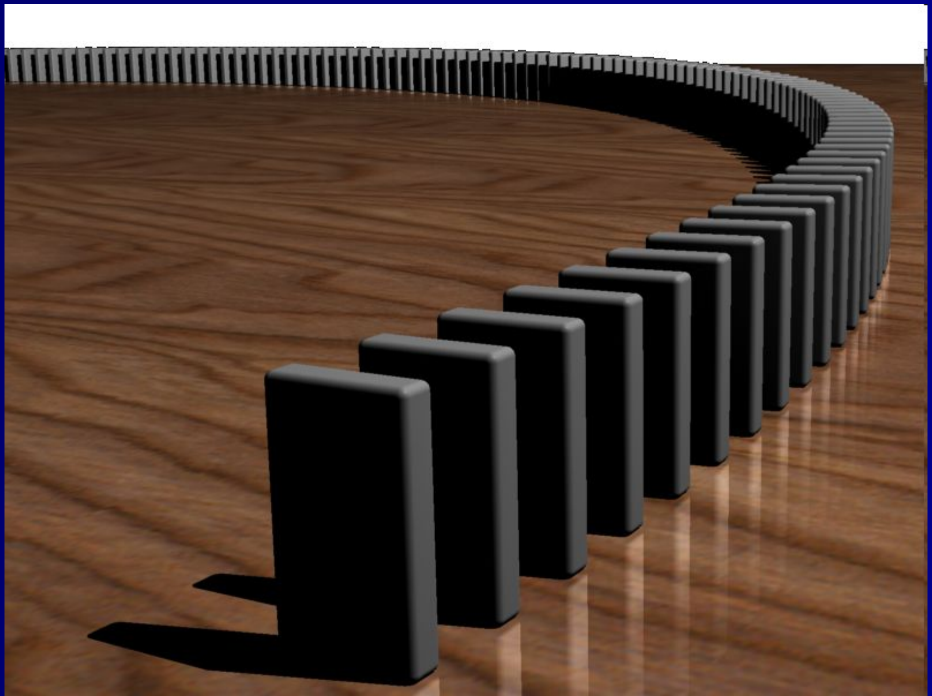
$$\frac{\frac{zy}{x}+\frac{zx}{y}}{2} \geq z \ ;$$

Почленным сложением получившихся неравенств получим истинность первоначального неравенства.

Применение принципа математической индукции.

- *Математическая индукция* — в математике — один из методов доказательства. Используется, чтобы доказать истинность некоего утверждения для всех натуральных чисел. Для этого сначала проверяется истинность утверждения с номером 1 — база индукции, а затем доказывается, что, если верно утверждение с номером n, то верно и следующее утверждение с номером n + 1 — шаг индукции, или индукционный переход.

- Доказательство по индукции наглядно может быть представлено в виде так называемого принципа домино. Пусть какое угодно число косточек домино выставлено в ряд таким образом, что каждая косточка, падая, обязательно опрокидывает следующую за ней косточку (в этом заключается индукционный переход). Тогда, если мы толкнём первую косточку (это база индукции), то все косточки в ряду упадут.



Пример математической индукции.

- Доказать, что, каковы бы ни были натуральное n и вещественное $q \neq 1$, выполняется равенство:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Доказательство.
- Индукция по n. База, n = 1:

$$1+q=\frac{(1-q)(1+q)}{1-q}=\frac{1-q^{1+1}}{1-q}$$

- Переход: предположим, что

$$1+q+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- тогда

$$1+q+\cdots+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=$$

$$=\frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{(n+1)+1}}{1-q}=\frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$

- Что и требовалось доказать.

Использование неравенств вида:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \quad a*b > 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant 2, \quad a*b < 0$$

Пример использования данных неравенств.

- Доказать справедливость неравенства

$(x+2)(y+2)(x+y) \geq 16xy$

При $x>0$ и $y>0$

- Неравенство, которое нам дано равносильно следующему:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{y+2}{\sqrt{y}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 16$$

Преобразуем каждый сомножитель левой части полученного выражения:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right);$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right) \geq 2\sqrt{2};$$

- Второй и третий множитель аналогично:

$$\frac{y+2}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{2};$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 2$$

При почленном умножении получившихся неравенств получим:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{y+2}{\sqrt{y}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 16$$

- Что и требовалось доказать.

Метод неопределённого неравенства.

- Неравенство называется неопределённым, если у него знак \/ или /\ , т.е. когда мы не знаем в какую сторону следует повернуть этот знак, чтобы получить справедливое неравенство.

- Здесь действуют те же правила доказательства, что и с обычными неравенствами.

Пример неопределенного неравенства.

Доказать справедливость неравенства.

$$a + \frac{1}{a} > 2$$

где a – положительное число.

Доказательство:

- Умножая обе части неравенства на а , получим:

$$a^{2} + 1 \ \backslash/\ 2a$$

Перенесем все в левую часть:

$$a^{2} + 1 - 2a \ \backslash/\ 0$$

Получаем формулу: Квадрат разности:

$$(a - 1)^{2} \ \backslash/\ 0$$

Так как квадрат любого числа всегда положительный, следовательно

$$(a - 1)^{2} \overline{>} 0$$

Значит и первоначальное выражение истинно, что и требовалось доказать

Задачи на самостоятельное рассмотрение.

№1

- Доказать неравенство:
- $X(1+У) + У(1+Z) + Z(1+x) \geq 6\sqrt{xyz}$
- Для всех неотрицательных **x, y, z**.

Доказательство:

- Левую часть представим в виде:
- $(x+yz) + (y+zx) + (z+xy)$
- Теперь применим формулу:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a*b}$$

- $$\begin{cases} X + yz \geq 2\sqrt{xyz} \\ Y + zx \geq 2\sqrt{xyz} \\ Z + xy \geq 2\sqrt{xyz} \end{cases}$$

Почленным сложением полученных неравенств убеждаемся в истинности первоначального неравенства.

№2

- Доказать справедливость неравенства $\mathbf{x^2+y^2+\underline{z}^2>12}$ для неотрицательных значений $\mathbf{x, y, z}$, если $\mathbf{x + y + z=16}$.

Доказательство

- Из истинности неравенств:
- $x^2+y^2\geq 2xy$; $x^2+z^2\geq 2xz$; $y^2+z^2\geq 2yz$;
- Следует:
- $2(x^2+y^2+z^2)\geq 2xy + 2xz + 2yz$
- Возведем обе части равенства в квадрат:
- $X^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=36$
- Преобразуем:

$1)3(x^2+y^2+z^2) = (x^2+y^2+z^2)+2(x^2+y^2+z^2);$

- Следовательно получаем:
- $3(x^2+y^2+z^2) \geq 36.$
- $x^2+y^2+z^2 \geq 12.$
- Что и требовалось доказать.

№3

- Доказать справедливость неравенства

$$(x^3+x^2+x+1)^2 \geq 16x^3$$

- для всех $x \in [0;\infty)$.

Доказательство.

- Данное неравенство при указанных значениях x равносильно неравенству $x^3+x^2+x+1 \geq 4x\sqrt{x}$
- Левую часть преобразуем:
- $x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$
- Применим формулу $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a*b}$ для $a \geq 0$; $b \geq 0$.
- Тогда
- $X+1 \geq 2\sqrt{x}$; $x^2+1 \geq 2x$.
- Поэтому $(x+1)(x^2+1) \geq 4x\sqrt{x}$