

# Доказательство неравенств.

Пупкова Т.В., учитель математики МАОУ  
«Многопрофильный лицей №1» г. Магнитогорск

# Решение задач на доказательство неравенств.

- *При решении задач на доказательство неравенств или равенств часто применяются следующие способы:*

# Использование формул о среднем арифметическом и среднем геометрическом неотрицательных чисел.

- Среднее арифметическое неотрицательных чисел.

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a*b}$$

- Среднее геометрическое неотрицательных чисел.

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{a*b*c}$$

# Пример использования формул.

- Доказать справедливость неравенства

- $$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$$

- Для всех положительных  $x, y, z$ .

- **Доказательство:**
- 1) Применим формулу

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

Истинную для всех положительных значений  $a, b$ .

- $\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} ; \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} = y ;$

$$\frac{\frac{xy}{z} + \frac{zy}{x}}{2} \geq y ;$$

- Аналогично:

$$\frac{\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y}}{2} \geq x ;$$

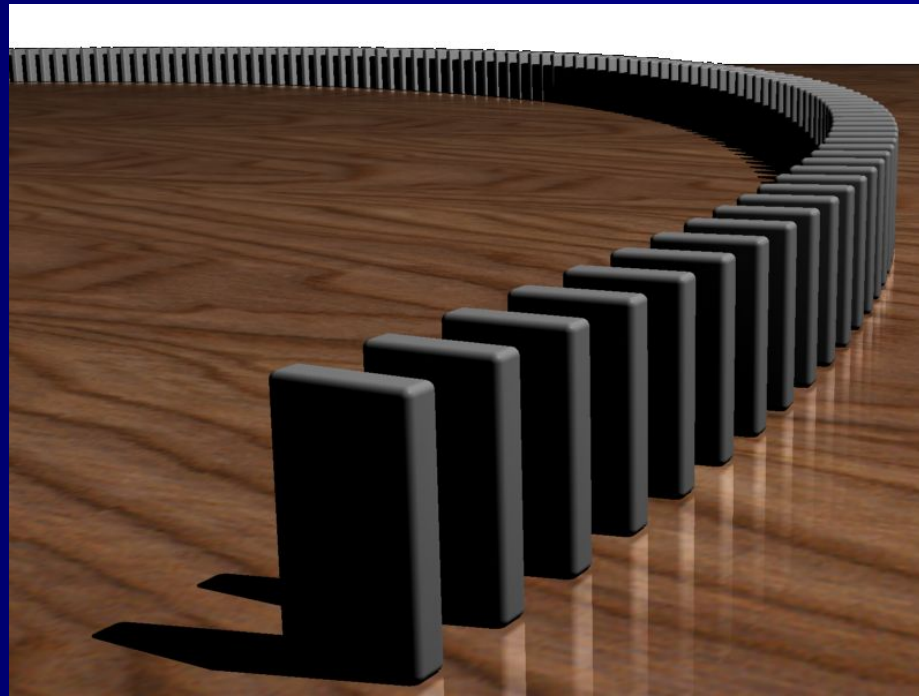
$$\frac{\frac{zy}{x} + \frac{zx}{y}}{2} \geq z ;$$

Почленным сложением получившихся неравенств получим истинность первоначального неравенства.

# Применение принципа математической индукции.

- **Математическая индукция** — в математике — один из методов доказательства. Используется, чтобы доказать истинность некоего утверждения для всех натуральных чисел. Для этого сначала проверяется истинность утверждения с номером 1 — база индукции, а затем доказывается, что, если верно утверждение с номером  $n$ , то верно и следующее утверждение с номером  $n + 1$  — шаг индукции, или индукционный переход.

- Доказательство по индукции наглядно может быть представлено в виде так называемого принципа домино. Пусть какое угодно число косточек домино выставлено в ряд таким образом, что каждая косточка, падая, обязательно опрокидывает следующую за ней косточку (в этом заключается индукционный переход). Тогда, если мы толкнём первую косточку (это база индукции), то все косточки в ряду упадут.





# Пример математической индукции.

- Доказать, что, каковы бы ни были натуральное  $n$  и вещественное  $q \neq 1$ , выполняется равенство:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Доказательство.
- Индукция по  $n$ . База,  $n = 1$ :

$$1 + q = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{1+1}}{1 - q}$$

- Переход: предположим, что

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- тогда

$$1 + q + \dots + q^n + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} =$$

$$= \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{(n+1)+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}$$

- Что и требовалось доказать.

# Использование неравенств вида:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad a \cdot b > 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2, \quad a \cdot b < 0$$

# Пример использования данных неравенств.

- Доказать справедливость  
неравенства

$$(x+2)(y+2)(x+y) \geq 16xy$$

При  $x > 0$  и  $y > 0$

- Неравенство, которое нам дано равносильно следующему:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{y+2}{\sqrt{y}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 16$$

Преобразуем каждый сомножитель левой части полученного выражения:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \right);$$

$$\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \right) \geq 2\sqrt{2};$$

- Второй и третий множитель аналогично:

$$\frac{y+2}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{2};$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 2$$

**При почленном умножении  
получившихся неравенств получим:**

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{y+2}{\sqrt{y}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 16$$

- Что и требовалось доказать.

# Метод неопределённого неравенства.

- Неравенство называется неопределённым, если у него знак  $\forall$  или  $\wedge$ , т.е. когда мы не знаем в какую сторону следует повернуть этот знак, чтобы получить справедливое неравенство.
- Здесь действуют те же правила доказательства, что и с обычными неравенствами.

# Пример неопределенного неравенства.

Доказать справедливость неравенства.

$$a + \frac{1}{a} > 2$$

где  $a$  – положительное число.



Доказательство:

- Умножая обе части неравенства на  $a$ , получим:

$$a^2 + 1 \geq 2a$$

Перенесем все в левую часть:

$$a^2 + 1 - 2a \geq 0$$

Получаем формулу: Квадрат разности:

$$(a - 1)^2 \geq 0$$

Так как квадрат любого числа всегда положительный, следовательно

$$(a - 1)^2 \geq 0$$

Значит и первоначальное выражение истинно, что и требовалось доказать

**Задачи на  
самостоятельное  
рассмотрение.**

# №1

- Доказать неравенство:
  - $x(1+y) + y(1+z) + z(1+x) \geq 6 \sqrt{xyz}$
  - Для всех неотрицательных  $x, y, z$ .

# Доказательство:

- Левую часть представим в виде:
- $(x+yz) + (y+zx) + (z+xy)$
- Теперь применим формулу:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a*b}$$

- $x + yz > 2 \sqrt{xyz}$
  - $y + zx > 2 \sqrt{xyz}$
  - $z + xy > 2 \sqrt{xyz}$
- Почленным сложением полученных неравенств убеждаемся в истинности первоначального неравенства.

## №2

- Доказать справедливость неравенства  $x^2 + y^2 + z^2 > 12$  для неотрицательных значений  $x, y, z$ , если  $x + y + z = 16$ .

# Доказательство

■ Из истинности неравенств:

■  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ;  $x^2 + z^2 \geq 2xz$ ;  $y^2 + z^2 \geq 2yz$ ;

■ Следует:

■  $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy + 2xz + 2yz$

■ Возведем обе части равенства в квадрат:

■  $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 36$

■ Преобразуем:

1)  $3(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(x^2 + y^2 + z^2)$ .

- Следовательно получаем:

- $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 36.$

- $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12.$

- Что и требовалось доказать.

## №3

- Доказать справедливость неравенства
$$(x^3 + x^2 + x + 1)^2 \geq 16x^3$$
  - для всех  $x \in [0; \infty)$ .



# Доказательство.

- Данное неравенство при указанных значениях  $x$  равносильно неравенству

$$x^3 + x^2 + x + 1 \geq 4x\sqrt{x}$$

- Левую часть преобразуем:

- $x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$

- Применим формулу

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a*b}$$

для  $a \geq 0$ ;  
 $b \geq 0$ .

- Тогда

- $x+1 \geq 2\sqrt{x}$  ;  $x^2+1 \geq 2x$ .

- Поэтому  $(x+1)(x^2+1) \geq 4x\sqrt{x}$