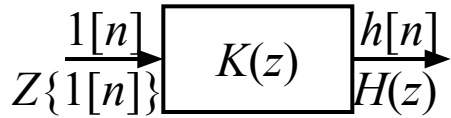


# **РАДИОАВТОМАТИКА**

## **Лекция 14**

### **ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ. ОШИБКИ РЕГУЛИРОВАНИЯ В ДИСКРЕТНОЙ САР**

# ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ



Найти переходную характеристику можно:

- решением разностного уравнения системы при  $x[n] = 1[n]$ ,
- вычислением изображения переходной характеристики  $H(z) = Z\{1[n]\}K(z)$  с последующим переходом к оригиналу.

$$Z\{1[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \quad H(z) = \frac{z}{z-1}K(z).$$

Перейти к оригиналу можно, разложив изображение  $H(z)$  в ряд Лорана

$$H(z) = h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots$$

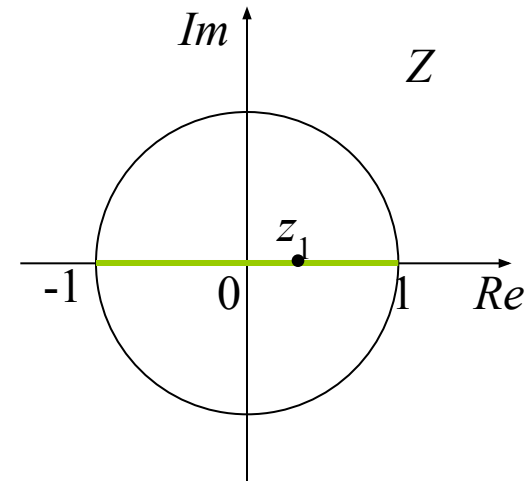
Сравнивая этот ряд с  $Z$ -преобразованием переходной характеристики

$$Z\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots$$

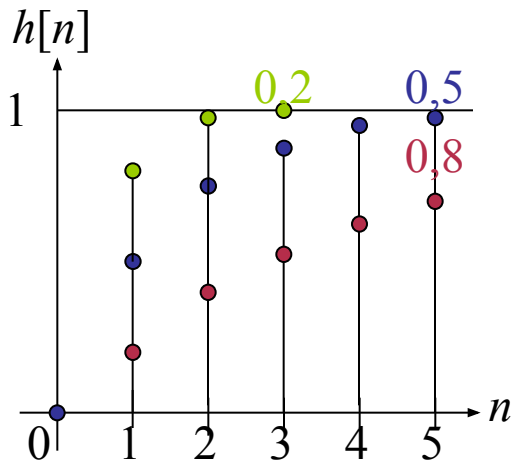
видим, что  $h[0] = h_0$ ,  $h[1] = h_1$ ,  $h[2] = h_2$  и т.д.

Выясним связь формы переходной характеристики с положением корней на комплексной плоскости  $Z$

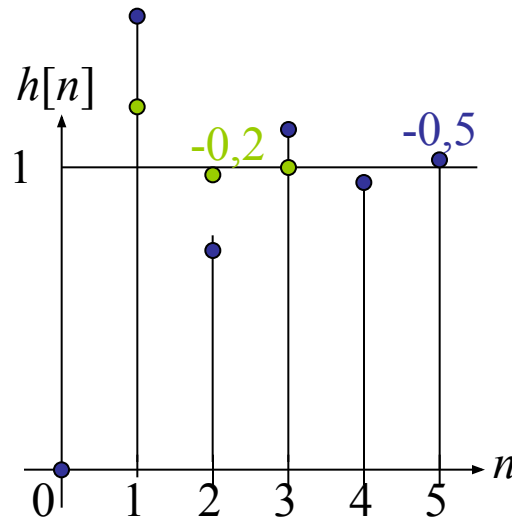
Если корень ( $z_1$ ) находится на действительной оси, тогда свободная составляющая  $y_{cb}[n] = Az_1^n$  и переходная характеристика  $h[n] = 1 - z_1^n$ .



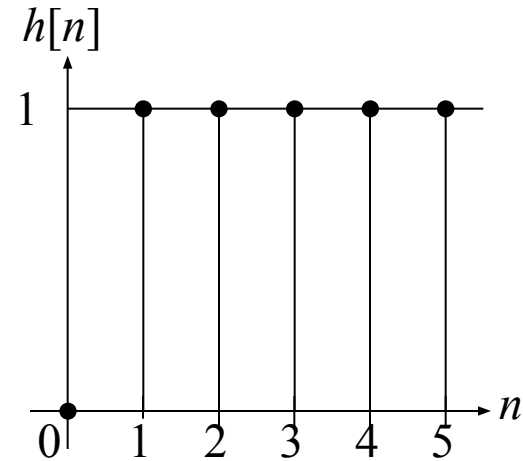
$$1) 0 < z_1 \leq 1$$



$$2) -1 \leq z_1 < 0$$



$$3) z_1 = 0$$



$$h[n] = 1 - z_1^n$$

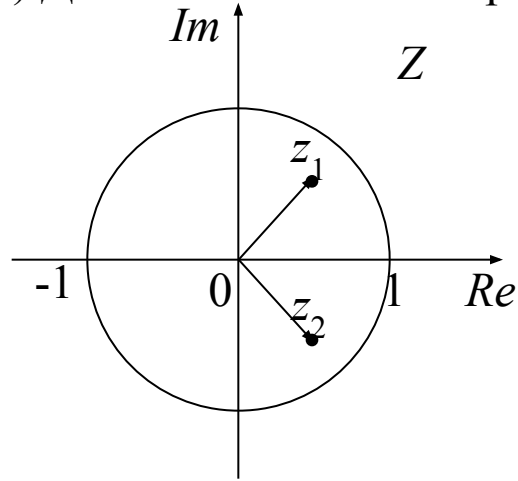
Для положительного корня ( $0 < z_1 \leq 1$ ) переходная характеристика монотонная, а для отрицательного корня ( $-1 \leq z_1 < 0$ ) колебательная с периодом колебаний, равным двум интервалам дискретизации.

Чем ближе корень к нулю, тем быстрее переходная характеристика стремится к 1

При нулевом корне реализуется переходная характеристика минимальной длительности. При  $m$  нулевых корнях (КИХ-фильтр) длительность переходной характеристики равна  $m$  интервалам дискретизации.

4) Два комплексно – сопряженных корня

$$z_{1,2} = |z_1| e^{\pm j \text{Arg}(z_1)}$$



$$h[n] = 1 - 0,5(z_1^n + z_2^n) = 1 - 0,5|z_1|^n (e^{jn \text{Arg}(z_1)} + e^{-jn \text{Arg}(z_1)}) =$$

$$= 1 - 0,5|z_1|^n 2 \cos(n \text{Arg}(z_1)) = 1 - |z_1|^n \cos(n \text{Arg}(z_1)).$$

Пример:

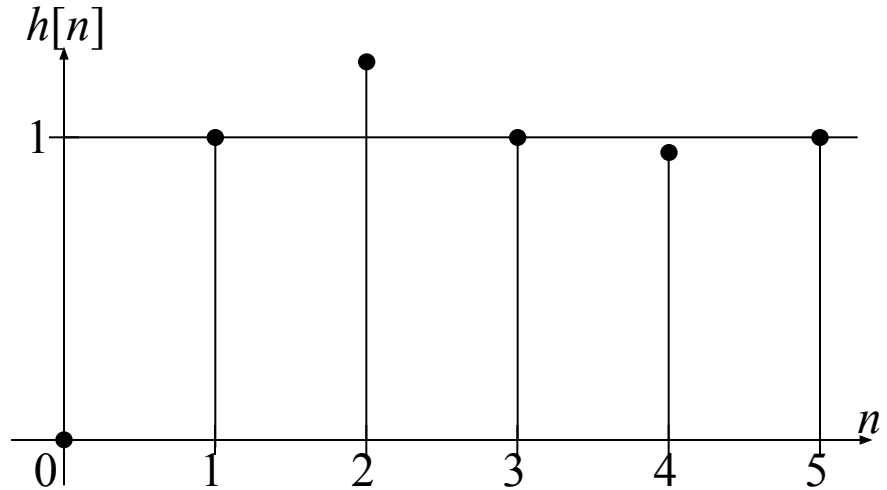
$$z_{1,2} = 0,5 e^{\pm j \pi/2}$$

$$h[n] = 1 - 0,5^n \cos(n\pi/2)$$

Переходная характеристика колебательная с периодом колебаний на вершине, равным целому от  $2\pi/\text{Arg}(z_1)$ .

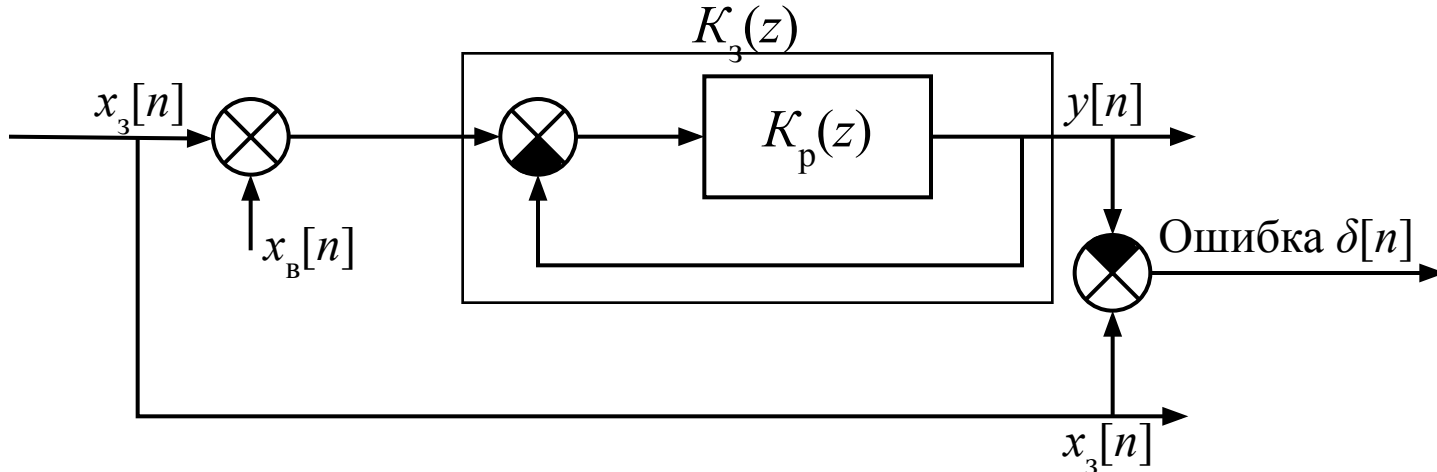
Чем ближе корни к окружности, тем больше амплитуда колебаний и медленней затухание.

Чем ,ближе корни к 1, тем больше период колебаний на вершине переходной характеристики и больше время регулирования.



# ОШИБКИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Функциональная схема для расчета ошибок в следящей системе:



Изображение ошибки:

$$\Delta(z) = X_3(z) - Y(z) = X_3(z) - \underbrace{\{X_3(z) + X_B(z)\}}_{\text{Динамическая ошибка}} K_3(z) = \underbrace{\{1 - K_3(z)\}}_{\text{Динамическая ошибка}} X_3(z) - \underbrace{K_3(z)}_{\text{Ошибка по возмущению}} X_B(z)$$

1) *Динамическая ошибка при полиномиальном задающем воздействии.*

$$\Delta_{\text{дин}}(z) = \{1 - K_3(z)\} X_3(z) = K_{\text{ош}}(z) X_3(z).$$

Перейдем к оригиналу, разложив передаточную функцию ошибки в ряд по оператору разности.

$$\text{Найдем этот оператор: } Z\{\Delta x[n]\} = Z\{x[n+1] - x[n]\} = z X(z) - X(z) = (z - 1) X(z).$$

$z - 1$  – оператор разности.

$$K_{\text{ош}}(z) = S_0 + S_1(z-1) + S_2(z-1)^2 + \dots,$$

$$\text{где } S_0 = K_{\text{ош}}(z=1), \quad S_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i K_{\text{ош}}(z)}{dz^i} \right|_{z=1}$$

$$\Delta_{\text{дин}}(z) = [S_0 + S_1(z-1) + S_2(z-1)^2 + \dots] X_3(z),$$

$$\delta_{\text{дин}}[n] = S_0 x_3[n] + S_1 \Delta x_3[n] + S_2 \Delta^2 x_3[n] + \dots,$$

**а) Статическая ошибка** (при  $x_3[n] = x_0$ )

$$\Delta x_3[n] = x_3[n+1] - x_3[n] = x_0 - x_0 = 0$$

$$\delta_{\text{ст}}[n] = S_0 x_0.$$

**б) Скоростная ошибка** (при  $x_3[n] = \Delta x_0 n$ ), где  $\Delta x_0$  – приращение входного процесса за интервал дискретизации.

$$\Delta x_3[n] = x_3[n+1] - x_3[n] = \Delta x_0(n+1) - \Delta x_0 n = \Delta x_0.$$

$$\Delta^2 x_3[n] = \Delta x_3[n+1] - \Delta x_3[n] = \Delta x_0 - \Delta x_0 = 0.$$

$$\delta_{\text{ск}}[n] = S_0 \Delta x_0 n + S_1 \Delta x_0.$$

**в) Ошибка по ускорению** (при  $x_3[n] = (\Delta^2 x_0 / 2) n^2$ ),

$$\Delta x_3[n] = (\Delta^2 x_0 / 2) (n+1)^2 - (\Delta^2 x_0 / 2) n^2 = (\Delta^2 x_0 / 2) (2n+1).$$

$$\Delta^2 x_3[n] = \Delta x_3[n+1] - \Delta x_3[n] = (\Delta^2 x_0 / 2) (2(n+1)+1) - (\Delta^2 x_0 / 2) (2n+1) = \Delta^2 x_0.$$

$$\Delta^3 x_3[n] = \Delta^2 x_3[n+1] - \Delta^2 x_3[n] = \Delta^2 x_0 - \Delta^2 x_0 = 0.$$

$$\delta_{\text{уск}}[n] = S_0 (\Delta^2 x_0 / 2) n^2 + S_1 (\Delta^2 x_0 / 2) (2n+1) + S_2 \Delta^2 x_0.$$

2) Ошибка по возмущению при случайном возмущающем воздействии.

$$\Delta_{\text{ВОЗ}}(z) = X_{\text{В}}(z) K_3(z).$$

$$\delta_{\text{ВОЗ}}[n] = \sum_{i=0}^{\infty} x_{\text{В}}[n-i] g_3[i].$$

Автокорреляционная функция ошибки:

$$\begin{aligned} K_{\delta_{\text{ВОЗ}}}[n_2 - n_1] &= \overline{\delta_{\text{ВОЗ}}[n_2] \delta_{\text{ВОЗ}}[n_1]} = \overline{\sum_{i_2=0}^{\infty} x_{\text{В}}[n_2 - i_2] g_3[i_2] \sum_{i_1=0}^{\infty} x_{\text{В}}[n_1 - i_1] g_3[i_1]} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \overline{x_{\text{В}}[n_2 - i_2] x_{\text{В}}[n_1 - i_1]} g_3[i_2] g_3[i_1] = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} K_{x_{\text{В}}}[n_2 - i_2 - n_1 + i_1] g_3[i_2] g_3[i_1] \end{aligned}$$

Дисперсия ошибки:  $\sigma_{\text{ВОЗ}}^2 = K_{\delta_{\text{ВОЗ}}}[0] = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} K_{x_{\text{В}}}[i_1 - i_2] g_3[i_2] g_3[i_1].$

Пусть  $x_{\text{В}}[n]$  – некоррелированный случайный процесс. Тогда  $K_{x_{\text{В}}}[n] = \begin{cases} \sigma_{x_{\text{В}}}^2 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$

$$\sigma_{\text{ВОЗ}}^2 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sigma_{x_{\text{В}}}^2 g_3^2[i_1].$$

Следящая система уменьшает ошибки, обусловленные случайным возмущающим воздействием, если  $|g_3[n]| \ll 1$ .

Так как  $g_3[n] = \Delta h_3[n]$ , то переходная характеристика должна быть медленно нарастающей и время достижения первого максимума переходной характеристики должно быть много больше интервала дискретизации.

Корни характеристического уравнения должны быть комплексно-сопряженными и располагаться вблизи 1.

