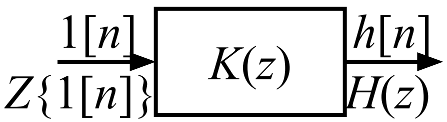
РАДИОАВТОМАТИКА

Лекция 14

ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ. ОШИБКИ РЕГУЛИРОВАНИЯ В ДИСКРЕТНОЙ САР

ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ



Найти переходную характеристику можно:

- решением разностного уравнения системы при $x[n] = 1[n]$,
- вычислением изображения переходной характеристики $H(z) = Z\{1[n]\}K(z)$ с последующим переходом к оригиналу.

$$Z\{1[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \qquad H(z) = \frac{z}{z-1} K(z).$$

Перейти к оригиналу можно, разложив изображение $H(z)$ в ряд Лорана

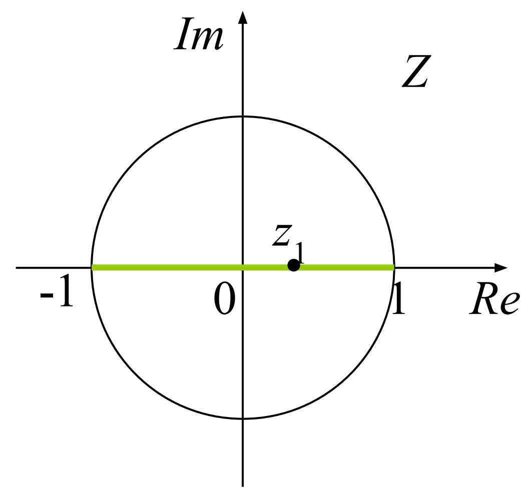
$H(\mathbf{z}) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots$

Сравнивая этот ряд с Z-преобразованием переходной характеристики

$$Z\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} = h[0] + h[1] z^{-1} + h[2] z^{-2} + \ldots$$

видим, что $h[0] = h_0$, $h[1] = h_1$, $h[2] = h_2$ и т.д.

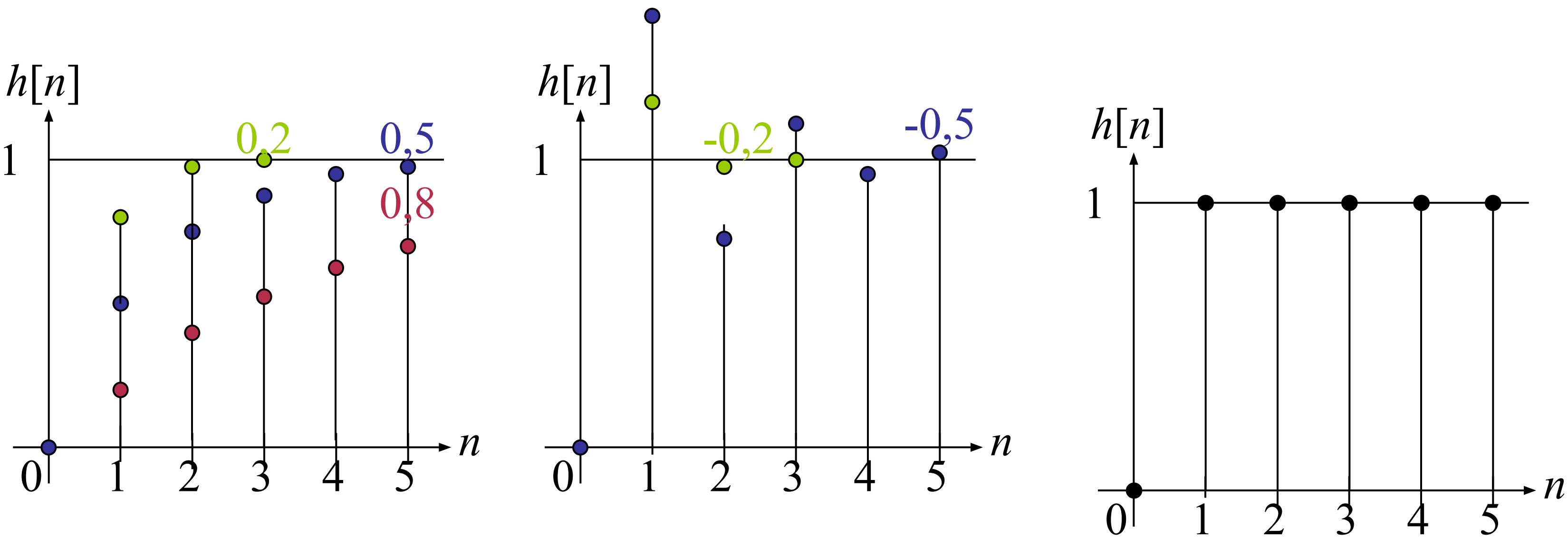
Выясним связь формы переходной характеристики с положением корней на комплексной плоскости Z



Если корень (z_1) находится на действительной оси, тогда свободная составляющая $y_{св}[n] = A z_1^{\,n}$ и переходная характеристика $h[n] = 1 - z_1^{\,n}$.

$h[n] = 1 - z_1^{\,n}$

1) $0 < z_1 \leq 1$ 2) $-1 \leq z_1 < 0$ 3) $z_1 = 0$



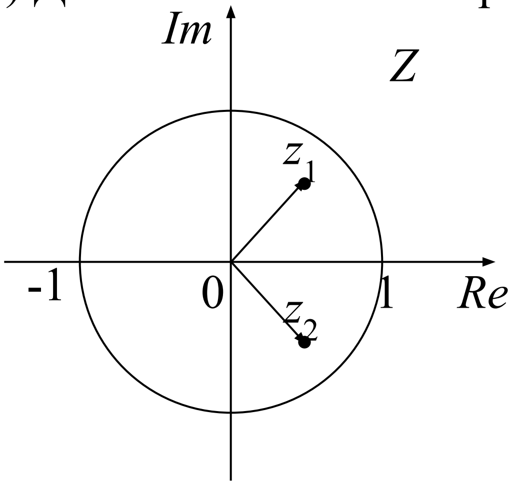
Для положительного корня ($0 < z_1 \leq 1$) переходная характеристика монотонная, а для отрицательного корня ($-1 \leq z_1 < 0$) колебательная с периодом колебаний, равным двум интервалам дискретизации.

Чем ближе корень к нулю, тем быстрее переходная характеристика стремится к 1

При нулевом корне реализуется переходная характеристика минимальной длительности. При m нулевых корнях (КИХ-фильтр) длительность переходной характеристики равна m интервалам дискретизации.

4) Два комплексно – сопряженных корня

$$z_{1,2} = |\, z_1 \,|\, e^{\pm jArg(z_1)}$$



$$h[n] = 1 - 0{,}5(z_1^{\,n} + z_2^{\,n}) = 1 - 0{,}5|\, z_1 \,|^n \left(e^{jn\mathrm{Arg}(z_1)} - e^{-jn\mathrm{Arg}(z_1)}\right) =$$

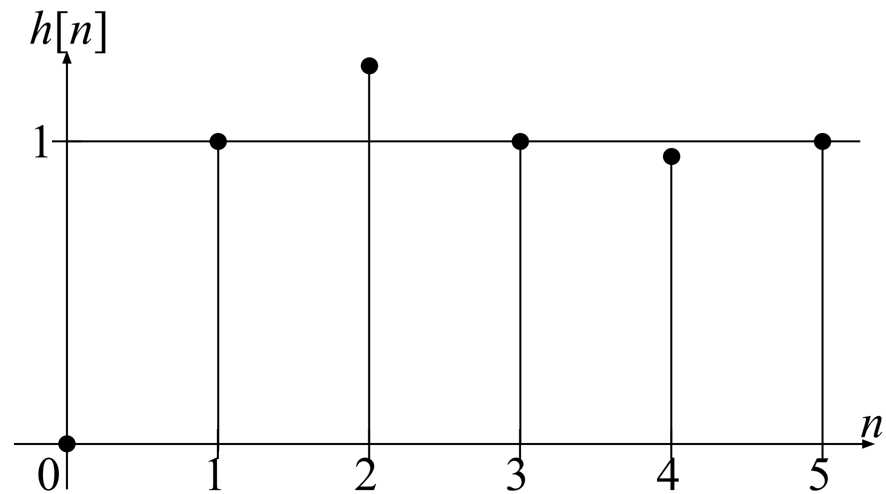
$$= 1 - 0{,}5|\, z_1 \,|^n \, 2\cos(n\mathrm{Arg}(z_1)) = 1 - |\, z_1 \,|^n \cos(n\mathrm{Arg}(z_1)).$$

Пример:

$z_{1,2} = 0{,}5e^{\pm j\,\pi/2}$

$h[n]=1\text{-}0{,}5^n\cos(n\pi/2)$

Переходная характеристика колебательная с периодом колебаний на вершине, равным целому от $2\pi/\mathrm{Arg}(z_1)$.

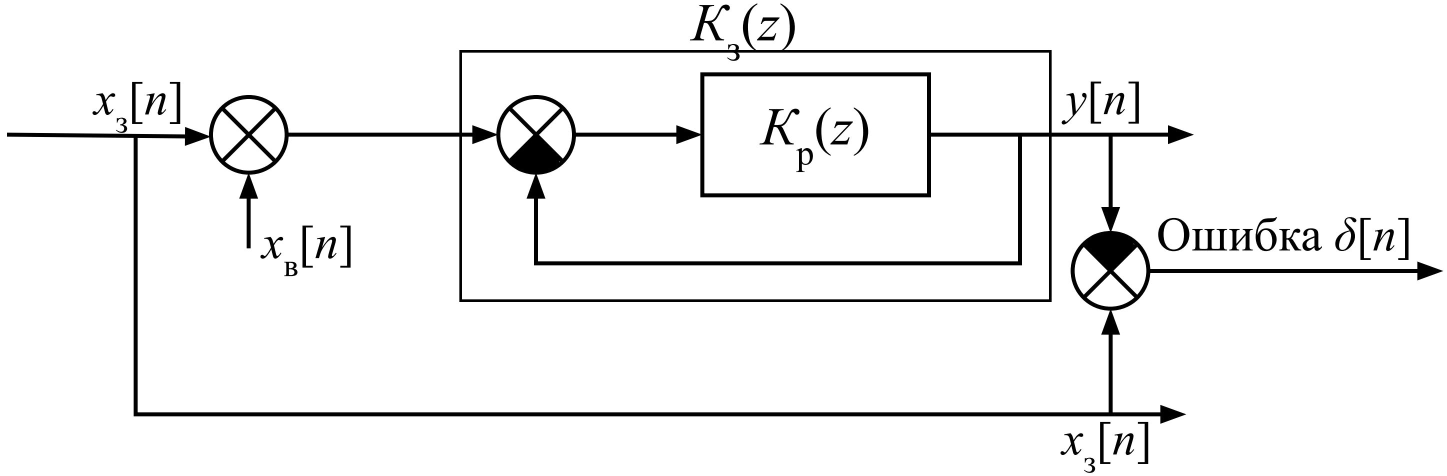


Чем ближе корни к окружности, тем больше амплитуда колебаний и медленней затухание.

Чем ,ближе корни к 1, тем больше период колебаний на вершине переходной характеристики и больше время регулирования.

ОШИБКИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Функциональная схема для расчета ошибок в следящей системе:



Изображение ошибки:

$$\Delta(z) = X_з(z) - Y(z) = X_з(z) - \{X_з(z) + X_в(z)\}K_з(z) = \{1 - K_з(z)\}\, X_з(z) - K_з(z)\, X_в(z)$$

Динамическая ошибка — Ошибка по возмущению

1) *Динамическая ошибка при полиномиальном задающем воздействии.*

$$\Delta_{дин}(z) = \{1 - K_з(z)\}\, X_з(z) = K_{ош}(z)\, X_з(z).$$

Перейдем к оригиналу, разложив передаточную функцию ошибки в ряд по оператору разности.

Найдем этот оператор: $Z\{\Delta x[n]\} = Z\{x[n+1] - x[n]\} = z\,X(z) - X(z) = (z-1)\,X(z)$.

$z - 1$ – оператор разности.

$$K_{\text{ош}}(z) = S_0 + S_1(z-1) + S_2(z-1)^2 + \dots,$$

где $S_0 = K_{\text{ош}}(z=1)$, $\quad S_i = \dfrac{1}{i!}\dfrac{d^i K_{ош}(z)}{dz^i}\Bigg|_{z=1}$

$$\Delta_{\text{дин}}(z) = [\, S_0 + S_1(z-1) + S_2(z-1)^2 + \dots]X_{\text{з}}(z)\,,$$

$$\delta_{\text{дин}}[n] = S_0 x_{\text{з}}[n] + S_1 \Delta x_{\text{з}}[n] + S_2 \Delta^2 x_{\text{з}}[n] + \dots,$$

а) **Статическая ошибка** (при $x_{\text{з}}[n] = x_0$)

$$\Delta\, x_{\text{з}}[n] = x_{\text{з}}[n+1] - x_{\text{з}}[n] = x_0 - x_0 = 0$$

$$\delta_{\text{ст}}[n] = S_0 x_0.$$

б) **Скоростная ошибка** (при $x_{\text{з}}[n] = \Delta x_0 n$), где Δx_0 – приращение входного процесса за интервал дискретизации.

$$\Delta\, x_{\text{з}}[n] = x_{\text{з}}[n+1] - x_{\text{з}}[n] = \Delta x_0(n+1) - \Delta x_0 n = \Delta x_0.$$

$$\Delta^2\, x_{\text{з}}[n] = \Delta x_{\text{з}}[n+1] - \Delta\, x_{\text{з}}[n] = \Delta x_0 - \Delta x_0 = 0.$$

$$\delta_{\text{ск}}[n] = S_0\, \Delta x_0 n + S_1 \Delta x_0.$$

в) **Ошибка по ускорению** (при $x_{\text{з}}[n] = (\Delta^2 x_0/2)\, n^2$),

$$\Delta\, x_{\text{з}}[n] = (\Delta^2 x_0/2)\,(n+1)^2 - (\Delta^2 x_0/2)\, n^2 = (\Delta^2 x_0/2)\,(2n+1).$$

$$\Delta^2 x_{\text{з}}[n] = \Delta x_{\text{з}}[n+1] - \Delta x_{\text{з}}[n] = (\Delta^2 x_0/2)\,(2(n+1)+1) - (\Delta^2 x_0/2)\,(2n+1) = \Delta^2 x_0.$$

$$\Delta^3 x_{\text{з}}[n] = \Delta^2 x_{\text{з}}[n+1] - \Delta^2 x_{\text{з}}[n] = \Delta^2 x_0 - \Delta^2 x_0 = 0.$$

$$\delta_{\text{уск}}[n] = S_0\,(\Delta^2 x_0/2)\, n^2 + S_1\,(\Delta^2 x_0/2)\,(2n+1) + S_2\, \Delta^2 x_0.$$

2) *Ошибка по возмущению при случайном возмущающем воздействии.*

$$\Delta_{\text{воз}}(z) = X_{\text{в}}(z)\,K_{\text{з}}(z).$$

$$\delta_{\text{воз}}[n] = \sum_{i=0}^{\infty} x_{\text{в}}[n-i]g_{\text{з}}[i]\,.$$

Автокорреляционная функция ошибки:

$$K_{\delta\text{воз}}[n_2-n_1] = \overline{\delta_{\text{воз}}[n_2]\,\delta_{\text{воз}}[n_1]} = \overline{\sum_{i_2=0}^{\infty} x_{\text{в}}[n_2-i_2]g_{\text{з}}[i_2]\sum_{i_1=0}^{\infty} x_{\text{в}}[n_1-i_1]g_{\text{з}}[i_1]} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\overline{x_{\text{в}}[n_2-i_2]\,x_{\text{в}}[n_1-i_1]}\,g_{\text{з}}[i_2]\,g_{\text{з}}[i_1] = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}K_{x\text{в}}[n_2-i_2-n_1+i_1]\,g_{\text{з}}[i_2]\,g_{\text{з}}[i_1]$$

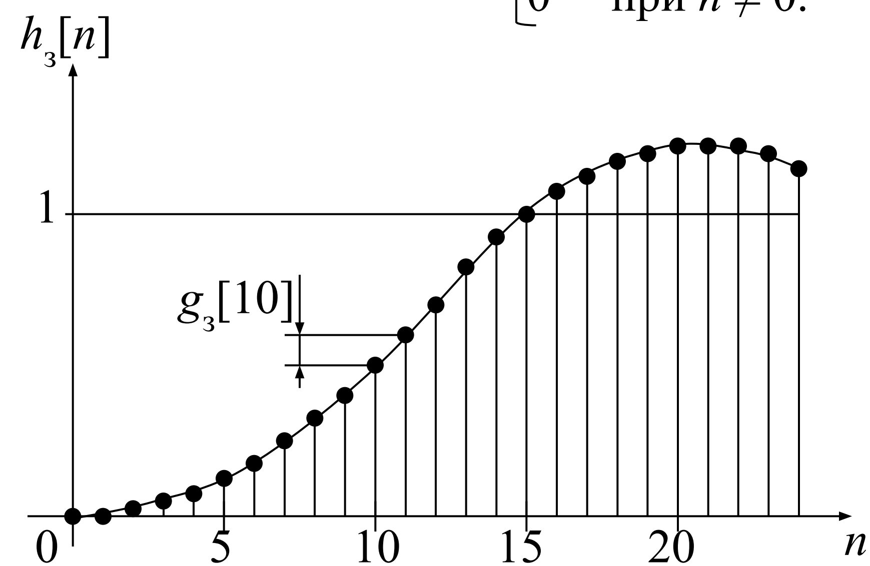
Дисперсия ошибки: $\sigma^2_{\text{воз}} = K_{\delta\text{воз}}[0] = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}K_{x\text{в}}[i_1-i_2]\,g_{\text{з}}[i_2]\,g_{\text{з}}[i_1].$

Пусть $x_{\text{в}}[n]$ – некоррелированный случайный процесс. Тогда $K_{x\text{в}}[n] = \begin{cases}\sigma^2_{x\text{в}} & \text{при } n=0,\\ 0 & \text{при } n\neq 0.\end{cases}$

$$\sigma^2_{\text{воз}} = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sigma^2_{x\text{в}}\,g_{\text{з}}^2[i_1].$$

Следящая система уменьшает ошибки, обусловленные случайным возмущающим воздействием, если $|g_{\text{з}}[n]| << 1$.

Так как $g_{\text{з}}[n] = \Delta h_{\text{з}}[n]$, то переходная характеристика должна быть медленно нарастающей и время достижения первого максимума переходной характеристики должно быть много больше интервала дискретизации.



Корни характеристического уравнения должны быть комплексно-сопряженными и располагаться вблизи 1.